北京市朝阳区 2017 ~ 2018 学年度第一学期高三年级期中统一考试

数学试卷(文史类)

2017. 11

(考试时间 120 分钟　　满分 150 分)

本试卷分为选择题(共 40 分)和非选择题(共 110 分)两部分

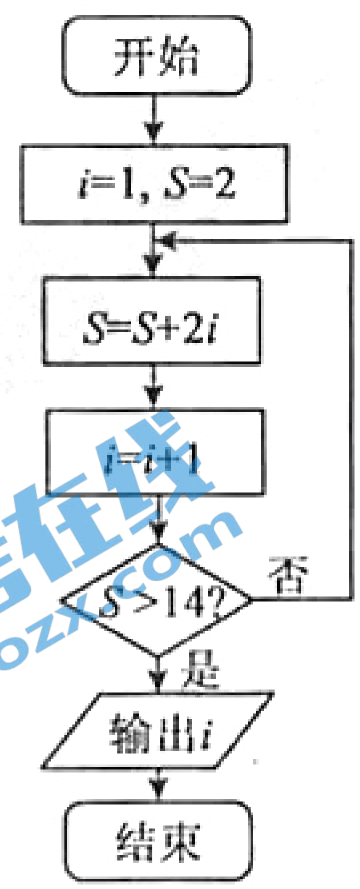
第一部分(选择题　共 40 分)

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x\mid x>1\}$, $B=\{x\mid \log_2 x>1\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{x\mid x>2\}$　　B. $\{x\mid 1<x<2\}$　　C. $\{x\mid x>1\}$　　D. $\{x\mid x>0\}$

2. 执行如右图所示程序框图,则输出 i 的值为



A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 6

3. 已知 m,n 表示两条不同的直线,α 表示平面,下列说法正确的是

A. 若 $m/\!/\alpha, n/\!/\alpha$,则 $m/\!/n$　　B. 若 $m/\!/\alpha, m\perp n$,则 $n\perp\alpha$

C. 若 $m\perp\alpha, m\perp n$,则 $n/\!/\alpha$　　D. 若 $m\perp\alpha, m/\!/n$,则 $n\perp\alpha$

4. 要得到函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象,只需将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有的点

A. 先向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度,再将横坐标伸长到原来的 2 倍,纵坐标不变

B. 先向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,再将横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍,纵坐标不变

C. 先将横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍,纵坐标不变,再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

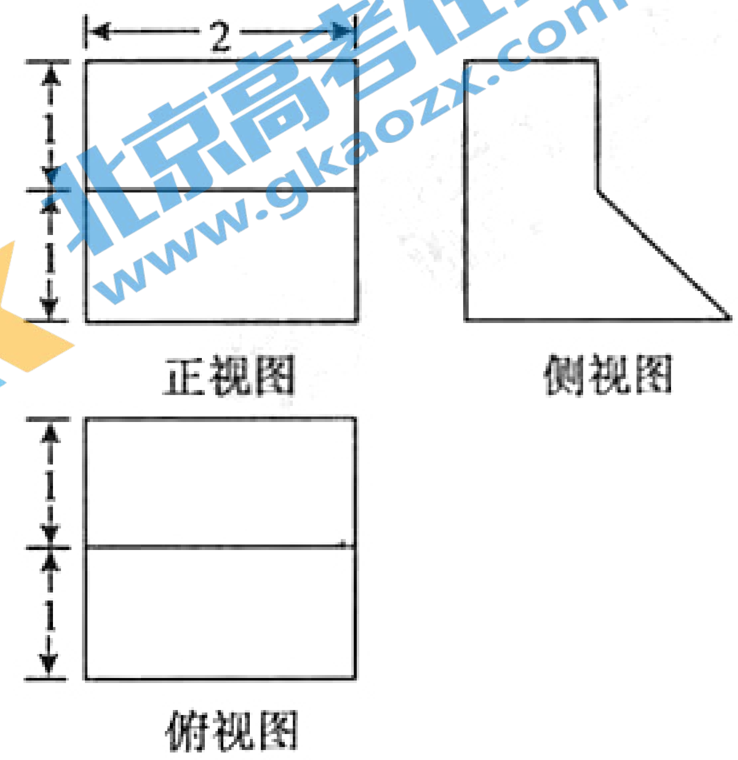
D. 先将横坐标伸长到原来的 2 倍,纵坐标不变,再向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

5. 已知非零平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$”是“存在非零实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 一个几何体的三视图如右图所示,则该几何体的体积为



A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

7. 若函数 $f(x)$ 在其定义域内满足 $xf'(x)+f(x)=e^x$(其中 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数),$f(1)=e$,则函数 $f(x)$

A. 有极大值,无极小值

B. 有极小值,无极大值

C. 既有极大值又有极小值

D. 既无极大值又无极小值

8. 袋子里有编号为 2,3,4,5,6 的五个球,某位教师从袋中任取两个不同的球. 教师把所取两球编号的和只告诉甲,其乘积只告诉乙,再让甲、乙分别推断这两个球的编号.

甲说:“我无法确定.”

乙说:“我也无法确定.”

甲听完乙的回答以后,甲说:“我现在可以确定两个球的编号了.”

根据以上信息,你可以推断出抽取的两球中

A. 一定有 3 号球　　B. 一定没有 3 号球

C. 可能有 5 号球　　D. 可能有 6 号球

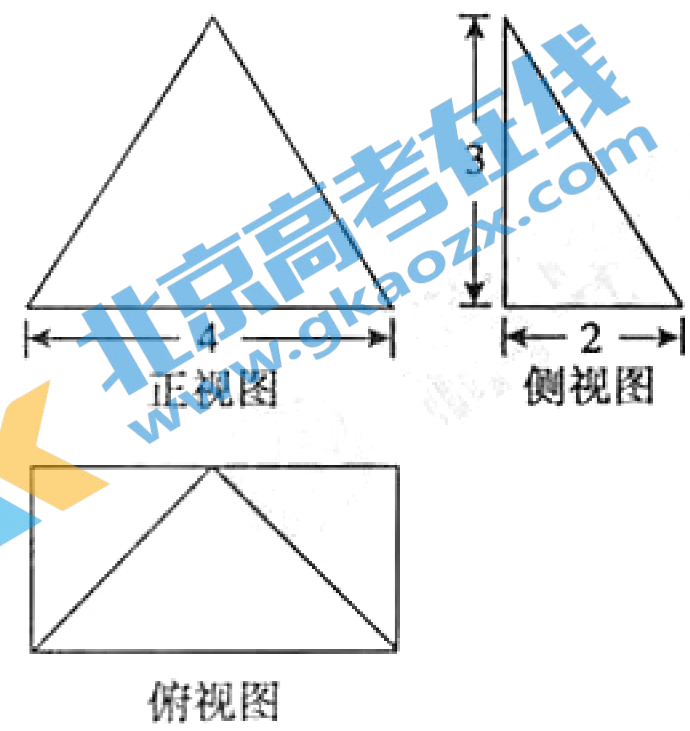
第二部分(非选择题　共 110 分)

二、填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分. 把答案填在答题卡上.

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列,$a_1=1$,$a_4=8$,则 $\{a_n\}$ 的前 5 项和 $S_5=$ ________.

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(0,1)$，将线段 OA 绕原点 O 按逆时针方向旋转 $60°$，得到线段 OB，则向量 $\overrightarrow{OB}$ 的坐标为________.

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x, 0<x<1,\\ 2^{-x}+1, x\geq 1.\end{cases}$ 若方程 $f(x)=m$ 有两个不相等的实数根，则实数 m 的取值范围是________.



12. 某四棱锥的三视图如图所示，该四棱锥的体积为________；表面积为________.

13. 某品牌连锁便利店有 n 个分店，A，B，C 三种商品在各分店均有销售.

这三种商品的单价和重量如表 1 所示：

表 1

	商品 A	商品 B	商品 C
单价(元)	15	20	30
每件重量(千克)	0.2	0.3	0.4

某日总店向各分店分配的商品 A，B，C 的数量如表 2 所示：

表 2

分店 商品	分店 1	分店 2	……	分店 n
A	12	20		m_1
B	15	20		m_2
C	20	15		m_3

表 3 表示该日分配到各分店去的商品 A，B，C 的总价和总重量：

表 3

	分店 1	分店 2	……	分店 n
总价(元)	a			
总重量(千克)				b

则 $a=$________；$b=$________.

14. 已知函数$f(x)$同时满足以下条件：

① 定义域为$\mathbf{R}$；

② 值域为$[0,2]$；

③ $f(x)-f(-x)=0$.

试写出一个函数$f(x)$的解析式________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.（本小题满分 13 分）

已知函数$f(x)=2\sin x\cos(x-\frac{\pi}{3})$.

（Ⅰ）求函数$f(x)$的最小正周期；

（Ⅱ）当$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，求函数$f(x)$的取值范围．

16.（本小题满分 13 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$S_n=2a_n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设数列$\{a_n\}$的前n项积为T_n，求T_n.

17.（本小题满分 13 分）

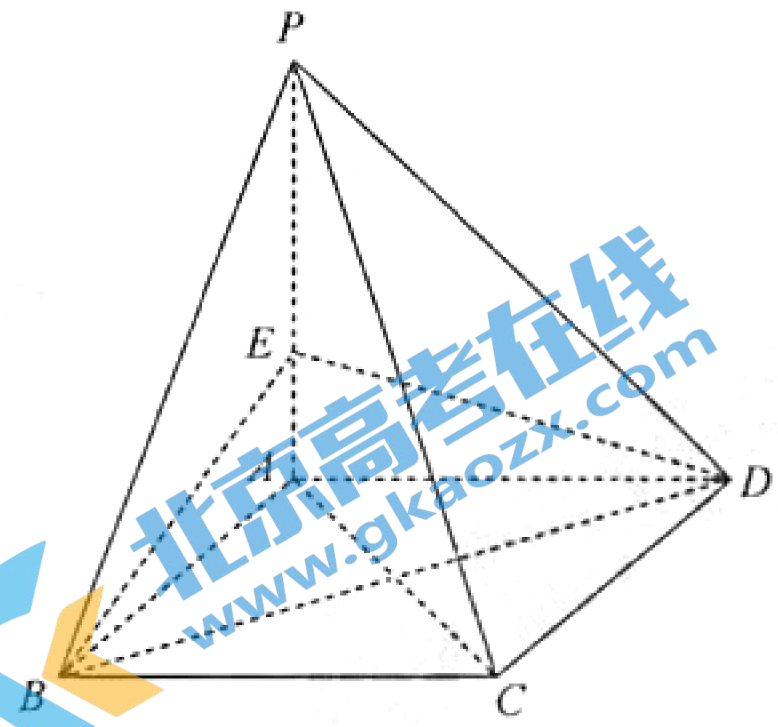
已知$\triangle ABC$中，$B=\frac{\pi}{3}$，$a=\sqrt{2}$.

（Ⅰ）若$b=\sqrt{3}$，求A；

（Ⅱ）若$\triangle ABC$的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，求b的值．

18.（本小题满分 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，E 是棱 PA 上的一个动点.



（Ⅰ）若 E 为 PA 的中点，求证：$PC//$ 平面 BDE；

（Ⅱ）求证：平面 $PAC\perp$ 平面 BDE；

（Ⅲ）若三棱锥 $P-BDE$ 的体积是四棱锥 $P-ABCD$ 体积的 $\frac{1}{3}$，求 $\frac{EA}{PA}$ 的值.

19.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=kx-\frac{1}{x}-(k+1)\ln x, k\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）当 $k>0$ 时，若函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内单调递减，求 k 的取值范围.

20.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{e^x}-\ln x-\frac{2}{ex}$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求证：$\ln x\geqslant -\frac{1}{ex}$；

（Ⅲ）判断曲线 $y=f(x)$ 是否位于 x 轴下方，并说明理由.

北京市朝阳区 2017-2018 学年度第一学期高三年级期中统一考试

数学学科参考答案（文史类）　　2017.11

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	C	A	A	B	D

二、填空题

题号	9	10	11	12	13	14
答案	31	$(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$	$(1,\frac{3}{2}]$	8； $14+4\sqrt{13}$	1080； $0.2m_1+0.3m_2+0.4m_3$	$y=2\lvert\cos x\rvert$ 或 $y=\cos x+1$ 或 $y=\frac{4\lvert x\rvert}{x^2+1}$ 等 （答案不唯一）

三、解答题

15.（本小题满分 13 分）

解：因为 $f(x)=2\sin x\cdot\cos(x-\frac{\pi}{3})$，

所以 $f(x)=2\sin x\cdot(\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3})$

$$=\sin x\cdot\cos x+\sqrt{3}\sin^2 x$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2x)$$

$$=\sin(2x-\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.　……………………………… 8 分

（Ⅱ）因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$.

所以 $\sin(2x-\frac{\pi}{3})\in[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$.

所以 $f(x)\in[0,1+\frac{\sqrt{3}}{2}]$.　……………………………… 13 分

16.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ） 由 $S_n=2a_n-1$ 可得，

当 $n=1$ 时，$a_1=1$.

当 $n\geq 2$ 时 $a_n=S_n-S_{n-1}$，$a_n=2a_n-2a_{n-1}$，即 $a_n=2a_{n-1}$

则数列$\{a_n\}$为首项为1，公比为2的等比数列，

即$a_n=2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　………………………………8分

（Ⅱ）$T_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=2^{0+1+2+3+\cdots+(n-1)}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$　　　………………………………13分

17.　（本小题满分13分）

（Ⅰ）解：由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，可得$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$.所以$\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

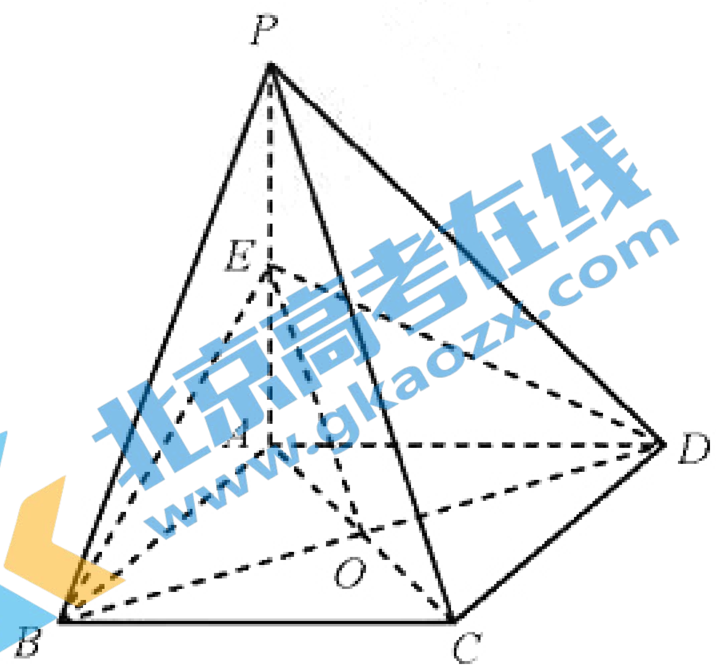
在三角形中，由已知$b>a$，所以$A=\dfrac{\pi}{4}$.　　　　　　　　　………………………………6分

（Ⅱ）由面积公式$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B$可得$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}c\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得$c=3\sqrt{2}$.

由余弦定理知$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=2+18-6=14$，所以$b=\sqrt{14}$

………………………………13分

18.　（本小题满分14分）



解：（Ⅰ）证明：如图，设AC交BD于O，连接EO.

因为底面$ABCD$是菱形，

所以O是AC的中点.

又因为E为PA的中点，

所以$EO\,//\,PC$.

因为$PC\not\subset$平面BDE，$EO\subset$平面BDE，

所以$PC\,//$平面BDE.　………………………4分

（Ⅱ）证明：因为底面$ABCD$是菱形，

所以$AC\perp BD$.

又因为$PA\perp$平面$ABCD$，$BD\subset$平面$ABCD$，

所以$PA\perp BD$.

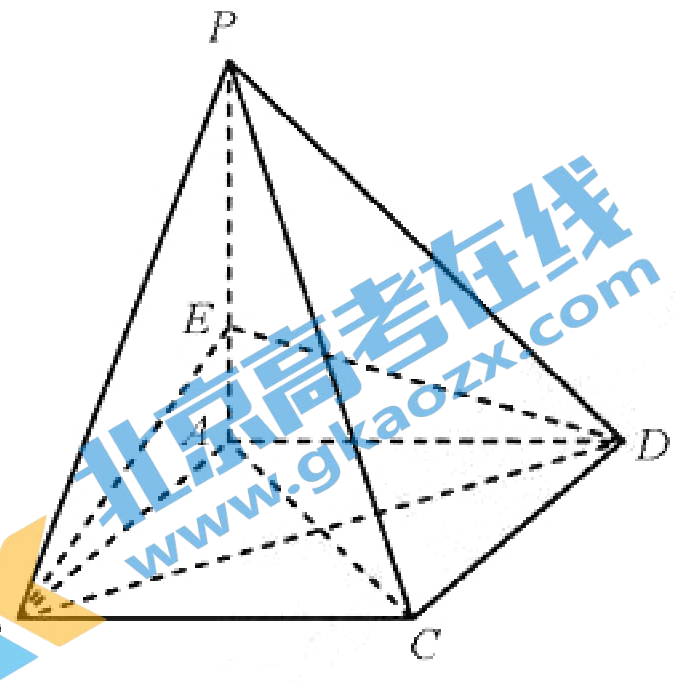
因为$PA\cap AC=A$，

所以$BD\perp$平面PAC.

因为$BD\subset$平面BDE，

所以平面$PAC\perp$平面BDE.　　　　　　………………………………10分

（III）设四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 V．



因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $V=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABCD}\cdot PA$．

又因为底面 $ABCD$ 是菱形，

所以 $S_{\Delta ABD}=S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABCD}$，

所以 $V_{P-ABD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABD}\cdot PA=\frac{1}{2}V$．

根据题意，$V_{P-BDE}=\frac{1}{3}V$，

所以 $V_{E-ABD}=V_{P-ABD}-V_{P-BDE}=\frac{1}{2}V-\frac{1}{3}V=\frac{1}{6}V$．

又因为 $V_{E-ABD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABD}\cdot EA$，

所以 $\frac{EA}{PA}=\frac{V_{E-ABD}}{V_{P-ABD}}=\frac{1}{3}$．　　　　　　　　　　　　………………………………14 分

19．（本小题满分 13 分）

解：（I）函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x>0\}$．

$$f'(x)=k-\frac{k+1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{kx^2-(k+1)x+1}{x^2}$$

$$=\frac{(kx-1)(x-1)}{x^2}$$

（1）当 $k\le 0$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<1$，此时函数 $f(x)$ 为单调递增函数；

令 $f'(x)<0$，解得 $x>1$，此时函数 $f(x)$ 为单调递减函数．

（2）当 $k>0$ 时，

①当 $\frac{1}{k}<1$，即 $k>1$ 时，

令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<\frac{1}{k}$ 或 $x>1$，此时函数 $f(x)$ 为单调递增函数；

令 $f'(x)<0$，解得 $\frac{1}{k}<x<1$，此时函数 $f(x)$ 为单调递减函数．

②当 $k=1$ 时，$f'(x)\ge 0$ 恒成立，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调递增函数；

③当 $\frac{1}{k}>1$，即 $0<k<1$ 时，

令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<1$ 或 $x>\frac{1}{k}$，此时函数 $f(x)$ 为单调递增函数；

令 $f'(x)<0$，解得 $1<x<\frac{1}{k}$，此时函数 $f(x)$ 为单调递减函数. ……………9 分

综上所述，

当 $k\le 0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$；

当 $0<k<1$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，$(\frac{1}{k},+\infty)$，单调递减区间为 $(1,\frac{1}{k})$；

当 $k=1$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$；

当 $k>1$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\frac{1}{k})$，$(1,+\infty)$，单调递减区间为 $(\frac{1}{k},+\infty)$.

（Ⅱ）$f'(x)=\frac{(kx-1)(x-1)}{x^2}$，

因为函数 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 内单调递减，所以不等式在 $\frac{(kx-1)(x-1)}{x^2}\le 0$ 在 $(1,2)$ 上成立.

设 $g(x)=(kx-1)(x-1)$，则 $\begin{cases} g(1)\le 0, \\ g(2)\le 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 0\le 0, \\ 2k-1\le 0, \end{cases}$ 解得 $0<k\le\frac{1}{2}$. …………13 分

20. （本小题满分 14 分）

解：函数的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=-\frac{1}{e^x}-\frac{1}{x}+\frac{2}{ex^2}$.

（Ⅰ）$f'(1)=\frac{1}{e}-1$，又 $f(1)=-\frac{1}{e}$，

曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为

$y+\frac{1}{e}=(\frac{1}{e}-1)x-\frac{1}{e}+1$，

即 $(\frac{1}{e}-1)x-y-\frac{2}{e}+1=0$. ……4 分

（Ⅱ）“要证明 $\ln x\ge -\frac{1}{ex}(x>0)$” 等价于 “$x\ln x\ge -\frac{1}{e}$”

设函数 $g(x)=x\ln x$.

令 $g'(x)=1+\ln x=0$，解得 $x=\frac{1}{e}$.