北京市第五十七中学高三暑期检测（数学试题）2023.8

一．选择题，每题 4 分，共计 40 分。

1．已知集合 $A=\left\{x\mid \dfrac{x+1}{4-x}\geq 0, x\in \mathrm{N}\right\}$，$B=\{0,1,2,3,4\}$，则（　　）

A．$A=B$　　B．$A\subsetneqq B$　　C．$B\subsetneqq A$　　D．$A\cap B=B$

2.在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，终边与单位圆交于点 $(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3})$，

则 $\cos(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)=$（　　）

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

3.下列函数中，与函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 的奇偶性相同，且在 $(0,+\infty)$ 上有相同单调性的是(　　)

A. $y=x|x|$　　B. $y=2^{-|x+1|}$　　C. $y=\log_{\frac{1}{2}}|x|$　　D. $y=e^{x}+e^{-x}$

4.函数 $f(x)=\sin 2x\cdot\tan x$ 是(　　)

A 偶函数，且最大值为 2　　B 偶函数，且最小值为 0

C 奇函数，且最小值为 0　　D 奇函数，且最大值为 2

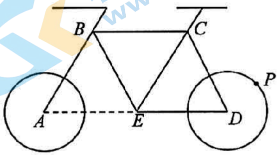
5.在不考虑空气阻力的条件下，火箭的最大速度 v (km/s) 和燃料的质量 M (kg) 以及火箭（除燃料外）的质量 N (kg) 间的关系为 $v=2\ln(1+\dfrac{M}{N})$．若火箭的最大速度为 12 km/s，则下列各数中与 $\dfrac{M}{N}$ 最接近的是（参考数据：$e=2.71828\cdots$）

A．200　　B．400　　C．600　　D．800

6.如果函数 $f(x)$ 在定义域内存在区间 $[a,b]$，使 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域是 $[2a,2b]$],那么称 $f(x)$ 为“倍增函数”.若函数 $f(x)=\ln(e^{x}+m)$ 为“倍增函数”,则实数 m 的取值范围是(　　)

A. $(-\dfrac{1}{4},0)$　　B. $(-\dfrac{1}{2},0)$　　C. $(-1,0)$　　D. $(-\dfrac{1}{4},+\infty)$

7. 骑自行车是一种能有效改善心肺功能的耐力性有氧运动，深受大众喜爱，如图是某一自行车的平面结构示意图，已知图中的圆 A（前轮），圆 D（后轮）的半径均为 $\sqrt{3}$，$\triangle ABE$，$\triangle BEC$，$\triangle ECD$ 均是边长为 4 的等边三角形.设点 P 为后轮上的一点，则在骑动该自行车的过程中，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的最大值为（　　）



A．18　　　　B．24

C．36　　　　D．48

8.已知函数 $f(x)=e^x$，若存在 $x_0\in[-1,2]$ 使得 $f(t)=x_0+f(x_0)-t$ 恒成立，则 $b=f(x_0)-t$ 的取值范围(　　)

A　$[0,\frac{1}{e}+1]$　　B　$[\frac{1}{e}+1,e^2-2]$　　C　$[1,\frac{1}{e}+1]$　　D　$[1,e^2-2]$

9.数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=\log_{n+1}(n+2)(n\in N^*)$，定义：使 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_k$ 为整数的数 k $(k\in N^*)$ 叫做期盼数，则区间 $[1,2023]$ 内的所有期盼数的和等于（　　）

A 2023　　B 2024　　C　2025　　D　2026

10、已知 a_1,a_2,a_3,a_4 成等比数列，且 $a_1+a_2+a_3+a_4=\ln(a_1+a_2+a_3)$.若 $a_1>1$，则（　　）

A．$a_1>a_3,a_2<a_4$　　B．$a_1>a_3,a_2>a_4$

C．$a_1<a_3,a_2<a_4$　　D．$a_1<a_3,a_2>a_4$

二、填空题，共计 5 题，总分 25 分。

11.若复数 $Z_1=1+2i$，$Z_2=3-i$，则 $\frac{Z_2}{Z_1}$ 的共轭复数的虚部为________

12、若函数 $f(x)=\cos 2x+a\sin x$ 在区间（$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$）是减函数，则 a 的取值范围是________.

13. 若函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+3, & x\leqslant 0,\\ (x-2)^2, & 0<x\leqslant a\end{cases}$ 的定义域和值域的交集为空集，则正数 a 的取值范围是________

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_n=2a_n-4$，$n\in\mathbf{N}^*$．$\{b_n\}$ 是等差数列，且 $b_1=a_1$，$b_5=a_3$，则 $\{b_n\}$ 的通项公式为________；设 $c_n=a_{b_n}$，求 $c_1+c_2+\cdots+c_n=$________

15．函数 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|, x>0\\ kx^2+2x-1, x\leq 0\end{cases}$，给出下列命题：

①无论 k 取何值，$f(x)$ 恒有两个零点；

②存在实数 k，使得 $f(x)$ 的值域是 R；

③存在实数 k 使得 $f(x)$ 的图像上关于原点对称的点有两对；

④当 $k=1$ 时，若 $f(x)$ 的图象与直线 $y=ax-1$ 有且只有三个公共点，则实数 a 的取值范围是 $(0,2)$.

其中，所有正确命题的序号是________.

三.解答题：总分 85 分。

16. 已知函数 $f(x)=2\cos^2\omega x+2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+a\ (\omega>0,a\in\mathbf{R})$. 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择能确定函数 $f(x)$ 解析式的两个合理条件作为已知，

条件①：$f(x)$ 的最大值为1；

条件②：$f(x)$ 的一条对称轴是直线 $x=-\dfrac{\pi}{12\omega}$；

条件③：$f(x)$ 的相邻两条对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$.

求：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）若将函数 $f(x)$ 图像上的点纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\dfrac{1}{2}$，再向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 各单位，得到函数 $g(x)$ 的图像，若 $g(x)$ 在区间 $[0,m]$ 上的最小值为 $g(0)$，求 m 的最大值

17、△ABC 中，D 是 BC 上的点，AD 平分∠BAC，△ABD 面积是△ADC 面积的 2 倍.

(1) 求 $\dfrac{\sin\angle B}{\sin\angle C}$

(2) 若 AD＝1，DC＝$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求 BD 和 AC 的长.

18.已知函数 $f(x)=x^3-ax^2-a^2x+1$，其中 $a>0$.

(Ⅰ) 当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(Ⅱ) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-a,f(-a))$ 处的切线与 y 轴的交点为 $(0,m)$，

求 $m+\dfrac{1}{a}$ 的最小值.

19.已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A，上、下顶点分别为 B_1,B_2，直线 AB_1 的方程为 $x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$.

（I）求椭圆 E 的方程及离心率；

（II）P 是椭圆上一点，且在第一象限内，M 是点 P 关于 x 轴的对称点. 过 P 作垂直于 y 轴的直线交直线 AB_1 于点 Q，再过 Q 作垂直于 x 轴的直线交直线 PB_2 于点 N. 求 $\angle MNQ$ 的大小.

20. 已知函数 $f(x)=a\ln(x-a)-\frac{1}{2}x^2+x(a<0)$.

（I）求 $f(x)$ 的单调区间；

（II）若 $-1<a<2(\ln 2-1)$，求证：函数 $f(x)$ 只有一个零点 x_0，且 $a+1<x_0<a+2$；

（III）当 $a=-\frac{4}{5}$ 时，记函数 $f(x)$ 的零点为 x_0，若对任意 $x_1,x_2\in[0,x_0]$ 且 $x_2-x_1=1$，都有 $|f(x_2)-f(x_1)|\geq m$ 成立，求实数 m 的最大值.

21．已知 $A_n: a_1, a_2, \cdots, a_n (n \geq 4)$ 为有穷数列．若对任意的 $i \in \{0,1,\cdots,n-1\}$，都有 $|a_{i+1}-a_i| \leq 1$（规定 $a_0 = a_n$），则称 A_n 具有性质 P．

设 $T_n = \{(i,j) \mid |a_i - a_j| \leq 1, 2 \leq j-i \leq n-2 \ (i,j=1,2,\cdots,n)\}$．

（Ⅰ）判断数列 $A_4: 1, 0.1, -1.2, -0.5$，$A_5: 1, 2, 2.5, 1.5, 2$ 是否具有性质 P？若具有性质 P，写出对应的集合 T_n；

（Ⅱ）若 A_4 具有性质 P，证明：$T_4 \neq \varnothing$；

（Ⅲ）给定正整数 n，对所有具有性质 P 的数列 A_n，求 T_n 中元素个数的最小值．

北京市第五十七中学高三暑期检测（数学试题）2023.8 答案

选择题： 1-10　BCDBB　ACDDA

填空题： 11. $\frac{7}{5}$　12. $(-\infty,2]$　13. $(0,1)$

14. $b_n=3n+1$，$c_1+c_2+\cdots+c_n=\dfrac{2^{3n+5}-32}{7}$，　15. ③④

解答题

16. 解：（Ⅰ）$f(x)=(2\cos^2\omega x-1)+\sqrt{3}\sin 2\omega x+a+1$

$=\sqrt{3}\sin 2\omega x+\cos 2\omega x+a+1$

$=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})+a+1$.

若条件①已知，则 $3+a=1$，所以 $a=-2$.

当 $x=-\frac{\pi}{12\omega}$ 时，$2\omega\times(-\frac{\pi}{12\omega})+\frac{\pi}{6}=0$，则 $(-\frac{\pi}{12\omega},a+1)$ 是函数 $f(x)$ 的一个对称中心，这与条件②中直线 $x=-\frac{\pi}{12\omega}$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴矛盾.

若条件③已知，则 $T=\dfrac{2\pi}{|2\omega|}=\pi$，又因为 $\omega>0$，所以 $\omega=1$.

因此，选择条件①③能确定函数 $f(x)$ 的解析式.

所以 $a=-2$，$\omega=1$.

则 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})-1$.　　…………………8 分

【解】(1) $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD$,

$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin\angle CAD$.

因为 $S_{\triangle ABD}=2S_{\triangle ADC}$，$\angle BAD=\angle CAD$，所以 $AB=2AC$.

由正弦定理可得 $\dfrac{\sin\angle B}{\sin\angle C}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 因为 $S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ADC}=BD:DC$，所以 $BD=\sqrt{2}$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理知

$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\angle ADB$,

$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cos\angle ADC$.

故 $AB^2+2AC^2=3AD^2+BD^2+2DC^2=6$.

由(1)知 $AB=2AC$，所以 $AC=1$.

18.解：（1）当 a=1 时，$f(x)=x^3-x^2-x+1$，

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

当 $x<-\frac{1}{3}$ 或 x>1 时，$f'(x)>0$；当 $-\frac{1}{3}<x<1$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$ 和 $(1,+\infty)$，

单调递减区间为 $\left(-\frac{1}{3},1\right)$。……………………………………………5 分

（II）$f(x)=x^3-ax^2-a^2x+1$，$f'(x)=2x^2-2ax-a^2$。

$f(-a)=-a^3-a^3+a^3+1=1-a^3$

$f'(-a)=3a^2+2a^2-a^2=4a^2$

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-a,f(-a))$ 处的切线方程为 $y-1+a^3=4a^2(x+a)$，

即 $y=4a^2x+1+3a^3$。

令 x=0，得 $m=1+3a^3$。

此时 $m+\frac{1}{a}=1+3a^3+\frac{1}{a}$，令 $g(a)=3a^3+\frac{1}{a}+1, g'(a)=9a^2-\frac{1}{a^2}=0$，得 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

当 $0<a<\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$g'(a)<0$；当 $a>\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$g'(a)>0$

$g(a)$ 在区间 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，

故 $g(a)=m+\frac{1}{a}$ 的最小值为 $g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}+1=1+\frac{4\sqrt{3}}{3}$。………15 分

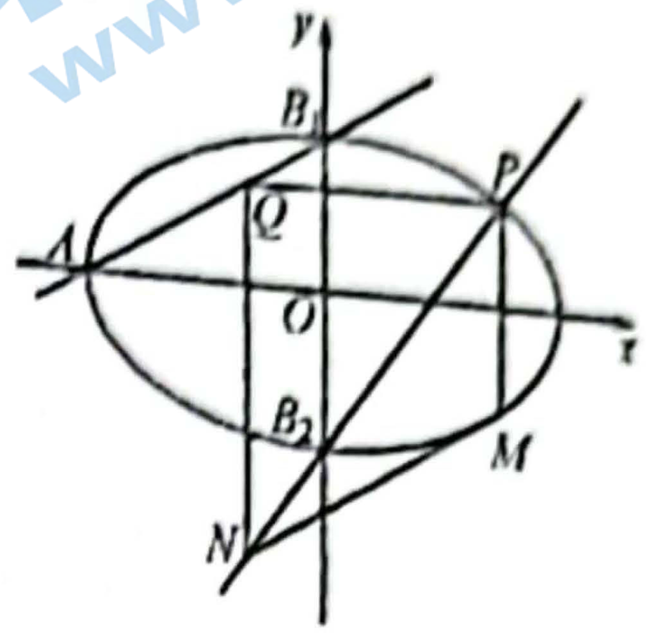
19.（本小题 15 分）

解：（I）由直线 AB_1 的方程为 $x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$，可得 $A(-\sqrt{3},0), B_1(0,1)$.

所以，$a=\sqrt{3}, b=1$，由 $a^2=b^2+c^2$ 得，$c=\sqrt{2}$.

椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅱ）依题意，设 $P(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，则 $M(x_0,-y_0)$.



且由 P 是椭圆上一点，可得 $\frac{x_0^2}{3}+y_0^2=1$.

直线 AB_1 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$，

由 $\frac{\sqrt{3}}{3}x+1=y_0$ 得，$x=\sqrt{3}(y_0-1)$.

所以 $Q\left(\sqrt{3}(y_0-1),y_0\right)$.

直线 PB_2 的方程为 $y=\frac{y_0+1}{x_0}x-1$，令 $x=\sqrt{3}(y_0-1)$，得

$$y=\frac{\sqrt{3}(y_0^2-1)}{x_0}-1=\frac{\sqrt{3}\left(-\frac{x_0^2}{3}\right)}{x_0}-1=-\frac{\sqrt{3}}{3}x_0-1.$$

即 $N\left(\sqrt{3}(y_0-1),-\frac{\sqrt{3}}{3}x_0-1\right)$.

所以 $k_{MN}=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{-y_0+\frac{\sqrt{3}}{3}x_0+1}{x_0-\sqrt{3}(y_0-1)}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{x_0-\sqrt{3}y_0+\sqrt{3}}{x_0-\sqrt{3}y_0+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

即直线 MN 的倾斜角是 $\frac{\pi}{6}$，所以 $\angle MNQ=\frac{\pi}{3}$.

20.

（Ⅰ）解：$f(x)$ 的定义域为 $(a,+\infty)$.

$$f'(x)=\frac{a}{x-a}-x+1=\frac{-x^2+(a+1)x}{x-a}.$$ ……………………………………1 分

令 $f'(x)=0$，$x=0$ 或 $x=a+1$.

当 $-1<a<0$ 时，$a+1>0$，函数 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$(a,0)$	0	$(0,a+1)$	$a+1$	$(a+1,+\infty)$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以，函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,a+1)$，单调递减区间是 $(a,0)$ 和 $(a+1,+\infty)$.

……………………………………3 分

当 $a=-1$ 时，$f'(x)=\dfrac{-x^2}{x+1}\le 0$. 所以，函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1,+\infty)$.

……………………………………4 分

当 $a<-1$ 时，$a+1<0$，函数 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$(a,a+1)$	$a+1$	$(a+1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以，函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(a+1,0)$，单调递减区间是 $(a,a+1)$ 和 $(0,+\infty)$.

……………………………………5 分

（Ⅱ）证明：当 $-1<a<2(\ln 2-1)<0$ 时，由（Ⅰ）知，$f(x)$ 的极小值为 $f(0)$，极大值为 $f(a+1)$.

因为 $f(0)=a\ln(-a)>0$，$f(a+1)=-\dfrac{1}{2}(a+1)^2+(a+1)=\dfrac{1}{2}(1-a^2)>0$，且 $f(x)$ 在 $(a+1,+\infty)$ 上是减函数，

所以 $f(x)$ 至多有一个零点. ……………………………………7 分

又因为 $f(a+2)=a\ln 2-\dfrac{1}{2}a^2-a=-\dfrac{1}{2}a[a-2(\ln 2-1)]<0$，

所以 函数 $f(x)$ 只有一个零点 x_0，且 $a+1<x_0<a+2$.

……………………………………9 分

（Ⅲ）解：因为 $-1<-\dfrac{4}{5}<2(\ln 2-1)$，

所以 对任意 $x_1,x_2\in[0,x_0]$ 且 $x_2-x_1=1$，由（Ⅱ）可知：$x_1\in[0,a+1)$，$x_2\in(a+1,x_0]$，且 $x_2\ge 1$. ……………………………………10 分

因为 函数 $f(x)$ 在 $[0,a+1)$ 上是增函数，在 $(a+1,+\infty)$ 上是减函数，

所以 $f(x_1)\ge f(0)$，$f(x_2)\le f(1)$. ……………………………………11 分

所以 $f(x_1)-f(x_2)\ge f(0)-f(1)$.

当 $a=-\dfrac{4}{5}$ 时，$f(0)-f(1)=a\ln(\dfrac{a}{a-1})-\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{5}\ln\dfrac{9}{4}-\dfrac{1}{2}>0$.

所以 $f(x_1)-f(x_2)\ge f(0)-f(1)>0$. ………13分

所以 $|f(x_2)-f(x_1)|$ 的最小值为 $f(0)-f(1)=\frac{4}{5}\ln\frac{9}{4}-\frac{1}{2}$.

所以 使得 $|f(x_2)-f(x_1)|\ge m$ 恒成立的 m 的最大值为 $\frac{4}{5}\ln\frac{9}{4}-\frac{1}{2}$.

………14分

21.解:(Ⅰ)数列 A_4 不具有性质 P,数列 A_5 具有性质 P. ………2分

$T_5=\{(1,4),(2,4),(2,5),(3,5)\}$. ………4分

(Ⅱ)"$T_4\neq\varnothing$" 等价于 "证明 $(1,3)$ 与 $(2,4)$ 两元素中至少有一个在 T_4 中".

假设 $(1,3)$ 与 $(2,4)$ 两元素都不在 T_4 中,

则有 $|a_3-a_1|>1$,且 $|a_4-a_2|>1$. ………5分

不妨设 $a_1\leqslant a_2$.

若 $a_2>a_3$,则由 $a_3-a_1=(a_3-a_2)+(a_2-a_1)$,得 $-1\leqslant a_3-a_1<1$,

这与 $|a_3-a_1|>1$ 矛盾. 从而有 $a_2\leqslant a_3$. ………7分

同理 $a_3\leqslant a_4$,从而有 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4$.

所以 $|a_0-a_1|=|a_4-a_1|=(a_4-a_2)+(a_2-a_1)\geqslant a_4-a_2>1$.

这与 A_4 具有性质 P 矛盾.

所以假设不成立,即 $T_4\neq\varnothing$. ………9分

(Ⅲ)设 $a_k=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ $(2\leqslant k\leqslant n-1)$,规定 $k=1$ 时,$a_{k-1}=a_n$;$k=n$ 时,$a_{k+1}=a_1$.

则 $a_{k-1},a_{k+1}\in[a_k,a_k+1]$,所以 $|a_{k+1}-a_{k-1}|\leqslant 1$.

考虑数列 $B_3:a_{k-1},a_k,a_{k+1}$ 和 $C_{n-1}:a_1,a_2,\cdots,a_{k-1},a_{k+1},\cdots,a_n$,

由题设知,他们均具有性质 P. ………11分

设 T_n 中元素个数的最小值为 d_n,所以 $d_n\geqslant d_{n-1}+1$.

所以 $d_n\geqslant d_{n-1}+1\geqslant d_{n-2}+2\geqslant\cdots\geqslant d_4+n-4$.

由(Ⅱ)知 $d_4\geqslant 1$,从而 $d_n\geqslant n-3$. ………13分

当 $n=2m+1$ 时,令 $a_i=i(i=1,2,\cdots,m)$,$a_{m+i}=m+\frac{3}{2}-i$ $(i=1,2,\cdots,m+1)$;

当 $n=2m$ 时,令 $a_i=i(i=1,2,\cdots,m)$,$a_{m+i}=m+\frac{1}{2}-i$ $(i=1,2,\cdots,m)$,

此时均有 $d_n=n-3$.

所以 T_n 中元素个数的最小值为 $n-3$. ………15分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。