

2023 全国甲卷文科数学答案



(选填答案速递)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	C	B	D	C	B	B	C	D	A	A	C

13	14	15	16
$-\frac{1}{2}$	2	15	$[2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}]$

17. 【答案速递】(1) $bc=1$.

(2) 故 $\triangle ABC$ 面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

18. 【答案速递】(1) 见解析.

(2) 故四棱锥 $A_1-BB_1C_1C$ 的高为 1.

19. 【答案速递】(1) 所以试验组的样本平均数为 19.8.

(2)

(i) 所以中位数 $m = \frac{23.2+23.6}{2} = 23.4$,

所以列联表为

	$< m$	$\geq m$
对照组	6	14
实验组	14	6

(ii) $K^2 = 6.400 > 3.841$. 所以有 95% 的把握认为药物对小鼠生长有抑制作用.

20. 【答案速递】(1) 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减.

(2) 综上, a 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.

【参考解析】 $P = \frac{C_2^1 \times C_2^1}{C_4^2} = \frac{2}{3}$ ，故选 D.

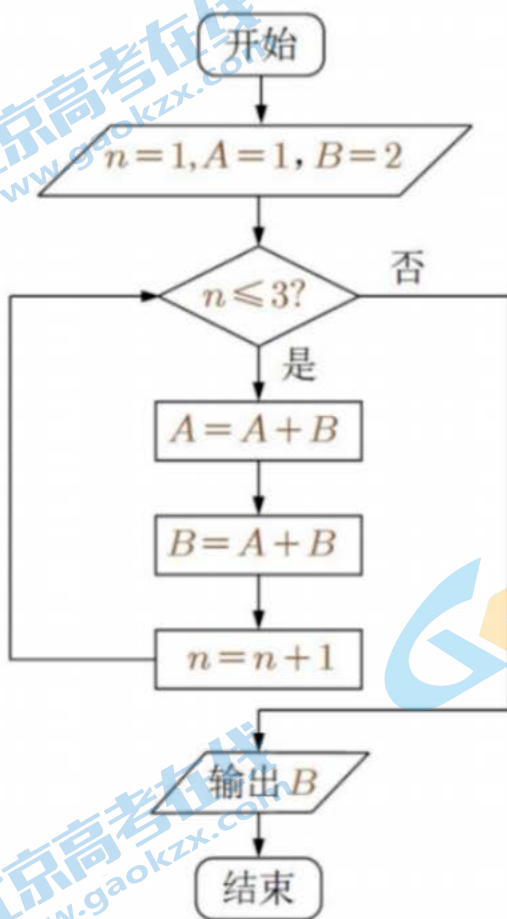
5. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_2 + a_6 = 10$, $a_4 a_8 = 45$, 则 $S_5 =$

A. 25
C. 20

B. 22
D. 15

【参考解析】由等差中项易知 $a_4 = 5$, 所以 $a_8 = 9$, 所以 $d = 1$, 所以 $S_5 = 20$. 故选 C.

6. 执行下面的程序框图, 输出的 $B =$



A. 21

B. 34

C. 55

D. 89

【参考解析】顺着算下去知选 B, 其实本题考查了简单的斐波那契数列

7. 设 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 的两个焦点, 点 P 在 C 上, 若 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, 则 $|\overrightarrow{PF_1}| \cdot |\overrightarrow{PF_2}| =$

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

C. 4

D. 5

【参考解析】由焦点三角形面积公式和等面积法得

$$b^2 \tan 45^\circ = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| \Rightarrow |PF_1| \cdot |PF_2| = 2, \text{ 故选 B.}$$

8. 曲线 $y = \frac{e^x}{x+1}$ 在点 $(1, \frac{e}{2})$ 处的切线方程为

A. $y = \frac{e}{4}x$

B. $y = \frac{e}{2}x$

C. $y = \frac{e}{4}x + \frac{e}{4}$

D. $y = \frac{e}{2}x + \frac{3e}{4}$

【参考解析】显然 AD 不满足点 $(1, \frac{e}{2})$, 排除;

$$y' = \frac{e^x \times (x+1) - e^x \times 1}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}, \text{ 所以 } k = \frac{e}{(1+1)^2} = \frac{e}{4}, \text{ 故选 C.}$$

9. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{5}$, 其中一条渐近线与圆 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

【参考解析】易知渐近线方程为 $y = \pm 2x$, 所以心线距 $d = \frac{1}{\sqrt{5}}$,由弦长公式得 $|AB| = 2\sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, 故选 D10. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, $PA = PB = 2$, $PC = \sqrt{6}$, 则该棱锥的体积为

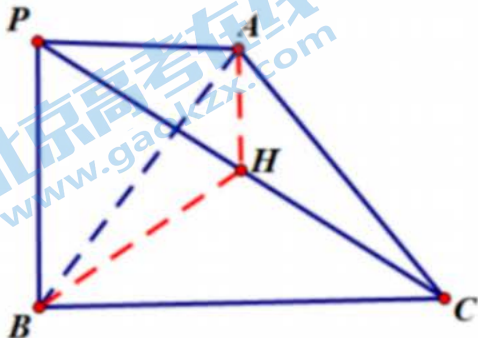
A. 1

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. 3

【参考解析】



如图,取 PC 中点为 H , 易知 $PC \perp$ 平面 ABH ,
所以由割补法易知

$$V = V_{P-ABH} + V_{C-ABH} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABH} \cdot PH + \frac{1}{3} S_{\triangle ABH} \cdot CH = \frac{1}{3} S_{\triangle ABH} \cdot PC,$$

代入数据计算得 $V=1$, 故选 A.

11. 已知函数 $f(x) = e^{-(x-1)^2}$. 记 $a = f(\frac{\sqrt{2}}{2})$, $b = f(\frac{\sqrt{3}}{2})$, $c = f(\frac{\sqrt{6}}{2})$, 则

A. $b > c > a$

B. $b > a > c$

C. $c > b > a$

D. $c > a > b$

【参考解析】典型的去括号法.

由复合函数单调性易知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单增, 在 $(1, +\infty)$ 单减, 且关于轴 $x=1$ 对称;

$$\text{而 } \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right| \approx 0.3, \left| \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right| \approx 0.15, \left| \frac{\sqrt{6}}{2} - 1 \right| \approx 0.2,$$

所以 $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) < f(\frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow a < c < b$, 故选 A;

12. 已知 $f(x)$ 为函数 $y = \cos(2x + \frac{\pi}{6})$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位所得函数, 则 $y = f(x)$ 与

$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 的交点个数为

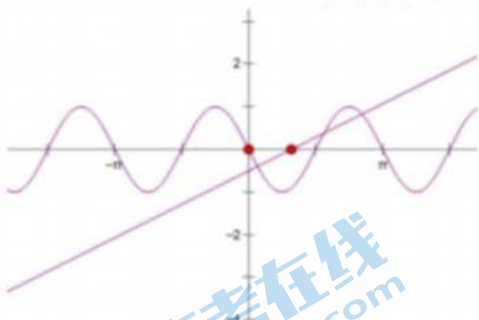
A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【参考解析】易知 $y = f(x) = -\sin 2x$, 画个图



知有 3 个交点, 故选 C.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $8S_6 = 7S_3$, 则 $\{a_n\}$ 的公比为_____.

【参考解析】显然 $q \neq 1$, 依题有

$$8(1 - q^6) = 7(1 - q^3) \Rightarrow 8(1 + q^3)(1 - q^3) = 7(1 - q^3) \Rightarrow 8(1 + q^3) = 7 \Rightarrow q^3 = -\frac{1}{8} \Rightarrow q = -\frac{1}{2}$$

14. 若 $f(x) = (x-1)^2 + ax + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 为偶函数, 则 $a =$ _____.

【参考解析】 $y = x^2 + (a-2)x + 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

则所有的奇次项系数均为 0, 故 $a-2=0 \Rightarrow a=2$.

15. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} -2x+3y \leq 3 \\ 3x-2y \leq 3 \\ x+y \geq 1 \end{cases}$, 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值为 _____.

【参考解析】由线性规划易知 $A(3,3)$, $z_1 = 15$; $B(0,1)$, $z_2 = 2$; $C(1,0)$, $z_3 = 3$; 经验证知答案为 15.

15. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=4$, O 为 AC_1 的中点, 若该正方体的棱与球 O 的球面有公共点, 则球 O 的半径的取值范围是 _____.

【参考解析】棱切球半径为 $2\sqrt{2}$, 外接球半径为 $2\sqrt{3}$, 故球 O 的半径的取值范围是 $[2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}]$.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题,

每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (12 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{\cos A} = 2$.

(1) 求 bc ;

(2) 若 $\frac{a \cos B - b \cos A}{a \cos B + b \cos A} - \frac{b}{c} = 1$, 求 $\triangle ABC$ 面积.

【参考解析】

(1) 因为 $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{\cos A} = 2$, 由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 得 $\frac{2bc \cos A}{\cos A} = 2 \Rightarrow bc = 1$, 所以 $bc = 1$.

(2) 因为 $\frac{a \cos B - b \cos A}{a \cos B + b \cos A} - \frac{b}{c} = 1$, 所以由余弦定理得 $a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - \frac{b}{c} = 1$,

$$\text{即 } \frac{a^2 - b^2}{c^2} - \frac{b}{c} = 1 \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = -bc,$$

$$\text{即 } 2bc \cos A = -bc, \text{ 所以 } \cos A = -\frac{1}{2},$$

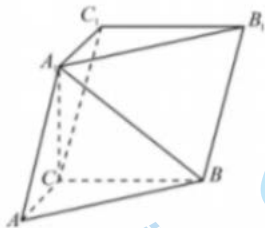
$$\text{因为 } 0 < A < \pi, \text{ 所以 } A = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{设 } \triangle ABC \text{ 面积为 } S, \text{ 所以 } S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{故 } \triangle ABC \text{ 面积为 } \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

18. (12分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $A_1C \perp$ 平面 ABC , $\angle ACB = 90^\circ$,



(1) 证明: 平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 BB_1C_1C ;

(2) 设 $AB=A_1B$, $AA_1=2$, 求四棱锥 $A_1-BB_1C_1C$ 的高.

【参考解析】

(1) 因为 $A_1C \perp$ 平面 ABC , 而 $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $A_1C \perp BC$, 又因为 $\angle ACB = 90^\circ$, 所以 $AC \perp BC$, 而 $A_1C \cap AC = C$, 所以 $A_1C, AC \subset$ 平面 ACC_1A_1 , $BC \not\subset$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 又因为 $BC \subset$ 平面 BB_1C_1C , 所以平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 BB_1C_1C .

(2) 由 (1) 知 $A_1C \perp BC$, $AC \perp BC$, 所以 $A_1B^2 = A_1C^2 + BC^2$, $AB^2 = AC^2 + BC^2$, 又由题知 $AB=A_1B$, 所以 $A_1C = AC$, 因为 $A_1C \perp$ 平面 ABC , $AC \subset$ 平面 ABC , 所以 $A_1C \perp AC$, 所以三角形 AA_1C 是等腰直角三角形, 取 CC_1 中点为 H , 连接 A_1H , 则 $A_1H \perp CC_1$, 由 (1) 知 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 而 $A_1H \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $A_1H \perp BC$, 而 $BC \cap CC_1 = C$, 所以 $A_1H \perp$ 平面 BB_1C_1C , 所以四棱锥 $A_1-BB_1C_1C$ 的高即为 A_1H , 而三角形 CA_1C_1 是等腰直角三角形, 所以 $A_1H = \frac{CC_1}{2} = \frac{AA_1}{2} = 1$. 故四棱锥 $A_1-BB_1C_1C$ 的高为 1.

19. (12分)

一项试验旨在研究臭氧效应, 试验方案如下: 选 40 只小白鼠, 随机地将其中 20 只分配到试验组, 另外 20 只分配到对照组, 试验组的小白鼠饲养在高浓度臭氧环境, 对照组的小白鼠饲养在正常环境, 一段时间后统计每只小白鼠体重的增加量 (单位: g). 试验结果如下:

对照组的小白鼠体重的增加量从小到大排序为

15.2 18.8 20.2 21.3 22.5 23.2 25.8 26.5 27.5 30.1
32.6 34.3 34.8 35.6 35.6 35.8 36.2 37.3 40.5 43.2

试验组的小白鼠体重的增加量从小到大排序为

7.8 9.2 11.4 12.4 13.2 15.5 16.5 18.0 18.8 19.2
19.8 20.2 21.6 22.8 23.6 23.9 25.1 28.2 32.3 36.5

(1) 计算试验组的样本平均数;

(2) (i) 求 40 只小白鼠体重的增加量的中位数 m , 再分别统计两样本中小于 m 与不小于 m 的数据的个数, 完成如下列联表

	$< m$	$\geq m$
对照组		
试验组		

(ii) 根据 (i) 中的列联表, 能否有 95% 的把握认为小白鼠在高浓度臭氧环境中与在正常环境中体重的增加量有差异?

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

【参考解析】

(1) 试验组的样本平均数

$$\bar{x} = \frac{7.8+9.2+11.4+12.4+13.2+15.5+16.5+18.0+18.8+19.2+19.8+20.2+21.6+22.8+23.6+23.9+25.1+28.2+32.3+36.5}{20} = \frac{396}{20} = 19.8,$$

所以试验组的样本平均数为 19.8.

(2)

(i) 将两组数据重新按照从小到大的顺序排列, 第 20 个数据为 23.2, 第 20 个数据为 23.6,

$$\text{所以中位数 } m = \frac{23.2+23.6}{2} = 23.4,$$

因此对照组中小于 m 的有 6 个, 大于 m 的有 14 个,

因此试验组中小于 m 的有 14 个, 大于 m 的有 6 个,

所以列联表为

	$< m$	$\geq m$
对照组	6	14
实验组	14	6

$$(ii) K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{40 \times (6 \times 6 - 14 \times 14)^2}{20 \times 20 \times 20 \times 20} = 6.400 > 3.841.$$

所以有 95% 的把握认为药物对小鼠生长有抑制作用.

20. (12分)

$$\text{已知函数 } f(x) = ax - \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

(1) 当 $a=1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x) + \sin x < 0$, 求 a 的取值范围.

【参考解析】

(1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$f'(x) = 1 - \frac{\cos x \cos^2 x - \sin x \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x + 2)}{\cos^3 x}.$$

因为 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $f'(x) < 0$ 恒成立,

所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减.

(2) $f(x) + \sin x < 0$ 恒成立, 即 $ax - \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \sin x < 0$ 恒成立,

令 $g(x) = ax - \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \sin x$, 则 $g'(x) = a - \frac{2 - \cos^2 x}{\cos^3 x} + \cos x$,

$$g'(0) = a,$$

令 $t = \cos x \in (0, 1)$, 再令 $h(t) = -\frac{2-t^2}{t^3} + t = \frac{t^4 + t^2 - 2}{t^3}$,

$$\text{则 } h'(t) = \frac{t^4 - t^2 + 6}{t^4} = \frac{(t^2 + 2)(t^2 - 3)}{t^4} < 0,$$

所以 $g'(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,

当 $a > 0$ 时, $g'(0) = a > 0$, 当 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow -\infty$,

所以存在唯一的零点 x_1 , 使得 $g'(x_1) = 0$.

则当 $0 < x < x_1$ 时, $g(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递增, 则 $g(x) > g(0) = 0$, 不满足;

当 $a \geq 0$ 时, $g'(x) \leq g'(0) = a \leq 0$,

所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 所以 $g(x) < g(0) = 0$, 满足;

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.

21. 直线 $x-2y+1=0$ 与 $C: y^2=2px (p>0)$ 交于 A, B 两点, $|AB|=4\sqrt{15}$.

(1) 求 p 的值.

(2) F 为 $y^2=2px$ 的焦点, M, N 为抛物线上两点, 且满足 $\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{NF} = 0$, 求 $\triangle MNF$ 面积的最小值.

【参考解析】

(1) 联立 $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ y^2=2px \end{cases}$ 消 y 得 $x^2+(2-8p)x+1=0$.

显然 $\Delta > 0$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $x_1+x_2=8p-2$, $x_1x_2=1$,

由弦长公式得 $|AB| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = 4\sqrt{15}$.

代入计算得 $p=2$, 所以 p 的值为 2.

(2) 设 MF 与 x 轴正半轴的夹角为 θ ,

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 易知 $S_{\triangle MNF} = 1$;

当 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ 时, 由对称性, 不妨设 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$,

设 $M(x_3, y_3)$, $N(x_4, y_4)$, 则由几何关系得 $\cos \theta = \frac{\left|x_3 - \frac{p}{2}\right|}{|MF|}$, ①

又由抛物线定义知 $|MF| = x_3 + \frac{p}{2}$, ②

联立①②得 $|MF| = \frac{p}{1 \pm \cos \theta}$, 因为要求面积最小值, 所以取 $|MF| = \frac{p}{1 + \cos \theta} = \frac{2}{1 + \cos \theta}$,

因为 $\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{NF} = 0$, 所以 $MF \perp NF$, 所以 $|NF| = \frac{p}{1 + \cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right)}$,

同样因为要求面积最小值, 所以 $|NF| = \frac{p}{1 + \sin \theta} = \frac{2}{1 + \sin \theta}$,

所以 $S_{\triangle MNF} = \frac{1}{2} \times |MF| \times |NF| = \frac{2}{(1 + \cos \theta)(1 + \sin \theta)} = \frac{2}{1 + \sin \theta + \cos \theta + \sin \theta \cos \theta}$.

令 $\sin \theta + \cos \theta = t = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$, 因为 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $t = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \in (1, \sqrt{2}]$.

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息.

平方得 $\sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2}$,

所以 $1 + \sin \theta + \cos \theta + \sin \theta \cos \theta = 1 + t + \frac{t^2 - 1}{2} = \frac{(t+1)^2}{2}$,

显然当 $t = \sqrt{2}$ 时, $y = \frac{(t+1)^2}{2}$ 取得最大值, 则 $S_{\triangle MNF}$ 取得最小值,

且最小值为 $\frac{2}{(\sqrt{2}+1)^2} = 4(3-2\sqrt{2})$.

当且仅当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 或 $\theta = \frac{3\pi}{4}$ 时取得等号.

综上, $\triangle MNF$ 面积的最小值为 $4(3-2\sqrt{2})$.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22 已知 $P(2,1)$, 直线 $l: \begin{cases} x=2+t\cos\alpha \\ y=1+t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数), l 与 x 轴、 y 轴正半轴交于 A, B 两

点, $|PA| \cdot |PB| = 4$.

(1) 求 α 的值;

(2) 以原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求 l 的极坐标方程.

【答案速递】

(1) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$;

(2) $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta - 3 = 0$;

23. 已知 $f(x) = 2|x-a| - a, a > 0$.

(1) 解不等式 $f(x) < x$;

(2) 若 $y = f(x)$ 与坐标轴围成的面积为 2, 求 a .

【答案速递】

(1) $\left[\frac{a}{3}, 3a\right]$;

(2) $a = 2$;

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

Q 北京高考资讯