2023 北京理工大附中高三 10 月月考

数　　学

班级__________姓名__________

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1. 已知集合 $A=\{x|\ x>2\},B=\{x|(x-1)(x-3)<0\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $\{x|\ x>1\}$　　B. $\{x|2<x<3\}$

C. $\{x|1<x<3\}$　　D. $\{x|\ x>2$ 或 $x<1\}$

2. 若复数 z 满足 $\dfrac{z}{1+i}=i$，则 z 对应的点位于（　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $4a_3=3a_2$，则 $\{a_n\}$ 中一定为零的项是（　）

A. a_6　　B. a_4　　C. a_{10}　　D. a_{12}

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(1,1)$，点 B 在圆 $x^2+y^2=4$ 上，则 $|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$ 的最大值为

A. 3　　B. $1+\sqrt{2}$　　C. $2+\sqrt{2}$　　D. 4

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$C=60°,a+2b=8,\sin A=6\sin B$，则 $c=$（　）

A. $\sqrt{35}$　　B. $\sqrt{31}$　　C. 6　　D. 5

6. 函数 $f(x)=\sin x-\cos 2x$ 是（　　）

A. 奇函数，且最小值为−2　　B. 偶函数，且最小值为−2

C. 非奇非偶函数，且最小值为 $-\dfrac{9}{8}$　　D. 非奇非偶函数，且最大值为 $\dfrac{9}{8}$

7. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且在 $(-\infty,0]$ 上是单调递增的，设 $a=f\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0.5}\right)$，$b=f\left(\log_2\dfrac{1}{3}\right)$，$c=f\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

A. $c<b<a$　　B. $c>b>a$　　C. $b<c<a$　　D. $c>a>b$

8. 若 $xy\neq 0$，则“$x+y=0$”是“$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=-2$”的（　）

A.充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 已知函数 f（x）＝sinπx，g（x）＝x^2－x+2，则（　　）

A. 曲线 y＝f（x）+g（x）不是轴对称图形

B. 曲线 y＝f（x）－g（x）是中心对称图形

C. 函数 y＝f（x）g（x）是周期函数

D. 函数 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 最大值为 $\dfrac{4}{7}$

10. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{1}{4}(a_n-6)^3+6$，下列说法正确的是（　）

A. 若 $a_1=3$，则 $\{a_n\}$ 是递减数列，$\exists M\in R$，使得 $n>m$ 时，$a_n>M$

B. 若 $a_1=5$，则 $\{a_n\}$ 是递增数列，$\exists M\le 6$，使得 $n>m$ 时，$a_n<M$

C. 若 $a_1=7$，则 $\{a_n\}$ 是递减数列，$\exists M>6$，使得 $n>m$ 时，$a_n>M$

D. 若 $a_1=9$，则 $\{a_n\}$ 是递增数列，$\exists M\in R$，使得 $n>m$ 时，$a_n<M$

二、填空题共 5 小题.每小题 5 分，共 25 分.

11. 函数 $f(x)=\sqrt{\log_2 x-1}$ 的定义域为________.

12. 已知角 α 的顶点在坐标原点，始边在 x 轴的正半轴上，终边与单位圆交于第二象限的点 P，且点 P 的纵坐标为 $\frac{1}{2}$，则 $\tan(\pi-\alpha)=$__________.

13. 已知正方形 $ABCD$ 边长为1，E 是线段 CD 的中点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=$__________.

14. 某游乐园的摩天轮采用了国内首创的横梁结构，风格更加简约，已知该摩天轮从最低位置开始运行，乘客距离地面的距离 H（单位：米）会随摩天轮的运行时间 t（单位：分钟）的变化而变化.经长期观察，曲线 $H=f(t)$ 可近似看成函数 $f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+h(A>0,\omega>0)$ 的图象.在运行一圈的时间里，观察了如下的数据：

t	0	3	4.5	6	9	12	13.5
H	12	34	56	78	100	78	56

由于受到周边建筑物的影响，乘客与地面的距离超过 34 米时，可视为最佳观赏位置，在运行的一圈里最佳观赏时长为________.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^x, x>1,\\ x+\dfrac{a}{2}, x\le 1,\end{cases}$ 其中 $a>0$, 且 $a\ne 1$.

（1）当 $a=2$ 时，若 $f(x)<f(2)$，则实数 x 的取值范围是_____；

(2) 若存在实数 m 使得方程 $f(x)-m=0$ 有两个实根，则实数 a 的取值范围是___.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，且满足___________.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{a_n+2^{n-1}\}$ 的前 n 项和 S_n.

从① $a_{n+1}=2a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$；② $a_{n+1}-a_n=2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$；③ $a_{n+1}+a_n=2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 这三个条件中选择一个，补充在上面的问题中并作答.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

17. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}sin2x+cos2x+1}{2cosx}$.

（Ⅰ）求 f（0）的值；

（Ⅱ）求函数 f（x）的定义域；

（Ⅲ）求函数 f（x）在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的取值范围.

18. 已知函数 $f(x)=x^3-x$，$g(x)=2x-3$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值；

(3) 求证：存在唯一的 x_0，使得 $f(x_0)=g(x_0)$.

19. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，$\dfrac{\cos A}{\cos C}=\dfrac{a}{2b-c}$.

（1）求 A 的大小；

（2）若 $a=\sqrt{7}$，$c=3$，D 为 BC 的中点，求 AD.

20. 已知函数 $f(x)=2\ln x-x-\ln a$，$a>0$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处切线的斜率；

（2）求函数 $f(x)$ 的极大值；

（3）设 $g(x)=ae^x-x^2$，当 $a\in(1,\mathrm{e})$ 时，求函数 $g(x)$ 的零点个数．并说明理由.

21. 若对任意的正整数 n，总存在正整数 m，使得数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=a_m$，则称 $\{a_n\}$ 是“回归数列”.

（1）①前 n 项和为 $S_n=2^n$ 的数列 $\{a_n\}$ 是否是“回归数列”?并请说明理由；

②通项公式为$b_n=2n$的数列$\{b_n\}$是否是“回归数列”?并请说明理由；

（2）设$\{a_n\}$是等差数列，首项$a_1=1$，公差$d<0$，若$\{a_n\}$是“回归数列”，求d的值；

（3）是否对任意的等差数列$\{a_n\}$，总存在两个“回归数列”$\{b_n\}$和$\{c_n\}$，使得$a_n=b_n+c_n\left(n\in N^*\right)$成立，请给出你的结论，并说明理由.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1. 【答案】B

【分析】先求解一元二次不等式得到集合 B，再求出 $A\cap B$ 即可.

【详解】$B=\{x|(x-1)(x-3)<0\}=\{x|1<x<3\}$，所以 $A\cap B=\{x|2<x<3\}$.

故选：B.

2. 【答案】B

【分析】

利用复数的四则运算化简复数 z，确定对应复平面的点，即可得出答案.

【详解】$z=i(1+i)=-1+i$，其对应复平面的点为 $(-1,1)$，在第二象限

故选：B

【点睛】本题主要考查了复数的四则运算以及几何意义，属于基础题.

3. 【答案】A

【分析】借助等差数列的基本量进行计算即可.

【详解】由 $4a_3=3a_2$ 得 $4(a_1+2d)=3(a_1+d)$，即 $a_1=-5d$，所以

$a_n=a_1+(n-1)d=-5d+(n-1)d=(n-6)d$，所以 $a_6=0$.

故选：A.

4. 【答案】C

【分析】根据向量减法的三角形法则转化为求 $|\overrightarrow{BA}|$，再根据两边之和大于等于第三边可得最大值.

【详解】$\because |\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{BA}|\leqslant|OB|+|OA|=2+\sqrt{1^2+1^2}=2+\sqrt{2}$，

故选 C.

【点睛】本题考查了考查了向量减法的运算法则，向量在几何中的应用问题，属于中档题.

5. 【答案】B

【分析】由正弦定理可得 $a=6b$，即可求出 a,b，再由余弦定理计算可得；

【详解】解：因为 $\sin A=6\sin B$，由正弦定理可得 $a=6b$，又 $a+2b=8$，所以 $a=6$，$b=1$，

因为 $C=60°$

所以 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，即 $c^2=6^2+1^2-2\times1\times6\times\frac{1}{2}$，解得 $c=\sqrt{31}$，

故选：B

6. 【答案】C

【分析】利用三角函数的余弦二倍角公式，结合奇偶性定义，利用换元法，根据二次函数的性质，可得答案.

【详解】$f(x)=\sin x-\cos 2x=\sin x-(1-2\sin^2 x)=2\sin^2 x+\sin x-1$，其定义域为 R，

$f(-x)=2\sin^2(-x)+\sin(-x)-1=2\sin^2 x-\sin x-1$，故函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数，

令 $t=\sin x$，则 $t\in[-1,1]$，则 $f(x)=g(t)=2t^2+t-1=2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$，

易知 $f(x)_{\min}=g\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{9}{8}$，

故选：C.

7.【答案】D

【分析】根据偶函数的性质以及函数在 $(-\infty,0]$ 上单调递增，比较自变量绝对值的大小即可得解

【详解】由题意可得 $a=f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{0.5}\right)=f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$b=f\left(\log_2\frac{1}{3}\right)=f(-\log_2 3)$，

$c=f\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$，

因为函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，，所以 $a=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$c=f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$，

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上是单调递增的，且 $-\log_2 3<-1<-\frac{\sqrt{2}}{2}<-\frac{1}{2}$，

所以 $f(-\log_2 3)<f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<f\left(-\frac{1}{2}\right)$，即 $b<a<c$.

故选：D

8.【答案】C

【分析】解法一：由 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$ 化简得到 $x+y=0$ 即可判断；解法二：证明充分性可由 $x+y=0$ 得到 $x=-y$，代入 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 化简即可，证明必要性可由 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$ 去分母，再用完全平方公式即可；解法三：证明充分性可由 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 通分后用配凑法得到完全平方公式，再把 $x+y=0$ 代入即可，证明必要性可由 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 通分后用配凑法得到完全平方公式，再把 $x+y=0$ 代入，解方程即可.

【详解】解法一：

因为 $xy\neq 0$，且 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$，

所以 $x^2+y^2=-2xy$，即 $x^2+y^2+2xy=0$，即 $(x+y)^2=0$，所以 $x+y=0$.

所以“$x+y=0$”是“$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$”的充要条件.

解法二：

充分性：因为 $xy\neq0$，且 $x+y=0$，所以 $x=-y$，

所以 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{-y}{y}+\frac{y}{-y}=-1-1=-2$，

所以充分性成立；

必要性：因为 $xy\neq0$，且 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$，

所以 $x^2+y^2=-2xy$，即 $x^2+y^2+2xy=0$，即 $(x+y)^2=0$，所以 $x+y=0$.

所以必要性成立.

所以“$x+y=0$”是“$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$”的充要条件.

解法三：

充分性：因为 $xy\neq0$，且 $x+y=0$，

所以 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x^2+y^2+2xy-2xy}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{-2xy}{xy}=-2$，

所以充分性成立；

必要性：因为 $xy\neq0$，且 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$，

所以 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x^2+y^2+2xy-2xy}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{(x+y)^2}{xy}-2=-2$，

所以 $\frac{(x+y)^2}{xy}=0$，所以 $(x+y)^2=0$，所以 $x+y=0$，

所以必要性成立.

所以“$x+y=0$”是“$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$”的充要条件.

故选：C

9.【答案】D

【分析】根据题意，依次分析选项，综合即可得答案.

【详解】根据题意，依次分析选项：

对于 A，函数 f（x）＝sinπx，为轴对称图形，且其中一条对称轴为 $x=\frac{1}{2}$，

g（x）＝x^2-x+2＝$(x-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}$，为轴对称图形，且其对称轴为 $x=\frac{1}{2}$，

故 y＝f（x）+g（x）＝sinπx+（x^2-x+2）是轴对称图形，且其对称轴为 $x=\frac{1}{2}$，A 错误；

对于 B，g（x）＝x^2-x+2，不是中心对称图形，则曲线 y＝f（x）－g（x）不是中心对称图形，B 错误；

对于 C，g（x）=x^2-x+2 不是周期函数，f（x）g（x）=（sinπx）（x^2-x+2）不是周期函数，C 错误；

对于 D，g（x）=x^2-x+2=（$x-\frac{1}{2}$）^{2}+$\frac{7}{4}$，当 x=$\frac{1}{2}$时，g（x）取得最小值$\frac{7}{4}$，

而 f（x）=sinπx，当 x=$\frac{1}{2}$时，f（x）取得最大值 1，

则函数 $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ 最大值为$\frac{4}{7}$；D 正确；

故选 D.

【点睛】本题考查函数的对称性、周期性和最值，推理求解能力，关键掌握函数的性质，属于基础题.

10.【答案】B

【分析】由 $a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6$，得到 $a_{n+1}-a_n=\left[\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\right](a_n-6)$，再逐项判断.

【详解】解：因为 $a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6$，所以 $a_{n+1}-a_n=\left[\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\right](a_n-6)$，

当 $a_1=3$时，则 $a_2-a_1<0$，$a_2<3$，设 $a_k<3(k\in Z,k\geq 2)$，则 $a_{k+1}-a_k<-3$，所以$\{a_n\}$是递减数列，当 $n\to+\infty$，$a_n\to-\infty$，故 A 错误；

当 $a_1=5$ 时，$a_2-a_1>0$，$a_2>5$，又$\frac{1}{4}(a_1-6)^3<0$，所以$5<a_2<6$，设$5<a_k<6(k\in Z,k\geq 2)$，则 $a_{k+1}-a_k>0$，即 $a_{k+1}>5$，又因为$\frac{1}{4}(a_k-6)^3<0$，所以$5<a_{k+1}<6$，所以$n\to+\infty$，$a_n\to 6$，故 B 正确；

当 $a_1=7$ 时，$a_2=\frac{1}{4}+6$，$a_3=\frac{1}{4^4}+6$，所以$\{a_n\}$是递减数列，当$n\to+\infty$时，$a_n\to 6$，故不存在 $M>6$，使得$n>m$时，$a_n>M$ 恒成立，故 C 错误；

当 $a_1=9$ 时，则 $a_2-a_1>0$，$a_2>9$，设 $a_k>9(k\in Z,k\geq 2)$，则 $a_{k+1}-a_k>3$，所以$\{a_n\}$是递增数列，当 $n\to+\infty$，$a_n\to+\infty$，故 D 错误；

故选：B

二、填空题共 5 小题.每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】[2，+∞）

【详解】分析：根据偶次根式下被开方数非负列不等式，解对数不等式得函数定义域.

详解：要使函数 $f(x)$ 有意义，则 $\log_2 x-1\geq 0$，解得 $x\geq 2$，即函数 $f(x)$ 的定义域为$[2,+\infty)$.

点睛：求给定函数的定义域往往需转化为解不等式（组）的问题.

12.【答案】$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【分析】根据正切的定义，结合单位单位圆的性质、诱导公式进行求解即可.

【详解】因为角α的顶点在坐标原点，始边在x轴的正半轴上，终边与单位圆交于第二象限的点P，且点P的纵坐标为$\frac{1}{2}$，

所以设$P\left(x,\frac{1}{2}\right)(x<0)$，则有$x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为$x<0$，所以$x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，即$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，

所以$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{3}$

13.【答案】$\frac{1}{2}$##0.5

【分析】利用转化法得$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$，展开计算即可.

【详解】由题意可得：$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}|=1$，

故$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

故答案为：$\frac{1}{2}$.

14.【答案】12分钟

【分析】根据题意求出$f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+h(A>0,\omega>0)$解析式，再求解不等式$f(t)>34$即可.

【详解】由题意知，H最小值为12，最大值为100，所以$\begin{cases}A+h=100\\-A+h=12\end{cases}$，解得$A=44,h=56$；周期为$T=2(9-0)=18$，又$T=\frac{2\pi}{\omega}$，所以$\omega=\frac{\pi}{9}$；初相$\varphi=-\frac{\pi}{2}$；所以$f(t)=44\sin\left(\frac{\pi}{9}t-\frac{\pi}{2}\right)+56$.

令$f(t)=44\sin\left(\frac{\pi}{9}t-\frac{\pi}{2}\right)+56>34$，$t\in[0,2\pi]$，即$\cos\frac{\pi}{9}t<\frac{1}{2}$，所以$\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{9}t<\frac{5\pi}{3}$，所以$3<t<15$，

所以在运行的一圈里最佳观赏时长为$15-3=12$分钟.

故答案为：12分钟.

15.【答案】 ①. $(-\infty,2)$ ②. $(0,1)\cup(1,2)$

【分析】(1)由分段函数，分别讨论x>1和$x\le1$，解不等式即可.

(2)分类讨论$0<a<1$、$1<a<2$和$a\ge2$，分析得出结果.

【详解】(1).当 a=2 时， $f(x)=\begin{cases}2^x, x>1,\\ x+1, x\le 1,\end{cases}$

f(2)=4

当 x>1，f(x)<4， $2^2<4$ 解得 1<x<2，

当 $x\le 1$，f(x)=x+1≤ 4,此时恒成立，

所以 x 的取值为：$(-\infty,2)$

（2）令$1+\frac{a}{2}=a, a=2$

当$0<a<1$时，f(x)在$(-\infty,1]$递增，在$(1,+\infty)$递减，

此时 $f(1)=1+\frac{a}{2}>1>a$，且$a^x>0$ 恒成立，

故方程 $f(x)-m=0$ 有两个实根，$m\in(0,a)$

$a\in(0,1)$满足，

当$1<a<2$ 时，f(x)在$(-\infty,1]$和$(1,+\infty)$递增，

此时 $f(1)=1+\frac{a}{2}>a>1$，

则当$m\in(a,1+\frac{a}{2})$ 时，方程 $f(x)-m=0$ 有两个实根，

$a\in(1,2)$满足，

当$a\ge 2$ 时，f(x)在$(-\infty,1]$和$(1,+\infty)$递增，

此时$a\ge 1+\frac{a}{2}>1$，此时方程 $f(x)-m=0$ 最多一个实根，故不满足题意.

综上$a\in(0,1)\cup(1,2)$

故答案为$(-\infty,2)$； $a\in(0,1)\cup(1,2)$

【点睛】本题主要考查了函数的概念与性质和指数与指数函数以及分类讨论思想，解题的关键点在于第二问中能否找出 a 的范围，分的情况，属于较难题型.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16.【答案】（1）答案见解析，（2）答案见解析

【分析】（1）若选①，则可得数列$\{a_n\}$是以 2 为公比的等比数列，从而可求出其通项，若选②，则数列$\{a_n\}$是以 2 为公差的等差数列，从而可求出其通项，若选③，则可知数列$\{a_n\}$为常数数列，且$a_n=1$，

（2）若选①，则利用等比数列求和公式求S_n，若选②或③，则利用分组求和法求S_n

【详解】解：（1）若选①，由$a_{n+1}=2a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，得$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，

因为$a_1=1$，所以数列$\{a_n\}$是以 2 为公比，1 为首项的等比数列，

所以$a_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$，

若选②，因为$a_{n+1}-a_n=2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，$a_1=1$，

所以数列$\{a_n\}$是以 2 为公差，1 为首项的等差数列，

所以$a_n=1+2(n-1)=2n-1$，

若选③，因为$a_{n+1}+a_n=2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，$a_1=1$，

所以$a_n=1$，

（2）若选①，则由（1）得$a_n+2^{n-1}=2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$，则

$$S_n=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2(2^n-1)=2^{n+1}-2,$$

若选②，则由（1）得$a_n+2^{n-1}=2n-1+2^{n-1}$，则

$$S_n=(1+2^0)+(3+2^1)+(5+2^2)+\cdots+[(2n-1)+2^{n-1}],$$

$$=[1+3+5+\cdots+(2n-1)]+(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}),$$

$$=\frac{n(1+2n-1)}{2}+\frac{1-2^n}{1-2},$$

$$=n^2+2^n-1,$$

若选③，则由（1）得$a_n+2^{n-1}=1+2^{n-1}$，则

$$S_n=(1+2^0)+(1+2^1)+\cdots+(1+2^{n-1}),$$

$$=n+(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1}),$$

$$=n+\frac{1-2^n}{1-2},$$

$$=n+2^n-1,$$

17.【答案】(Ⅰ) 1；（Ⅱ）$\{x\,|\,x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z\}$；(Ⅲ)（1，2]

【分析】(Ⅰ) 把 x=0 代入函数$f\left(x\right)$计算求解即可；

（Ⅱ）由函数$f\left(x\right)$的分母不为 0，即可求得定义域；

（Ⅲ）由三角函数恒等变形得$f\left(x\right)=2sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，再由 x 的范围求得$x+\frac{\pi}{6}$范围，即可求出函数 f（x）取值范围.

【详解】(Ⅰ) $f\left(0\right)=\frac{\sqrt{3}\cdot sin0+cos0+1}{2cos0}=\frac{1+1}{2}=1$；

（Ⅱ）由 cosx≠0，得 $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$．∴函数的定义域是 $\{x|x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z\}$；

（Ⅲ） $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}\cdot2\cdot sinx\cdot cosx+2\cdot cos^2x-1+1}{2\cdot cosx}=\sqrt{3}\cdot sinx+cosx=2sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$．

∵ $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，即 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，∴ $\dfrac{\pi}{6}<x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{2\pi}{3}$，

∴ $\dfrac{1}{2}<sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\leq1$，得 $1<2sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\leq2$．

∴函数 f（x）在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的取值范围为（1，2]．

【点睛】本题考查三角函数的化简求值，考查三角函数中的恒等变换应用，属于基础题．

18.【答案】（1） $2x-y-2=0$；（2）6；（3）见解析

【分析】（1）根据导数的几何意义求切线斜率，写出切线方程；

（2）写出函数在区间上导数的变化情况，列表求最值即可；

（3）构造函数 $h(x)=f(x)-g(x)=x^3-3x+3$，只需证明函数有唯一零点即可．

【详解】（1）由 $f(x)=x^3-x$，得 $f'(x)=3x^2-1$，所以 $f'(1)=2$，又 $f(1)=0$

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为：$y-0=2(x-1)$，

即：$2x-y-2=0$．

（2）令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $[0,2]$ 的情况如下：

x	$(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(\frac{\sqrt{3}}{3},2)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

因为 $f(0)=0,\ f(2)=6$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,3]$ 上的最大值为 6.

（3）证明：设 $h(x)=f(x)-g(x)=x^3-3x+3$，

则 $h'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$，

令 $h'(x)=0$，得 $x=\pm1$．

$h(x)$ 与 $h'(x)$ 随 x 的变化情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

则 $h(x)$ 的增区间为 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$，减区间为 $(-1,1)$.

又 $h(1)=1>0$，$h(-1)>h(1)>0$，所以函数 $h(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 没有零点，又 $h(-3)=-15<0$，

所以函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上有唯一零点 x_0.

综上，在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在唯一的 x_0，使得 $f(x_0)=g(x_0)$.

19.【答案】(1) $A=\frac{\pi}{3}$

(2) $AD=\frac{\sqrt{19}}{2}$

【分析】(1) 利用正弦定理结合两角和的正弦公式化简可得出 $\cos A$ 的值，结合角 A 的取值范围可得出角 A 的值；

(2) 利用余弦定理可得出关于 b 的方程，结合 $\triangle ABC$ 为锐角三角形可求出 b 的值，利用平面向量的线性运算可得出 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，利用平面向量数量积的运算性质可求得 AD 的长.

【小问 1 详解】

解：因为 $\frac{\cos A}{\cos C}=\frac{a}{2b-c}$，由正弦定理可得 $(2\sin B-\sin C)\cos A=\sin A\cos C$，

所以，$2\sin B\cos A=\sin C\cos A+\sin A\cos C=\sin(A+C)=\sin B$，

因为 $B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin B\neq 0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，

因为 $0<A<\frac{\pi}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

解：在 $\triangle ABC$ 中，因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

所以 $\left(\sqrt{7}\right)^2=b^2+3^2-2\times b\times 3\times\cos\frac{\pi}{3}$，所以 $b^2-3b+2=0$，解得 $b=2$ 或 $b=1$

当 $b=1$ 时，$\cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}=\frac{1+7-9}{2\sqrt{7}}<0$，则 C 为钝角，不符合题意，

当 $b=2$ 时，$\cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}=\frac{4+7-9}{4\sqrt{7}}>0$，则 C 为锐角，合乎题意，故 $b=2$，

因为 D 为 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，

所以，$\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}\left(c^2+b^2+2cb\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}\left(9+4+2\times3\times2\times\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{19}{4}$，故 $AD=\frac{\sqrt{19}}{2}$.

20.【答案】（1）1

（2）$\ln\frac{4}{ae^2}$

（3）1

【分析】（1）利用导数的几何意义可求解；

（2）利用导数研究函数的单调性，进而求得极值；

（3）先讨论 $x\le0$ 时，函数 $g(x)$ 的零点个数，再讨论 $x>0$ 时，利用零点定义将已知转化为讨论函数 $h(x)=\frac{x^2}{e^x}$ 与 $y=a$ 的交点个数，研究函数 $h(x)$ 的单调性及最值即可得解.

【小问 1 详解】

由 $f(x)=2\ln x-x-\ln a$，知 $f(1)=-1-\ln a$，即切点 $(1,-1-\ln a)$

求导 $f'(x)=\frac{2}{x}-1$，则切线的斜率 $k=f'(1)=1$

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处切线的斜率为 1.

【小问 2 详解】

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，求导 $f'(x)=\frac{2}{x}-1$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=2$

当 $x\in(0,2)$ 时，$f'\ x\ >0$，函数单调递增；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，函数单调递减；

故当 $x=2$ 时，函数取得极大值 $f(2)=2\ln2-2-\ln a=\ln\frac{4}{ae^2}$

所以函数 $f(x)$ 的极大值为 $\ln\frac{4}{ae^2}$

【小问 3 详解】

函数 $g(x)=ae^x-x^2$，求导 $g'(x)=ae^x-2x$，$a\in(1,e)$

当 $x\in(-\infty,0]$ 时，$g'(x)>0$，故函数在 $(-\infty,0]$ 上单调递增，

又 $g(0)=a>0$，$g(-1)=\frac{a}{e}-1<0$，所以方程 $g(x)=0$ 在 $x\in(-1,0)$ 有且仅有一个根，

即函数 $g\left(x\right)$ 在 $x\in\left(-\infty,0\right]$ 有一个零点.

当 $x>0$ 时，讨论函数 $g\left(x\right)$ 的零点个数，即讨论方程 $ae^{x}=x^{2}$ 的根的个数，

即讨论方程 $a=\dfrac{x^{2}}{e^{x}}$ 的根的个数，即讨论函数 $h(x)=\dfrac{x^{2}}{e^{x}}$ 与 $y=a$ 的交点个数，

求导 $h'(x)=\dfrac{2x-x^{2}}{e^{x}}$，令 $h'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=2$

当 $x\in(0,2)$ 时，$h'\left(x\right)>0$，函数单调递增；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$h'\left(x\right)<0$，函数单调递减；

又 $h(0)=0$，$h(2)=\dfrac{4}{e^{2}}<1$，又 $a\in\left(1,e\right)$，所以函数 $h(x)=\dfrac{x^{2}}{e^{x}}$ 与 $y=a$ 没有交点，

即函数 $g(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上无零点.

综上可知，当 $a\in\left(1,e\right)$ 时，求函数 $g\left(x\right)$ 的零点个数为1个.

【点睛】方法点睛：本题考查导数的几何意义，利用导数求函数的极值，利用导数研究含参函数的零点有两种方法：

（1）利用导数研究函数 $g\left(x\right)$ 的极（最）值，转换为函数 $g\left(x\right)$ 的图像与 x 轴的交点问题，应用分类讨论思想，在含参函数含参函数单调性的基础上再判断函数零点个数问题；

（2）参数分离，即由 $g\left(x\right)=0$ 分离参变量，得到 $a=f(x)$，转化为研究 $y=f(x)$ 与直线 $y=a$ 的图像的交点问题.

21.【答案】（1）①是；②是；（2）-1；（3）见解析.

【分析】（1）①利用公式 $a_n=\begin{cases}S_n-S_{n-1}(n\geq 2,n\in N^{*})\\ S_1(n=1)\end{cases}$ 和 $S_n=2^{n}$，求出数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式，按照回归数列的定义进行判断；

②求出数列 $\left\{b_n\right\}$ 的前 n 项和，按照回归数列的定义进行判断；

（2）求出 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和，根据 $\left\{a_n\right\}$ 是"回归数列"，可得到等式，通过取特殊值，求出 d 的值；

（3）等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 的公差为 d，构造数列 $b_n=a_1-(n-1)a_1,c_n=(n-1)(a_1+d)$，可证明 $\left\{b_n\right\}$、$\left\{c_n\right\}$ 是等差数列，再利用等差数列前 n 项和，及其通项公式，回归数列的概念，即可求出.

【详解】（1）①当 $n\geq 2,n\in N^{*}$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n}-2^{n-1}=2^{n-1}$，

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2$，当 $n\geq 2,n\in N^{*}$ 时，$S_n=a_{n+1}$，$\exists m=n+1$，所以数列 $\left\{a_n\right\}$ 是"回归数列"；

②因为 $b_n=2n$，所以前 n 项和 $S_n=n^{2}+n$，根据题意 $n^{2}+n=2m$，

因为 $n^{2}+n=n(n+1)$ 一定是偶数，所以存在 $m=\dfrac{n(n+1)}{2}$，使得 $S_n=a_m$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是"回归数列"；

（2）设$\{a_n\}$是等差数列为$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n+\frac{n(n-1)}{2}d$，由题意可知：对任意的正整数$n$，总存在正整数$m$，使得数列$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n=a_m$，即$n+\frac{n(n-1)}{2}d=1+(m-1)d$，取$n=2$，得$1+d=(m-1)d$，解得$m=2+\frac{1}{d}$，公差$d<0$，所以$\therefore m<2$，又$m\in N^*$，$\therefore m=1$，$\therefore d=-1$；

（3）设等差数列$a_n=a_1+(n-1)d$，

总存在两个回归数列$b_n=a_1-(n-1)a_1, c_n=(n-1)(a_1+d)$，显然$\{b_n\}$和$\{c_n\}$是等差数列，使得

$a_n=b_n+c_n\left(n\in N^*\right)$，

证明如下：$b_n+c_n=a_1-(n-1)a_1+(n-1)a_1+(n-1)d=a_n$，

数列$\{b_n\}$前n项和$B_n=ma_1-\frac{n(n-1)}{2}a_1$，$n=1,m=1;n=2,m=1$

$n\geq 3$时，$2+\frac{(n-3)n}{2}$为正整数，当$m=2+\frac{(n-3)n}{2}$时，$b_m=B_n$，

所以存在正整数$m=2+\frac{(n-3)n}{2}$，使得$b_m=B_n$，所以$\{b_n\}$是“回归数列”，

数列$\{c_n\}$前n项和$C_n=\frac{n(n-1)}{2}(a_1+d)$，存在正整数$m=\frac{n(n-1)}{2}+1$，使得$C_n=c_m$，所以$\{c_n\}$是“回归数列”，所以结论成立.

【点睛】本题考查了公式$a_n=\begin{cases}S_n-S_{n-1}(n\geq 2,n\in N^*)\\S_1(n=1)\end{cases}$，等差数列的前$n$项和、通项公式，考查了推理能力、数学运算能力.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

微信搜一搜
京考一点通