河南省高三部分名校联考入学摸底考试

数　学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合. $M=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}, N=\{x|x^2-5x+6>0\}$, 则 M∩N=

A. {2, 3}　　B. {-1, 0, 1}

C. {-3, -2, 2, 3}　　D. {-3, -2, -1, 0, 1}

2. 已知复数 $z=\frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}$, 则 z+$\bar{z}$ =

A. $\frac{2}{3}$　　B. 2　　C. 2 $\sqrt{2}$　　D. 2i

3. 已知 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{5}}, b=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}, c=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{5}$,则

A. $b<a<c$　　B. $a<b<c$　　C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

4. 在△ABC 中, AB=AC=5, BC=6, E, F 分别为边 BC, AB 的中点, 则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EC}=$

A. $\frac{5}{2}$　　B. $\frac{7}{4}$　　C. $-\frac{7}{2}$　　D. $-\frac{9}{2}$

5. 有一组样本数据为 33, 66, 99, 101, 134, 167, 其方差为 s^2. 现准备再添加一个新数据x_7, 若x_7=100，其与原有的 6 个数据构成的新样本的方差记为 s^2，若x_7=33，其与原有的 6 个数据构成的新样本的方差记为 s^2，则

A. $s^2>s^2>s^2$　　B. $s_0^2>s_2^2>s_1^2$

C. $s^2>s^2>s^2$　　D. $s_1^2>s_0^2>s_2^2$

6. 已知 m, n, l 是三条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 且 m⊥l, m⊥α, n⊥l, n⊥β, 则下列命题错误的是

A. 若 m⊥n, 则 α ⊥ β　　B. 若 m∥n, 则 α ∥ β

C. 若 m∥β, 则 α ∥ β　　D. 若 m⊥β, 则 n⊥α

7. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$在((0，$\frac{\pi}{2}$)上没有零点，则ω的取值范围是

A. (0, 1]　　B. $\left(0,\frac{4}{3}\right]$　　C. $\left(0,\frac{3}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{2}{3},1\right)$

8. 已知矩形 ABCD 的顶点都在椭圆 M: $\left\{\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>0)\right\}$上，若该矩形面积的最大值为 S，且 S∈[4, 6], 则 a 的取值范围是

A. [$\sqrt{2}$, 3]　　B. [2, 3]

C. $\left[\frac{3}{2},2\right]$　　D. [$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$]

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分，

9. 已知 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2},\cos\beta=\frac{\sqrt{5}}{5},\cos(\beta-\alpha)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,则

$A.\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　$B.\sin(\beta-\alpha)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

$C.\sin2\beta=\frac{4}{5}$　　$D.\alpha=\frac{\pi}{4}$

10. 已知函数 f(x)的定义域为 $R,f(x+y)=f(x)+f(y)$, 则

A. $f(0)=0$　　B. $f(x)$是奇函数

C. $x=0$ 为$f(x)$的极小值点　　D. 若$f(1)=1$, 则$f(2023)=2023$

11. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{x-3}$,下列结论正确的是

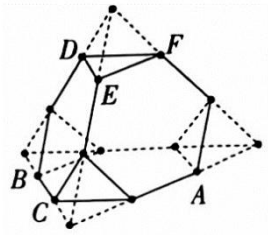
A. $f(x)$在(0、6)上单调递减

B. $f(x)$的图象关于点(3,6)对称

C. 曲线$y=f(x)$与x轴相切

D. $f(x)$的值域为$(-\infty,0]\cup[12,+\infty)$

12. 半正多面体亦称“阿基米德体”“阿基米德多面体”，是由边数不全相同的正多边形为面的多面体. 某半正多面体由4个正三角形和4个正六边形构成，其可由正四面体切割而成. 在如图所示的半正多面体中，若其棱长为1，则下列结论正确的是



A. 该半正多面体的表面积为$\frac{21\sqrt{3}}{4}$

B. 该半正多面体的体积为 $\frac{23\sqrt{2}}{12}$

C. 该半正多面体外接球的表面积为$\frac{11\pi}{2}$

D. 若点 M,N 分别在线段 DE,BC 上,则 FM+MN+AN 的最小值为 $\sqrt{19}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 请将答案填在答题卡对应题号的位置上.

13. 已知双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{m}=1$ 的离心率为 3，则 C 的虚轴长为__▲__.

14. 从 1，2，3，4，5，6 中任取出两个奇数和两个偶数，则可以组成 __▲__个没有重复数字的四位偶数.(用数字作答)

15. 已知圆 M:(x-5)²+(y-5)²=16, 点 N 在直线 l:3x+4y-5=0 上,过点 N 作直线 NP 与圆 M 相切于点 P，则△MNP 的周长的最小值为__▲__.

16. 已知数列$\{a_n\}$ 的前 n 项即为S_n,且 $a_n=\frac{n+1}{2^n}$,若对任意$x\in N^*$,都有 $0<tS_n<5$,则 t 的取值范围是__▲__.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知△ABC 的周长为 $10+2\sqrt{7}$,且 $\sqrt{7}\sin A+\sqrt{7}\sin B=5\sin C$.

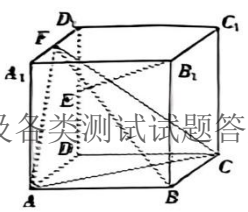
(1)求 AB 的长;

(2)若△ABC 的面积为 12sinC. 求 C.

18. (12 分)

如图,在正方体 ABCD-A₁B₁C₁D₁中,E.F 分别是棱 DD₁,A₁D₁的中点.

(1)证明:B₁E⊥平面 ACF.



进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

(2)求二面角B-AF-C的余弦值.

19.(12 分)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, na_{n+1}-(n+1)a_n=1$

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若数列{bn}满足$b_1=a_1$, $b_2=a_2+a_3, b_3=a_4+a_5+a_6, b_4=a_7+a_8+a_9+a_{10}$,…,依此类推,求$\{b_n\}$的通项公式

20.(12 分)

已知抛物线 $C_1: y^2=2p_1x(p_1>0)$.与抛物线$C_2: x^2=2p_2y(p_2>0)$;在第一象限交于点 P.

(1)已知 F 为抛物线 C₁的焦点,若 PF 的中点坐标为(1,1),求 p₁.

(2)设 O 为坐标原点,直线 OP 的斜率为 k₁.若斜率为 k₂的直线 l 与抛物线 C₁和 C₂均相切,证明 k₁+k₂为定值,并求出该定值.

21.(12 分)

甲、乙两人组成“梦想队”参加“极速猜歌”比赛,比赛共两轮,每轮比赛从队伍中选出一人参与,参与比赛的选手从曲库中随机抽取一首进行猜歌名.若每轮比赛中甲、乙参与比赛的概率相同.甲首次参与猜歌名,猜对的概率为 $\frac{2}{3}$;甲在第一次猜对歌名的条件下,第二次也猜对的概率为 $\frac{3}{4}$;甲在第一次猜错歌名的条件下,第二次猜对的概率为 $\frac{1}{2}$.乙首次参与猜歌名,猜对的概率为 $\frac{1}{2}$;乙在第一次猜对歌名的条件下,第二次也猜对的概率为 $\frac{2}{3}$;乙在第一次猜错歌名的条件下,第二次猜对的概率为 $\frac{1}{2}$.甲、乙互不影响.

(1)求在两轮比赛中,甲只参与一轮比赛的概率;

(2)记“梦想队”一共猜对了 X 首歌名,求 X 的分布列及期望.

22.(12 分)

已知函数$f(x)=cosx+axsin\,x$.

(1)若$a=1$,求曲线$y=f(x)$在点$(\pi, f(\pi))$处的切线方程;

(2)若$x=0$ 是$f(x)$的极大值点,求a的取值范围.

进入北京高考在线网站:http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!

河南省高三名校联考入学摸底考试
数学参考答案

1. D　因为 $N=\{x|x^2-5x+6>0\}=(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$，
所以 $M\cap N=\{-3,-2,-1,0,1\}$.

2. A　因为 $z=\dfrac{\sqrt{2}-\mathrm{i}}{\sqrt{2}+\mathrm{i}}=\dfrac{(\sqrt{2}-\mathrm{i})(\sqrt{2}-\mathrm{i})}{(\sqrt{2}+\mathrm{i})(\sqrt{2}-\mathrm{i})}=\dfrac{1-2\sqrt{2}\mathrm{i}}{3}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\mathrm{i}$，
所以 $\bar{z}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\mathrm{i}$，即 $z+\bar{z}=\dfrac{2}{3}$.

3. A　$b=(\dfrac{1}{2})^{\frac{5}{3}}<(\dfrac{1}{2})^{\frac{2}{5}}=a<1$，$c=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{5}=\log_3 5>1$，故 $b<a<c$.

4. D　$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EA})\cdot\overrightarrow{EC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC})=-\dfrac{9}{2}$.

5. C　数据波动越大，方差越大. 原样本数据的平均数为 100，添加新数据 $x_7=100$ 后，新样本的数据更集中，$s_0^2>s_1^2$. 添加新数据 $x_7=33$ 后，新样本的数据波动更大，$s_2^2>s_0^2$.

6. C　若 $m/\!/\beta$，则 $m\perp n$，所以 $\alpha\perp\beta$，C 错误.

7. B　因为 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\omega x+\dfrac{\pi}{3}\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi\omega}{2}+\dfrac{\pi}{3})$. 因为 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上没有零点，所以 $\dfrac{\pi\omega}{2}+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\pi$，解得 $\omega\leqslant\dfrac{4}{3}$. 又因为 $\omega>0$，所以 $0<\omega\leqslant\dfrac{4}{3}$.

8. B　设矩形在第一象限的顶点坐标为 (x,y)，根据对称性知该矩形的面积 $S_{ABCD}=4xy=4a\cdot\dfrac{x}{a}\cdot y\leqslant 2a(\dfrac{x^2}{a^2}+y^2)=2a$，当且仅当 $\dfrac{x}{a}=y$ 时，等号成立，即 $S=2a$，所以 $4\leqslant 2a\leqslant 6$，解得 $2\leqslant a\leqslant 3$.

9. ACD　$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，A 正确.

$\sin 2\beta=2\sin\beta\cos\beta=\dfrac{4}{5}$，C 正确.

因为 $0<\beta-\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\sin(\beta-\alpha)=\sqrt{1-\cos^2(\beta-\alpha)}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，B 错误.

$\cos\alpha=\cos[\beta-(\beta-\alpha)]=\cos\beta\cos(\beta-\alpha)+\sin\beta\sin(\beta-\alpha)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，
所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，D 正确.

10. ABD　令 $x=y=0$，则 $f(0)=f(0)+f(0)$，所以 $f(0)=0$，A 正确.

令 $y=-x$，则 $f(x-x)=f(x)+f(-x)=0$，所以 $f(x)$ 是奇函数，B 正确.

$f(x)$ 是奇函数，$x=0$ 不可能是 $f(x)$ 的极小值点，C 错误.

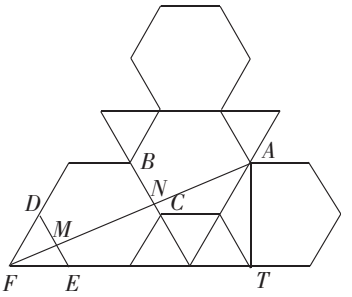
令 $y=1$，则 $f(x+1)=f(x)+1$，$f(2023)=f(2022)+1=f(2021)+2=f(2020)+3=\cdots=$

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

$f(1)+2022=2023$，D 正确.

11. BCD　$f'(x)=\dfrac{x^2-6x}{(x-3)^2}$. 令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<3$ 或 $3<x<6$，令 $f'(x)>0$，解得 $x<0$ 或 $x>6$，所以 $f(x)$在$(0,3)$，$(3,6)$上单调递减，在$(-\infty,0)$，$(6,+\infty)$上单调递增，A 错误. $f(0)=0$，$f'(0)=0$，曲线 $y=f(x)$在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=0$，即曲线 $y=f(x)$与 x 轴相切，C 正确. $f(x)_{极小值}=f(6)=12$，$f(x)_{极大值}=f(0)=0$，$f(x)$的值域为$(-\infty,0]\cup[12,+\infty)$，D 正确. $f(3-x)+f(3+x)=12$，所以 $f(x)$的图象关于点$(3,6)$对称，B 正确.

12. BCD　该半正多面体的表面积为 $4\times(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times3^2-3\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times1^2)+4\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=7\sqrt{3}$，A 错误.



该半正多面体所在的正四面体的高为$\sqrt{6}$，体积为$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times3^2\times\sqrt{6}=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$. 该半正多面体的体积为$\dfrac{9\sqrt{2}}{4}-4\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times1^2\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{23\sqrt{2}}{12}$，B 正确.

该半正多面体外接球的球心即其所在正四面体的外接球的球心，记球心为 O，则 $OA^2=(\dfrac{\sqrt{6}}{4})^2+1^2=\dfrac{11}{8}$，故该半正多面体外接球的表面积为 $4\pi\cdot OA^2=\dfrac{11\pi}{2}$，C 正确.

该半正多面体的展开图如图所示，$FT=4$，$AT=\sqrt{3}$，$AF=\sqrt{FT^2+AT^2}=\sqrt{19}$，$FM+MN+AN\geqslant AF=\sqrt{19}$，D 正确.

13. $4\sqrt{2}$　由题意得$\dfrac{c}{a}=3$，则 $c=3$，$b=\sqrt{c^2-a^2}=2\sqrt{2}$，故虚轴长 $2b=4\sqrt{2}$.

14. 108　可以组成 $C_3^2C_3^2C_2^1A_3^3=108$ 个没有重复数字的四位偶数.

15. $10+2\sqrt{5}$　$\triangle MNP$ 的周长为 $|MP|+|MN|+|PN|$，$|PN|=\sqrt{|MN|^2-|MP|^2}=\sqrt{|MN|^2-16}$，所以$|MN|$越小，$|PN|$越小.

当 $MN\perp l$ 时，$|MN|$最小. 圆心 M 到直线 l 的距离为$\dfrac{|3\times5+4\times5-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=6$，所以$|MN|$的最小值为 6，此时，$|PN|=2\sqrt{5}$，$|MP|+|MN|+|PN|=10+2\sqrt{5}$. 故$\triangle MNP$ 的周长的最小值为 $10+2\sqrt{5}$.

16. $(0,\dfrac{5}{3}]$　$S_n=\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+\cdots+\dfrac{n+1}{2^n}$，$\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{4}{2^4}+\cdots+\dfrac{n+1}{2^{n+1}}$，

两式相减可得$\dfrac{1}{2}S_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n+1}{2^{n+1}}=1+\dfrac{\frac{1}{2^2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{n+1}{2^{n+1}}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{n+3}{2^{n+1}}$，所以 $S_n=3-\dfrac{n+3}{2^n}$.

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

因为 $a_n=\frac{n+1}{2^n}>0$，所以 $S_n\geqslant S_1=1$. 因为 $\frac{n+3}{2^n}>0$，所以 $3-\frac{n+3}{2^n}<3$，所以 $1\leqslant S_n<3$.

因为 $0<tS_n<5$，所以 $0<t\leqslant\frac{5}{3}$.

17. 解：(1)设△ABC 内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c.

因为 $\sqrt{7}\sin A+\sqrt{7}\sin B=5\sin C$，所以 $\sqrt{7}(a+b)=5c$. …… 2 分

因为 $a+b+c=10+2\sqrt{7}$，所以 $AB=c=2\sqrt{7}$. …… 4 分

(2)因为△ABC 的面积为 $\frac{1}{2}ab\sin C=12\sin C$，且 $\sin C\neq 0$，所以 $ab=24$. …… 6 分

由(1)可得 $a+b=10$.

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=52$. …… 7 分

由余弦定理可得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{52-28}{48}=\frac{1}{2}$. …… 9 分

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$. …… 10 分

18. 解：以 D 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系.

设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则 $A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$F(1,0,2)$，$E(0,0,1)$，$B_1(2,2,2)$. …… 2 分

$\overrightarrow{AF}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{EB_1}=(2,2,1)$. …… 3 分

(1)证明：因为 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EB_1}=0$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EB_1}=0$，所以 $AF\perp EB_1$，$AC\perp EB_1$. …… 5 分

因为 $AF\cap AC=A$，所以 $B_1E\perp$ 平面 ACF. …… 7 分

(2)结合(1)可得 $\overrightarrow{EB_1}$ 为平面 ACF 的一个法向量.

$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$. …… 8 分

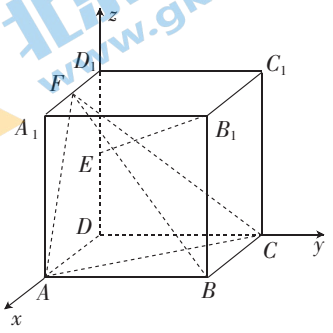
设平面 ABF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y=0,\\ -x+2z=0.\end{cases}$

取 $x=2$，得 $\boldsymbol{n}=(2,0,1)$. …… 10 分

$\cos\langle\overrightarrow{EB_1},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{EB_1}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{EB_1}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

故二面角 $B-AF-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$. …… 12 分



注：第(1)问若不建系，证法如下：

连接 A_1E，BD，B_1D_1(图略).

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$B_1B\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $B_1B\perp AC$.

因为 $BD\perp AC$，$B_1B\cap BD=B$，所以 $AC\perp$ 平面 B_1BDD_1.

因为 $EB_1\subset$ 平面 B_1BDD_1，所以 $AC\perp EB_1$. …… 2 分

因为 $A_1B_1\perp$ 平面 ADD_1A_1，所以 $A_1B_1\perp AF$.

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

在正方形 ADD_1A_1，E,F 分别是边 DD_1，A_1D_1 的中点，可得 $\triangle A_1AF\cong\triangle D_1A_1E$，

所以 $\angle A_1AF=\angle D_1A_1E$，$\angle EA_1A+\angle A_1AF=\angle EA_1A+\angle D_1A_1E=90°$，所以 $AF\perp A_1E$.

…… 4 分

因为 $A_1B_1\cap A_1E=A_1$，所以 $AF\perp$ 平面 A_1B_1E.

因为 $EB_1\subset$ 平面 A_1B_1E，所以 $AF\perp EB_1$.

因为 $AC\cap AF=A$，所以 $B_1E\perp$ 平面 ACF. …… 5 分

19. 解：(1)因为 $na_{n+1}-(n+1)a_n=1$，所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1}+\frac{1}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n}$， …… 2 分

即 $\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n}=\frac{a_1}{1}+1=2$，可得 $a_n=2n-1$. …… 5 分

(2)设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n.

b_n 为 $\{a_n\}$ 中的 n 项之和，T_n 为 $\{a_n\}$ 中的前 $\frac{(1+n)n}{2}$ 项和. …… 7 分

$S_n=n^2$，$T_n=S_{\frac{(1+n)n}{2}}=[\frac{(1+n)n}{2}]^2$. …… 10 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=T_n-T_{n-1}=[\frac{(1+n)n}{2}]^2-[\frac{(n-1)n}{2}]^2=n^3$.

$b_1=a_1=1$ 也满足上式.

故 $b_n=n^3$. …… 12 分

20. 解：(1)$F(\frac{p_1}{2},0)$，设 $P(\frac{y_1^2}{2p_1},y_1)$，…… 1 分

则 $\begin{cases}\frac{p_1}{2}+\frac{y_1^2}{2p_1}=2\times 1,\\ y_1=2\times 1,\end{cases}$ …… 3 分

解得 $p_1=2$. …… 4 分

(2)联立 $\begin{cases}y^2=2p_1x,\\ x^2=2p_2y,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2\sqrt[3]{p_1p_2^2},\\ y=2\sqrt[3]{p_1^2p_2},\end{cases}$

所以 $P(2\sqrt[3]{p_1p_2^2},2\sqrt[3]{p_1^2p_2})$， …… 6 分

$k_1=\frac{2\sqrt[3]{p_1^2p_2}}{2\sqrt[3]{p_1p_2^2}}=\sqrt[3]{\frac{p_1}{p_2}}$. …… 7 分

设直线 l 的方程为 $y=k_2x+b$.

联立 $\begin{cases}y^2=2p_1x,\\ y=k_2x+b,\end{cases}$ 得 $k_2^2x^2+2(k_2b-p_1)x+b^2=0$，

$\Delta=4(k_2b-p_1)^2-4k_2^2b^2=0$，即 $k_2b-p_1=\pm k_2b$. …… 8 分

若 $k_2b-p_1=k_2b$，则 $p_1=0$，不符合题意，

所以 $k_2b-p_1=-k_2b$，即 $2k_2b=p_1$①. …… 9 分

联立 $\begin{cases}x^2=2p_2y,\\ y=k_2x+b,\end{cases}$ 得 $x^2-2p_2k_2x-2p_2b=0$，

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

$\Delta=4p_2^2k_2^2+8p_2b=0$，即 $p_2k_2^2+2b=0$②. …… 10 分

由①②可得 $k_2=-\sqrt[3]{\frac{p_1}{p_2}}$，所以 $k_1+k_2=0$.

故 k_1+k_2 为定值，该定值为 0. …… 12 分

21. 解：(1)甲只参与一轮比赛的概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. …… 4 分

(2)$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$; …… 6 分

$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{3}{8}$;

…… 8 分

$P(X=1)=1-P(X=0)-P(X=2)=\frac{7}{16}$. …… 10 分

X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{8}$

$E(X)=\frac{7}{16}+2\times\frac{3}{8}=\frac{19}{16}$. …… 12 分

22. 解：(1)$f(x)=\cos x+x\sin x$，$f(\pi)=-1$. …… 1 分

$f'(x)=x\cos x$，$f'(\pi)=-\pi$. …… 3 分

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\pi,f(\pi))$ 处的切线方程为 $y+1=-\pi(x-\pi)$，即 $\pi x+y-\pi^2+1=0$. …

…… 4 分

(2)$f'(x)=(a-1)\sin x+ax\cos x$，$f'(0)=0$.

因为 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，所以存在 $x_1\in(0,+\infty)$，使得当 $x\in(-x_1,0)$ 时，$f'(x)>0$，

当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)<0$. …… 5 分

令函数 $g(x)=f'(x)=(a-1)\sin x+ax\cos x$，$g'(x)=(2a-1)\cos x-ax\sin x$，$g'(0)=2a-1$. …… 6 分

①若 $g'(0)>0$，即 $a>\frac{1}{2}$，则存在 $x_2\in(0,+\infty)$，使得当 $x\in(0,x_2)$ 时，$g'(x)>0$，

即 $f'(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递增，从而当 $x\in(0,x_2)$ 时，$f'(x)>0$，

$f(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递增，不符合题意. …… 7 分

②若 $g'(0)=0$，即 $a=\frac{1}{2}$，则 $g'(x)=-\frac{1}{2}x\sin x$.

令函数 $h(x)=g'(x)=-\frac{1}{2}x\sin x$，$h'(x)=-\frac{1}{2}(\sin x+x\cos x)$.

当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$h'(x)<0$.

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

所以 $h(x)$在$(-\frac{\pi}{2},0)$上单调递增，在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减.

因为 $h(0)=0$，所以当 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$时，$h(x)=g'(x)\leqslant 0$，

所以 $g(x)$在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上单调递减.

因为 $g(0)=f'(0)=0$，所以当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$时，$g(x)=f'(x)>0$，当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$g(x)=f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$(-\frac{\pi}{2},0)$上单调递增，在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减，符合题意. …… 9 分

③若 $g'(0)<0$，即 $a<\frac{1}{2}$，则存在 $x_3\in(0,+\infty)$，使得当 $x\in(-x_3,x_3)$时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$在$(-x_3,x_3)$上单调递减.

又因为 $g(0)=f'(0)=0$，所以当 $x\in(-x_3,0)$时，$g(x)=f'(x)>0$，当 $x\in(0,x_3)$时，$g(x)=f'(x)<0$，即 $f(x)$在$(-x_3,0)$上单调递增，在$(0,x_3)$上单调递减，符合题意.

综上，a 的取值范围为$(-\infty,\frac{1}{2}]$. …… 12 分

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！