

2020 北京石景山高一（上）期末

数 学

学校_____ 姓名_____ 学号_____

本试卷共 5 页，满分为 100 分，考试时间为 120 分钟。请务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效，考试结束后上交答题卡。

第 I 卷（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} | x < 3\}$, 那么集合 $A \cup B$ 等于

- A. $[-1, 3)$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

2. 若某群体中的成员只用现金支付的概率为 0.15, 既用现金支付也用非现金支付的概率为 0.35, 则仅用非现金支付的概率为

- A. 0.2 B. 0.4 C. 0.5 D. 0.8

3. 中学生在家务劳动中能更密切地与家人接触交流, 也可缓解压力、休息大脑. 经调查, 某校学生有 70% 的学生认为自己参与家务劳动能使家庭关系更融洽, 30% 的学生认为自己是否参与家务劳动对家庭关系无影响.

现为了调查学生参加家务劳动时长情况, 决定在两类同学中利用分层抽样的方法抽取 100 名同学参与调查, 那么需要抽取认为自己参与家务劳动能使家庭关系更融洽的同学的个数是

- A. 30 B. 70 C. 80 D. 100

4. 从含有 2 件正品和 1 件次品的产品中任取 2 件, 恰有 1 件次品的概率是

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

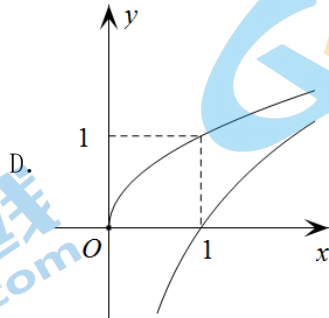
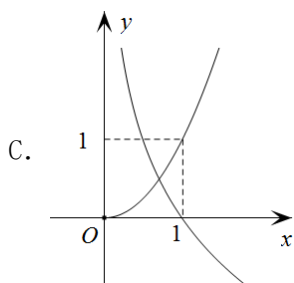
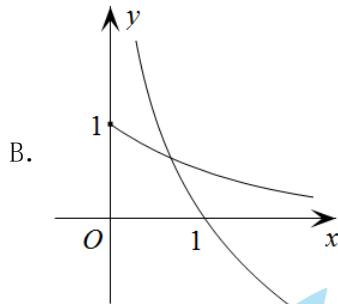
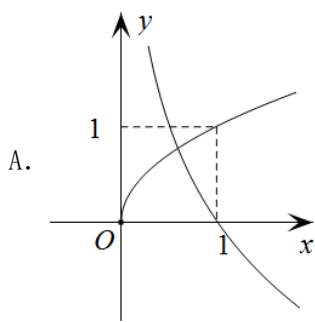
5. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ 的定义域是

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-1, +\infty)$ C. $[-1, +\infty)$ D. $[-1, 1) \cup (1, +\infty)$

6. 下列函数中, 既是偶函数又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的是

- A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = -x^2 + 1$ C. $y = e^{-x}$ D. $y = \lg|x|$

7. 在同一直角坐标系中, 函数 $f(x) = x^a (x \geq 0)$, $g(x) = \log_a x$ 的图像可能是



8. 池塘里浮萍的生长速度极快，它覆盖池塘的面积，每天可增加原来的一倍。若一个池塘在第 30 天时，刚好被浮萍盖满，则浮萍覆盖池塘一半的面积是

- A. 第 15 天 B. 第 20 天 C. 第 25 天 D. 第 29 天

9. 已知向量 $\mathbf{a} = (4, x)$ ， $\mathbf{b} = (x, 1)$ ，那么 “ $x = 2$ ” 是 “ $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ ” 的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

10. 甲、乙两人在一次射击比赛中各射靶 5 次，两人成绩的统计表如下表所示，则

甲

环数	4	5	6	7	8
频数	1	1	1	1	1

乙

环数	5	6	9
频数	3	1	1

有以下四种说法：

- ①甲成绩的平均数小于乙成绩的平均数； ②甲成绩的中位数等于乙成绩的中位数；
③甲成绩的方差小于乙成绩的方差； ④甲成绩的极差小于乙成绩的极差。

其中正确命题的个数是

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

(注： $s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$ ，其中 $\bar{x}$ 为数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数)

第 II 卷（非选择题 共 60 分）

二、填空题：本大题共 4 个小题，每小题 3 分，共 12 分。

11. 在平行四边形 $ABCD$ 中，已知向量 $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$ ， $\overrightarrow{AD} = (2, 3)$ ，则 $\overrightarrow{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 已知函数 $f(x)$ 是指数函数，如果 $f(3) = 9f(1)$ ，那么 $f(8) \underline{\hspace{1cm}} f(4)$ （请在横线上填写 “ $>$ ”， “ $=$ ” 或 “ $<$ ”）

13. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 20$, 则 $\lg a + \lg b$ 的最大值为_____.

14. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 - 2x$. 若关于 x 的方程 $f(x) - m = 0$ 有四个不同的实数解, 则实数 m 的取值范围是_____.

三、解答题: 本大题共 6 个小题, 共 48 分. 应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 8 分)

设非空集合 $A = \{x \mid a - 1 < x < 2a, a \in \mathbf{R}\}$, 不等式 $x^2 - 2x - 8 < 0$ 的解集为 B .

(I) 当 $a = 0$ 时, 求集合 A, B ;

(II) 当 $A \subseteq B$ 时, 求实数 a 的取值范围.

16. (本题满分 8 分)

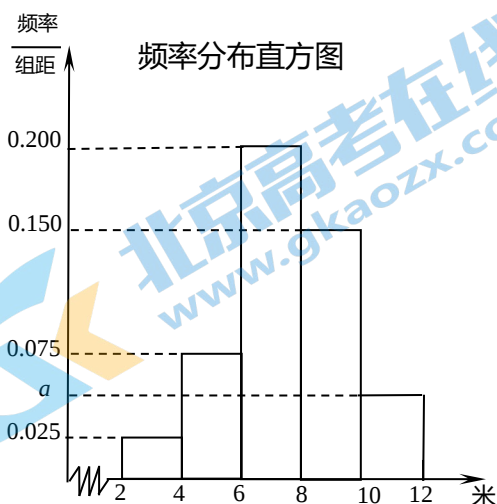
某商场举行有奖促销活动, 顾客购买一定金额的商品后即可抽奖, 已知甲箱装有 2 个红球 A_1, A_2 和 1 个白球 B , 乙箱装有 2 个红球 a_1, a_2 和 2 个白球 b_1, b_2 , 从甲、乙两箱中各随机摸出 1 个球, 若摸出的 2 个球都是红球则中奖, 否则不中奖.

(I) 写出样本空间;

(II) 有人认为: 两个箱子中的红球都不比白球少, 所以中奖的概率大于不中奖的概率, 你认为正确吗? 请说明理由.

17. (本题满分 8 分)

为了解某市今年初二年级男生的身体素质状况，从该市初二年级男生中抽取了一部分学生进行“掷实心球”的项目测试. 经统计，成绩均在 2 米到 12 米之间，把获得的所有数据平均分成 $[2, 4), [4, 6), [6, 8), [8, 10), [10, 12]$ 五组，得到频率分布直方图如图所示.



(I) 如果有 4 名学生的成绩在 10 米到 12 米之间，求参加“掷实心球”项目测试的人数；

(II) 若测试数据与成绩之间的关系如下表：

测试数据 (单位：米)	$(0, 6)$	$[6, 8)$	$[8, 12)$
成绩	不合格	及格	优秀

根据此次测试成绩的结果，试估计从该市初二年级男生中任意选取一人，“掷实心球”成绩为优秀的概率.

(III) 在 (II) 的条件下，从该市初二年级男生中任意选取两人，假定两人的成绩是否优秀之间没有影响，求两人中恰有一人“掷实心球”成绩为优秀的概率.

18. (本题满分 8 分)

已知函数 $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$.

(I) 判断函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的单调性，并用定义证明其结论；

(II) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[2, 9]$ 上的最大值与最小值.

19. (本题满分 8 分)

已知函数 $f(x) = \log_a(2+x) - \log_a(2-x)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$).

(I) 求函数 $f(x)$ 的定义域；

(II) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性；

(III) 解关于 x 的不等式 $f(x) \geq \log_a(3x)$.

20. (本题满分 8 分)

某群体的人均通勤时间，是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时，某地上班族 S 中的成员仅以自驾或公交方式通勤，分析显示：当 S 中 $x\%$ ($0 < x < 100$) 的成员自驾时，自驾群体的人均通勤时间 y_1 (单位：分钟) 为

$$y_1 = \begin{cases} 30, & 0 < x \leq 30, \\ 2x + \frac{1800}{x} - 90, & 30 < x < 100, \end{cases}$$

而公交群体的人均通勤时间不受 x 影响，恒为 40 分钟.

试根据上述分析结果回答下列问题：

(I) 当 x 在什么范围内时，公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间？

(II) 求该地上班族 S 的人均通勤时间 $g(x)$ 的表达式；讨论 $g(x)$ 的单调性，并说明其实际意义.

2020 北京石景山高一（上）期末数学

参考答案

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	C	B	D	D	B	A	D	A	A

二、填空题：本大题共 4 个小题，每小题 3 分，共 12 分。

11. (3,5) ; 12. > ; 13. 2 ; 14. (-1,0).

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 48 分。

15. （本小题 8 分）

解：（I）当 $a=0$ 时， $A=(-1,0)$,2 分

解不等式 $x^2 - 2x - 8 < 0$, 得 $-2 < x < 4$,

即 $B=(-2,4)$4 分

$$\text{(II) 若 } A \subseteq B, \text{ 则有: } \begin{cases} 2a > a-1, & \text{①} \\ a-1 \geq -2, & \\ 2a \leq 4. & \text{②} \end{cases}$$

解得 $-1 < a \leq 2$8 分

16. （本小题 8 分）

解：（I）用 (A_1, a_1) 表示从甲箱中摸出红球 A_1 ，从乙箱中摸出红球 a_1 ，其他的样本点用类似的方法表示，可得样本空间

$$\Omega = \{(A_1, a_1), (A_1, a_2), (A_1, b_1), (A_1, b_2), (A_2, a_1), (A_2, a_2), (A_2, b_1), (A_2, b_2), (B, a_1), (B, a_2), (B, b_1), (B, b_2)\}$$

共包含 12 个样本点.4 分

（II）不正确，理由如下：

设中奖为事件 C ，则 $C = \{(A_1, a_1), (A_1, a_2), (A_2, a_1), (A_2, a_2)\}$ ，

C 包含的样本点个数为 4，6 分

所以中奖的概率为 $P(C) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ ，

不中奖的概率为 $P(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > \frac{1}{3}$.

故这种说法不正确.

……8 分

17. (本小题 8 分)

解: (I) 由题意可知 $(0.2 + 0.15 + 0.075 + a + 0.025) \times 2 = 1$, 解得 $a = 0.05$.

所以此次测试总人数为 $\frac{4}{0.05 \times 2} = 40$.

故此次参加“掷实心球”的项目测试的人数为 40 人.

……3 分

(II) 设“从该市初二年级男生中任意选取一人, “掷实心球”成绩为优秀”为事件 A .

由图可知, 参加此次“掷实心球”的项目测试的初二男生,

成绩优秀的频率为 $(0.15 + 0.05) \times 2 = 0.4$,

则估计 $P(A) = 0.4$.

……5 分

(III) 记事件 A_i : 第 i 名男生成绩优秀, 其中 $i = 1, 2$.

两人中恰有一人成绩优秀可以表示为 $A_1 \bar{A}_2 + A_2 \bar{A}_1$,

因为 $A_1, \bar{A}_2$ 相互独立, $A_2, \bar{A}_1$ 相互独立,

所以 $P(A_1 \bar{A}_2) = P(A_1)P(\bar{A}_2) = 0.24$, $P(A_2 \bar{A}_1) = P(A_2)P(\bar{A}_1) = 0.24$,

又因为 $A_1 \bar{A}_2, A_2 \bar{A}_1$ 互斥,

所以 $P(A_1 \bar{A}_2 + A_2 \bar{A}_1) = P(A_1 \bar{A}_2) + P(A_2 \bar{A}_1) = 0.48$.

所以两人中恰有一人“掷实心球”成绩为优秀的概率为 0.48.

……8 分

18. (本小题 8 分)

解: (I) $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数.

……1 分

证明如下:

任取 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{2x_1 - 3}{x_1 + 1} - \frac{2x_2 - 3}{x_2 + 1} = \frac{5(x_1 - x_2)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)},$$

因为 $x_1 - x_2 < 0$, $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$,

所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

……5 分

(II) 由(I)知函数 $f(x)$ 在区间 $[2,9]$ 上是增函数,

故函数 $f(x)$ 在区间 $[2,9]$ 上的最大值为 $f(9) = \frac{3}{2}$, 最小值为 $f(2) = \frac{1}{3}$8分

19. (本小题 8 分)

解: (I) 要是函数有意义, 则 $\begin{cases} 2+x > 0, \\ 2-x > 0, \end{cases}$ 1分

解得 $-2 < x < 2$,

故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$2分

(II) $\forall x \in (-2,2), -x \in (-2,2)$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log_a(2-x) - \log_a(2+x) \\ &= -[\log_a(2+x) - \log_a(2-x)] = -f(x) \end{aligned} \quad \text{.....3分}$$

所以函数 $f(x)$ 为奇函数.4分

$$(III) f(x) = \log_a(2+x) - \log_a(2-x) = \log_a \frac{2+x}{2-x},$$

所以, 不等式 $f(x) \geq \log_a 3x$ 可化为 $\log_a \frac{2+x}{2-x} \geq \log_a 3x$.

当 $0 < a < 1$ 时, $0 < \frac{2+x}{2-x} \leq 3x$, 解得 $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$;6分 当 $a > 1$ 时,

$\frac{2+x}{2-x} \geq 3x > 0$, 解得 $0 < x \leq \frac{2}{3}$ 或 $1 \leq x < 2$8分

20. (本题 8 分)

解: (I) 当 $0 < x \leq 30$ 时, $y_1 = 30 < 40$ 恒成立,

公交群体的人均通勤时间不可能少于自驾群体的人均通勤时间;1分

当 $30 < x < 100$ 时, 若 $40 < y_1$, 即 $2x + \frac{1800}{x} - 90 > 40$,2分

解得 $x < 20$ (舍) 或 $x > 45$;3分

所以, 当 $45 < x < 100$ 时, 公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间;4分

(II) 设该地上班族总人数为 n , 则自驾人数为 $n \cdot x\%$, 乘公交人数为 $n \cdot (1-x\%)$.

因此人均通勤时间

$$g(x) = \begin{cases} \frac{30 \cdot n \cdot x\% + 40 \cdot n \cdot (1 - x\%)}{n}, & 0 < x \leq 30 \\ \frac{(2x + \frac{1800}{x} - 90) \cdot n \cdot x\% + 40 \cdot n \cdot (1 - x\%)}{n}, & 30 < x < 100, \end{cases} \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{整理得: } g(x) = \begin{cases} 40 - \frac{x}{10}, & 0 < x \leq 30 \\ \frac{1}{50}(x - 32.5)^2 + 36.875, & 30 < x < 100, \end{cases}$$

则当 $x \in (0, 30] \cup (30, 32.5]$, 即 $x \in (0, 32.5]$ 时, $g(x)$ 单调递减;

当 $x \in (32.5, 100)$ 时, $g(x)$ 单调递增. \dots\dots 7 \text{ 分}

实际意义: 当有 32.5% 的上班族采用自驾方式时, 上班族整体的人均通勤时间最短.

适当的增加自驾比例, 可以充分的利用道路交通, 实现整体效率提升; 但自驾人数过多, 则容易导致交通拥堵, 使得整体效率下降.

\dots\dots 8 \text{ 分}

【若有不同解法, 请酌情给分】