

海淀区高三年级第一学期期末练习

数 学

2020.01

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ， $A = \{1, 3, 5\}$ ， $B = \{2, 3, 4\}$ ，则集合 $A \cap \complement_U B$ 是

- (A) $\{1, 3, 5, 6\}$ (B) $\{1, 3, 5\}$ (C) $\{1, 3\}$ (D) $\{1, 5\}$

(2) 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点坐标为

- (A) $(0, 1)$ (B) $(1, 0)$ (C) $(0, -1)$ (D) $(-1, 0)$

(3) 下列直线与圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 相切的是

- (A) $y = -x$ (B) $y = x$ (C) $y = -2x$ (D) $y = 2x$

(4) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ ，且 $a > b$ ，则

- (A) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ (B) $\sin a > \sin b$ (C) $\left(\frac{1}{3}\right)^a < \left(\frac{1}{3}\right)^b$ (D) $a^2 > b^2$

(5) 在 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中， x^3 的系数为

- (A) -5 (B) 5 (C) -10 (D) 10

(6) 已知平面向量 a, b, c 满足 $a + b + c = \mathbf{0}$ ，且 $|a| = |b| = |c| = 1$ ，则 $a \cdot b$ 的值为

- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(7) 已知 α, β, γ 是三个不同的平面，且 $\alpha \cap \gamma = m$ ， $\beta \cap \gamma = n$ ，则“ $m \parallel n$ ”是“ $\alpha \parallel \beta$ ”的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(8) 已知等边 $\triangle ABC$ 边长为 3. 点 D 在 BC 边上，且 $BD > CD$ ， $AD = \sqrt{7}$. 下列结论中错误的是

- (A) $\frac{BD}{CD} = 2$ (B) $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = 2$ (C) $\frac{\cos \angle BAD}{\cos \angle CAD} = 2$ (D) $\frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CAD} = 2$

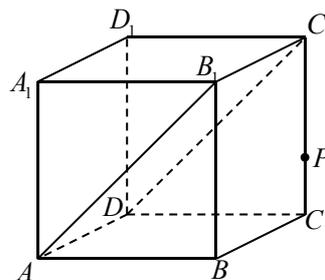
(9) 声音的等级 $f(x)$ (单位: dB) 与声音强度 x (单位: W/m^2) 满足 $f(x) = 10 \times \lg \frac{x}{1 \times 10^{-12}}$.

喷气式飞机起飞时, 声音的等级约为 140dB; 一般说话时, 声音的等级约为 60dB, 那么喷气式飞机起飞时声音强度约为一般说话时声音强度的

- (A) 10^6 倍 (B) 10^8 倍 (C) 10^{10} 倍 (D) 10^{12} 倍

(10) 若点 N 为点 M 在平面 a 上的正投影, 则记 $N = f_a(M)$. 如图,

在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 记平面 AB_1C_1D 为 b , 平面 $ABCD$ 为 g , 点 P 是棱 CC_1 上一动点 (与 C, C_1 不重合), $Q_1 = f_g[f_b(P)]$, $Q_2 = f_b[f_g(P)]$. 给出下列三个结论:



① 线段 PQ_2 长度的取值范围是 $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$;

② 存在点 P 使得 $PQ_1 \parallel$ 平面 b ;

③ 存在点 P 使得 $PQ_1 \perp PQ_2$.

其中, 所有正确结论的序号是

- (A) ①②③ (B) ②③ (C) ①③ (D) ①②

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

(11) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 5$, $a_5 = 2$, 则 $a_7 =$ _____.

(12) 若复数 $z = \frac{1+i}{i}$, 则 $|z| =$ _____.

(13) 已知点 $A(0, \sqrt{3})$, 点 B, C 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1$ ($a > 0$) 的左、右顶点. 若 $\triangle ABC$

为正三角形, 则该双曲线的离心率为 _____.

(14) 已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ 在区间 $(1, 4)$ 上存在最小值, 则实数 a 的取值范围是 _____.

(15) 用“五点法”作函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象时, 列表如下:

x	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	2	$\frac{11}{4}$
$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	0	2	0	-2	0

则 $f(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(0) + f(-\frac{1}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(16) 已知曲线 $C: x^4 + y^4 + mx^2y^2 = 1$ (m 为常数).

(i) 给出下列结论:

① 曲线 C 为中心对称图形;

② 曲线 C 为轴对称图形;

③ 当 $m = -1$ 时, 若点 $P(x, y)$ 在曲线 C 上, 则 $|x| \geq 1$ 或 $|y| \geq 1$.

其中, 所有正确结论的序号是 .

(ii) 当 $m > -2$ 时, 若曲线 C 所围成的区域的面积小于 π , 则 m 的值可以是 .

(写出一个即可)

三、解答题共 6 小题, 共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(17) (本小题共 13 分)

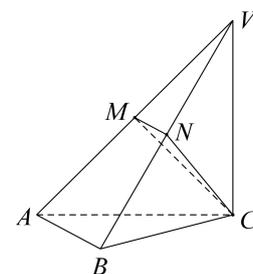
已知函数 $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x - \frac{1}{2}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(II) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, m]$ 上的最大值为 1, 求 m 的最小值.

(18) (本小题共 13 分)

如图, 在三棱锥 $V-ABC$ 中, 平面 $VAC \perp$ 平面 ABC , $\triangle ABC$ 和 $\triangle VAC$ 均是等腰直角三角形, $AB = BC$, $AC = CV = 2$, M, N 分别为 VA, VB 的中点.



(I) 求证: $AB \parallel$ 平面 CMN ;

(II) 求证: $AB \perp VC$;

(III) 求直线 VB 与平面 CMN 所成角的正弦值.

(19) (本小题共 13 分)

某市《城市总体规划(2016—2035 年)》提出到 2035 年实现“15 分钟社区生活圈”全覆盖的目标, 从教育与文化、医疗与养老、交通与购物、休闲与健身 4 个方面

构建“15分钟社区生活圈”指标体系，并依据“15分钟社区生活圈”指数高低将小区划分为：优质小区（指数为0.6~1）、良好小区（指数为0.4~0.6）、中等小区（指数为0.2~0.4）以及待改进小区（指数为0~0.2）4个等级。下面是三个小区4个方面指标的调查数据：

小区 指标值 权重	A 小区	B 小区	C 小区
教育与文化 (0.20)	0.7	0.9	0.1
医疗与养老 (0.20)	0.7	0.6	0.3
交通与购物 (0.32)	0.5	0.7	0.2
休闲与健身 (0.28)	0.5	0.6	0.1

注：每个小区“15分钟社区生活圈”指数 $T = w_1T_1 + w_2T_2 + w_3T_3 + w_4T_4$ ，其中 w_1, w_2, w_3, w_4 为该小区四个方面的权重， T_1, T_2, T_3, T_4 为该小区四个方面的指标值（小区每一个方面的指标值为0~1之间的一个数值）。

现有100个小区的“15分钟社区生活圈”指数数据，整理得到如下频数分布表：

分组	[0,0.2)	[0.2,0.4)	[0.4,0.6)	[0.6,0.8)	[0.8,1]
频数	10	20	30	30	10

- (I) 分别判断 A, B, C 三个小区是否是优质小区，并说明理由；
- (II) 对这100个小区按照优质小区、良好小区、中等小区和待改进小区进行分层抽样，抽取10个小区进行调查，若在抽取的10个小区中再随机地选取2个小区做深入调查，记这2个小区中为优质小区的个数为 ζ ，求 ζ 的分布列及数学期望。

(20) (本小题共14分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点 $A(2,0)$ ，且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

- (I) 求椭圆 C 的方程；
- (II) 设 O 为原点，过点 O 的直线 l 与椭圆 C 交于两点 P, Q，直线 AP 和 AQ 分别与直线 $x=4$ 交于点 M, N。求 $\triangle APQ$ 与 $\triangle AMN$ 面积之和的最小值。

(21) (本小题共13分)

已知函数 $f(x) = e^x(ax^2 + 1) (a > 0)$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 若函数 $f(x)$ 有极小值, 求证: $f(x)$ 的极小值小于 1.

(22) (本小题共 14 分)

给定整数 $n(n \geq 2)$, 数列 $A_{2n+1}: x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$ 每项均为整数, 在 A_{2n+1} 中去掉一项 x_k , 并将剩下的数分成个数相同的两组, 其中一组数的和与另外一组数的和之差的最大值记为 $m_k (k = 1, 2, \dots, 2n+1)$. 将 $m_1, m_2, \dots, m_{2n+1}$ 中的最小值称为数列 A_{2n+1} 的特征值.

(I) 已知数列 $A_5: 1, 2, 3, 3, 3$, 写出 m_1, m_2, m_3 的值及 A_5 的特征值;

(II) 若 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2n+1}$, 当 $[i - (n+1)][j - (n+1)] \geq 0$, 其中 $i, j \in \{1, 2, \dots, 2n+1\}$ 且 $i \neq j$ 时, 判断 $|m_i - m_j|$ 与 $|x_i - x_j|$ 的大小关系, 并说明理由;

(III) 已知数列 A_{2n+1} 的特征值为 $n-1$, 求 $\sum_{1 \leq i < j \leq 2n+1} |x_i - x_j|$ 的最小值.

海淀区 2020 届高三年级第一学期期末练习参考答案

数 学 2020.01

阅卷须知:

1.评分参考中所注分数, 表示考生正确做到此步应得的累加分数。

2.其它正确解法可以参照评分标准按相应步骤给分。

一、选择题: 本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	A	C	A	A	B	C	B	D

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

题号	11	12	13	14	15	16
----	----	----	----	----	----	----

答案	0	$\sqrt{2}$	2	(1,16)	-2; 0	①②③; $m > 2$ 均可
----	---	------------	---	--------	-------	-----------------

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

$$\begin{aligned}
 (17) \text{ 解: (I) } f(x) &= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \\
 &= \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).
 \end{aligned}$$

因为 $y = \sin x$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbf{Z})$,

$$\text{令 } 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{得 } x \in \left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z}).$$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

(II) 方法 1: 因为 $x \in [0, m]$,

$$\text{所以 } 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, 2m + \frac{\pi}{6}\right].$$

又因为 $x \in [0, m]$, $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的最大值为 1,

$$\text{所以 } 2m + \frac{\pi}{6} \geq \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{解得 } m \geq \frac{\pi}{6}.$$

所以 m 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$.

方法 2: 由 (I) 知:

当且仅当 $x = k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$ 时, $f(x)$ 取得最大值 1.

因为 $f(x)$ 在区间 $[0, m]$ 上的最大值为 1,

$$\text{所以 } m \geq \frac{\pi}{6}.$$

所以 m 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$.

(18) 解: (I) 在 $\triangle VAB$ 中, M, N 分别为 VA, VB 的中点,

所以 MN 为中位线.

所以 $MN \parallel AB$.

又因为 $AB \not\subset$ 平面 CMN , $MN \subset$ 平面 CMN ,

所以 $AB \parallel$ 平面 CMN .

(II) 在等腰直角三角形 $\triangle VAC$ 中, $AC = CV$,

所以 $VC \perp AC$.

因为平面 $VAC \perp$ 平面 ABC , 平面 $VAC \cap$ 平面

$ABC = AC$, $VC \subset$ 平面 VAC ,

所以 $VC \perp$ 平面 ABC .

又因为 $AB \subset$ 平面 ABC ,

所以 $AB \perp VC$.

(III) 在平面 ABC 内过点 C 做 CH 垂直于 AC ,

由 (II) 知, $VC \perp$ 平面 ABC ,

因为 $CH \subset$ 平面 ABC ,

所以 $VC \perp CH$.

如图, 以 C 为原点建立空间直角坐标系 $C-xyz$.

则 $C(0,0,0)$, $V(0,0,2)$, $B(1,1,0)$, $M(1,0,1)$, $N(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.

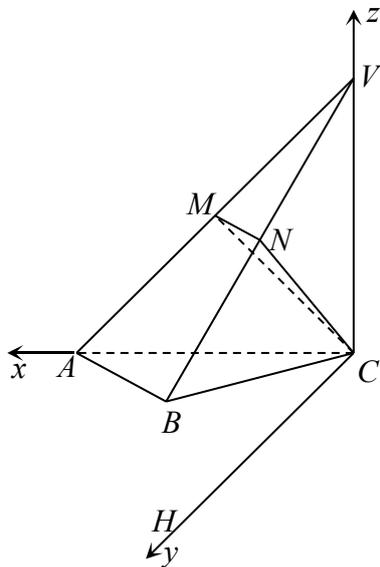
$\overline{VB} = (1,1,-2)$, $\overline{CM} = (1,0,1)$, $\overline{CN} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.

设平面 CMN 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overline{CM} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overline{CN} = 0. \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} x + z = 0, \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z = 0. \end{cases}$$

令 $x=1$ 则 $y=1$, $z=-1$,



所以 $n = (1, 1, -1)$.

直线 VB 与平面 CMN 所成角大小为 θ ,

$$\sin \theta = |\cos \langle n, \overrightarrow{VB} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{VB}|}{\|\mathbf{n}\| \|\overrightarrow{VB}\|} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

所以直线 VB 与平面 CMN 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(19) 解: (I) 方法 1:

$$A \text{ 小区的指数 } T = 0.7 \times 0.2 + 0.7 \times 0.2 + 0.5 \times 0.32 + 0.5 \times 0.28 = 0.58,$$

$0.58 < 0.60$, 所以 A 小区不是优质小区;

$$B \text{ 小区的指数 } T = 0.9 \times 0.2 + 0.6 \times 0.2 + 0.7 \times 0.32 + 0.6 \times 0.28 = 0.692,$$

$0.692 > 0.60$, 所以 B 小区是优质小区;

$$C \text{ 小区的指数 } T = 0.1 \times 0.2 + 0.3 \times 0.2 + 0.2 \times 0.32 + 0.1 \times 0.28 = 0.172,$$

$0.172 < 0.60$, 所以 C 小区不是优质小区.

方法 2:

$$A \text{ 小区的指数 } T = 0.7 \times 0.2 + 0.7 \times 0.2 + 0.5 \times 0.32 + 0.5 \times 0.28 = 0.58$$

$0.58 < 0.60$, 所以 A 小区不是优质小区;

$$B \text{ 小区的指数 } T = 0.9 \times 0.2 + 0.6 \times 0.2 + 0.7 \times 0.32 + 0.6 \times 0.28$$

$$> 0.6 \times 0.2 + 0.6 \times 0.2 + 0.6 \times 0.32 + 0.6 \times 0.28 = 0.6.$$

B 小区是优质小区;

$$C \text{ 小区的指数 } T = 0.1 \times 0.2 + 0.3 \times 0.2 + 0.2 \times 0.32 + 0.1 \times 0.28$$

$$< 0.6 \times 0.2 + 0.6 \times 0.2 + 0.6 \times 0.32 + 0.6 \times 0.28 = 0.6.$$

C 小区不是优质小区.

(在对 A、B、C 小区做说明时必须出现与 0.6 比较的说明. 每一项中结论 1 分, 计算和说明理由 1 分)

(II) 依题意, 抽取 10 个小区中, 共有优质小区 $10 \times \frac{30+10}{100} = 4$ 个, 其它小区

$$10 - 4 = 6 \text{ 个.}$$

依题意 ξ 的所有可能取值为 0, 1, 2.

$$P(\xi = 0) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3};$$

$$P(\xi = 1) = \frac{C_4^1 C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15};$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}.$$

则 ξ 的分布列为:

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

$$E\xi = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{2}{15} = \frac{4}{5}.$$

(20) 解: (I) 解: 依题意, 得

$$\begin{cases} a = 2, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ c^2 = a^2 - b^2 (a > b > 0). \end{cases}$$

解得, $\begin{cases} a = 2, \\ b = 1. \end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(II) 设点 $Q(x_0, y_0)$, 依题意, 点 P 坐标为 $(-x_0, -y_0)$,

$$\text{满足 } \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1 \quad (-2 < x_0 < 2 \text{ 且 } y_0 \neq 0),$$

$$\text{直线 } QA \text{ 的方程为 } y = \frac{y_0}{x_0 - 2}(x - 2)$$

$$\text{令 } x = 4, \text{ 得 } y = \frac{2y_0}{x_0 - 2}, \text{ 即 } N(4, \frac{2y_0}{x_0 - 2}).$$

$$\text{直线 } PA \text{ 的方程为 } y = \frac{y_0}{x_0 + 2}(x - 2), \text{ 同理可得 } M(4, \frac{2y_0}{x_0 + 2}).$$

设 B 为 $x = 4$ 与 x 轴的交点.

$$\begin{aligned} S_{\triangle APQ} + S_{\triangle AMN} &= \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |y_P - y_Q| + \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |y_M - y_N| \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times |2y_0| + \frac{1}{2} \times 2 \times \left| \frac{2y_0}{x_0 - 2} - \frac{2y_0}{x_0 + 2} \right| \\ &= 2|y_0| + 2|y_0| \cdot \left| \frac{1}{x_0 - 2} - \frac{1}{x_0 + 2} \right| \\ &= 2|y_0| + 2|y_0| \cdot \left| \frac{4}{x_0^2 - 4} \right|. \end{aligned}$$

又因为 $x_0^2 + 4y_0^2 = 4$, $y_0 \neq 0$,

$$\text{所以 } S_{\triangle APQ} + S_{\triangle AMN} = 2|y_0| + 2|y_0| \cdot \frac{1}{|y_0^2|} = 2|y_0| + \frac{2}{|y_0|} \geq 4.$$

当且仅当 $y_0 = \pm 1$ 取等号, 所以 $S_{\triangle APQ} + S_{\triangle AMN}$ 的最小值为 4.

(21) 解: (I) 由已知得 $f'(x) = e^x(ax^2 + 2ax + 1)$,

因为 $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$,

所以直线 l 的方程为 $y = x + 1$.

(II) (i) 当 $0 < a \leq 1$ 时, $ax^2 + 2ax + 1 = a(x+1)^2 + 1 - a \geq 0$,

所以 $f'(x) = e^x(ax^2 + 2ax + 1) \geq 0$ (当且仅当 $a = 1$ 且 $x = -1$ 时, 等号成立).

所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是单调递增函数.

所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上无极小值.

(ii) 当 $a > 1$ 时, 一元二次方程 $ax^2 + 2ax + 1 = 0$ 的判别式 $\Delta = 4a(a-1) > 0$,

记 x_1, x_2 是方程的两个根, 不妨设 $x_1 < x_2$.

$$\text{则 } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 < 0, \\ x_1 x_2 = \frac{1}{a} > 0. \end{cases}$$

所以 $x_1 < x_2 < 0$.

此时 $f'(x)$, $f(x)$ 随 x 的变化如下:

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(x_2)$.

又因为 $f(x)$ 在 $[x_2, 0]$ 单调递增,

所以 $f(x_2) < f(0) = 1$.

所以 $f(x)$ 的极小值为小于 1.

22. 解: (I) 由题知:

$$m_1 = (3+3) - (2+3) = 1;$$

$$m_2 = (3+3) - (3+1) = 2;$$

$$m_3 = 3.$$

A_5 的特征值为 1.

$$(II) |m_i - m_j| = |x_i - x_j|.$$

理由如下:

由于 $[i - (n+1)][j - (n+1)] \geq 0$, 可分下列两种情况讨论:

① 当 $i, j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ 时,

根据定义可知:

$$\begin{aligned} m_i &= (x_{2n+1} + x_{2n} + \dots + x_{n+2}) - (x_{n+1} + x_n + \dots + x_1 - x_i) \\ &= (x_{2n+1} + x_{2n} + \dots + x_{n+2}) - (x_{n+1} + x_n + \dots + x_1) + x_i \end{aligned}$$

$$\text{同理可得: } m_j = (x_{2n+1} + x_{2n} + \dots + x_{n+2}) - (x_{n+1} + x_n + \dots + x_1) + x_j$$

$$\text{所以 } m_i - m_j = x_i - x_j.$$

$$\text{所以 } |m_i - m_j| = |x_i - x_j|.$$

② 当 $i, j \in \{n+1, n+2, \dots, 2n+1\}$ 时, 同①理可得:

$$m_i = (x_{2n+1} + x_{2n} + \dots + x_{n+1} - x_i) - (x_n + x_{n-1} + \dots + x_1)$$

$$= (x_{2n+1} + x_{2n} + \dots + x_{n+1}) - (x_n + x_{n-1} + \dots + x_1) - x_i$$

$$m_j = (x_{2n+1} + x_{2n} + \dots + x_{n+1}) - (x_n + x_{n-1} + \dots + x_1) - x_j$$

$$\text{所以 } m_i - m_j = x_j - x_i.$$

$$\text{所以 } |m_i - m_j| = |x_i - x_j|.$$

$$\text{综上有: } |m_i - m_j| = |x_i - x_j|.$$

(III) 不妨设 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2n+1}$,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 2n+1} |x_i - x_j|$$

$$= 2nx_{2n+1} + (2n-2)x_{2n} + \dots + 2x_{n+2} + 0 \cdot x_{n+1} - 2x_n - \dots - 2nx_1$$

$$= 2n(x_{2n+1} - x_1) + (2n-2)(x_{2n} - x_2) + \dots + 2(x_{n+2} - x_n),$$

$$\text{显然, } x_{2n+1} - x_1 \geq x_{2n} - x_2 \geq \dots \geq x_{n+2} - x_n,$$

$$x_{2n+1} + x_{2n} + \dots + x_{n+2} - (x_n + x_{n-1} + \dots + x_1)$$

$$\geq (x_{n+1} + \dots + x_{2n}) - (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = m_{2n+1}.$$

当且仅当 $x_{n+1} = x_{2n+1}$ 时取等号;

$$x_{2n+1} + x_{2n} + \dots + x_{n+2} - (x_n + x_{n-1} + \dots + x_1)$$

$$\geq (x_{n+2} + \dots + x_{2n+1}) - (x_2 + x_3 + \dots + x_{n+1}) = m_1$$

当且仅当 $x_1 = x_{n+1}$ 时取等号;

由 (II) 可知 m_1, m_{2n+1} 的较小值为 $n-1$,

$$\text{所以 } x_{2n+1} + x_{2n} + \dots + x_{n+2} - (x_n + x_{n-1} + \dots + x_1) \geq n-1.$$

当且仅当 $x_1 = x_{n+1} = x_{2n+1}$ 时取等号,

此时数列 A_{2n+1} 为常数列，其特征值为 0，不符合题意，则必有

$$x_{2n+1} + x_{2n} + \cdots + x_{n+2} - (x_n + x_{n-1} + \cdots + x_1) \geq n.$$

下证：若 $p \geq q \geq 0$ ， $2 \leq k \leq n$ ，总有 $(2n+2-k)p + kq \geq (n+1)(p+q)$ 。

$$\begin{aligned} \text{证明：} & (2n+2-k)p + kq - (n+1)(p+q) \\ &= (n+1-k)p - (n+1-k)q \\ &= (n+1-k)(p-q) \geq 0. \end{aligned}$$

所以 $(2n+2-k)p + kq \geq (n+1)(p+q)$ 。

$$\begin{aligned} \text{因此} \quad & \sum_{1 \leq i < j \leq 2n+1} |x_i - x_j| \\ &= 2n(x_{2n+1} - x_1) + (2n-2)(x_{2n} - x_2) + \cdots + 2(x_{n+2} - x_n) \\ &\geq (n+1)(x_{2n+1} + x_{2n} + \cdots + x_{n+2} - x_n - x_{n-1} - \cdots - x_1) \\ &\geq n(n+1). \end{aligned}$$

$$\text{当 } x_k = \begin{cases} 0, & 1 \leq k \leq n, \\ 1, & n+1 \leq k \leq 2n+1, \end{cases} \text{ 时,}$$

$\sum_{1 \leq i < j \leq 2n+1} |x_i - x_j|$ 可取到最小值 $n(n+1)$ ，符合题意。

所以 $\sum_{1 \leq i < j \leq 2n+1} |x_i - x_j|$ 的最小值为 $n(n+1)$ 。