北京市朝阳区高三年级高考练习二

数　学

2020. 6

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）在复平面内，复数 $i(1+i)$ 对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

（2）函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$ 的定义域为

（A） $(0,+\infty)$　　（B） $(0,1)\cup(1,+\infty)$　　（C） $[0,+\infty)$　　（D） $[0,1)\cup(1,+\infty)$

（3）若 a ， b ， $c\in\mathbf{R}$ 且 $a>b>c$ ，则下列不等式一定成立的是

（A） $ac^2>bc^2$　　（B） $a^2>b^2>c^2$

（C） $a+c>2b$　　（D） $a-c>b-c$

（4）圆心在直线 $x-y=0$ 上且与 y 轴相切于点 $(0,\ 1)$ 的圆的方程是

（A） $(x-1)^2+(y-1)^2=1$　　（B） $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

（C） $(x-1)^2+(y-1)^2=2$　　（D） $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

（5）直线 l 过抛物线 $y^2=2x$ 的焦点 F ，且 l 与该抛物线交于不同的两点 $A(x_1,y_1)$ ， $B(x_2,y_2)$. 若 $x_1+x_2=3$ ，则弦 AB 的长是

（A） 4　　（B） 5　　（C） 6　　（D） 8

（6）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，若 $b_n=2^{a_n}$ ，则“ $d<0$ ”是“ $\{b_n\}$ 为递减数列”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

（7）已知函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，则下列四个结论中正确的是

（A）函数 $f(x)$ 的图象关于 $(\frac{5\pi}{12},0)$ 中心对称

（B）函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$ 对称

（C）函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内有 4 个零点

（D）函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},0]$ 上单调递增

（8）圭表（如图 1）是我国古代一种通过测量正午日影长度来推定节气的天文仪器，它包括一根直立的标竿（称为“表”）和一把呈南北方向水平固定摆放的与标竿垂直的长尺（称为“圭”）. 当正午太阳照射在表上时，日影便会投影在圭面上，圭面上日影长度最长的那一天定为冬至，日影长度最短的那一天定为夏至. 图 2 是一个根据北京的地理位置设计的圭表的示意图，已知北京冬至正午太阳高度角（即 $\angle ABC$）为 26.5°，夏至正午太阳高度角（即 $\angle ADC$）为 73.5°，圭面上冬至线与夏至线之间的距离（即 DB 的长）为 a，则表高（即 AC 的长）为

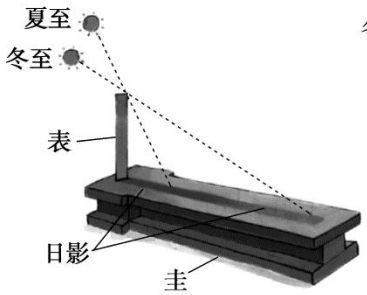


图1

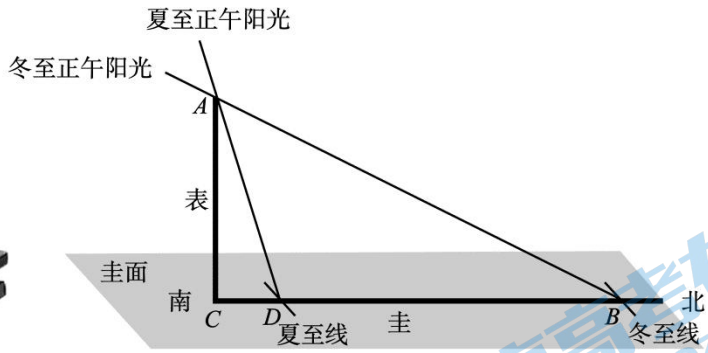


图2

（第 8 题图）

（A）$\frac{a\sin 53^\circ}{2\sin 47^\circ}$　　（B）$\frac{2\sin 47^\circ}{a\sin 53^\circ}$

（C）$\frac{a\tan 26.5^\circ\tan 73.5^\circ}{\tan 47^\circ}$　　（D）$\frac{a\sin 26.5^\circ\sin 73.5^\circ}{\sin 47^\circ}$

（9）在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，$AB=2$，$AD=1$，若 M，N 分别是边 BC，CD 上的点，且满足 $\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的最大值为

（A）2　　（B）4　　（C）5　　（D）6

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

（10）设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果对任意 $x_1 \in D$，都存在唯一的 $x_2 \in D$，使得 $f(x_1)+f(x_2)=m$（m 为常数）成立，那么称函数 $f(x)$ 在 D 上具有性质 Ψ_m．现有函数：

① $f(x)=3x$；　② $f(x)=3^x$；　③ $f(x)=\log_3 x$；　④ $f(x)=\tan x$．

其中，在其定义域上具有性质 Ψ_m 的函数的序号是

（A）①③　　（B）①④

（C）②③　　（D）②④

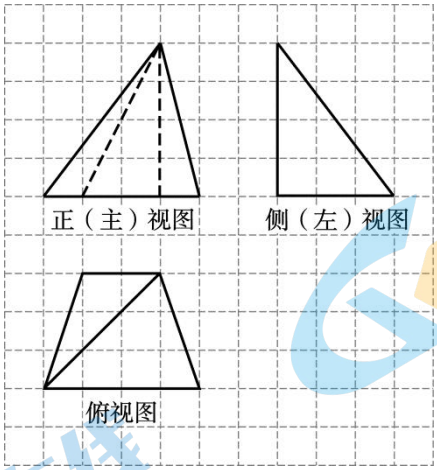
第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(m,3)$，$\boldsymbol{b}=(1,6)$，若 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$，则 $m=$_____．

（12）在 $(\sqrt{x}+\frac{1}{x})^6$ 的展开式中，常数项为_____．（用数字作答）

（13）某四棱锥的三视图如图所示，如果网格纸上小正方形的边长为1，那么该四棱锥的体积为_____．

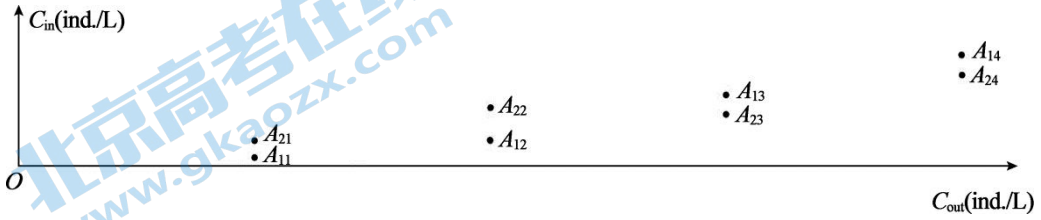


（第 13 题图）

（14）已知双曲线 C 的焦点为 $F_1(0,2)$，$F_2(0,-2)$，实轴长为 2，则双曲线 C 的离心率是_____；若点 Q 是双曲线 C 的渐近线上一点，且 $F_1Q \perp F_2Q$，则 $\triangle QF_1F_2$ 的面积为_____．

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

（15）颗粒物过滤效率η是衡量口罩防护效果的一个重要指标，计算公式为$\eta=\dfrac{C_{\text{out}}-C_{\text{in}}}{C_{\text{out}}}\times 100\%$，其中$C_{\text{out}}$表示单位体积环境大气中含有的颗粒物数量（单位：ind./L），C_{in}表示经口罩过滤后，单位体积气体中含有的颗粒物数量（单位：ind./L）．某研究小组在相同的条件下，对两种不同类型口罩的颗粒物过滤效率分别进行了4次测试，测试结果如图所示．图中点A_{ij}的横坐标表示第i种口罩第j次测试时C_{out}的值，纵坐标表示第i种口罩第j次测试时C_{in}的值$(i=1,2,j=1,2,3,4)$．



（第15题图）

该研究小组得到以下结论：

① 在第1种口罩的4次测试中，第4次测试时的颗粒物过滤效率最高；

② 在第2种口罩的4次测试中，第3次测试时的颗粒物过滤效率最高；

③ 在每次测试中，第1种口罩的颗粒物过滤效率都比第2种口罩的颗粒物过滤效率高；

④ 在第3次和第4次测试中，第1种口罩的颗粒物过滤效率都比第2种口罩的颗粒物过滤效率低．

其中，所有正确结论的序号是_____．

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求．全部选对得5分，不选或有错选得0分，其他得3分．

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，其前 n 项和为 S_n，且 $a_5=1$，_____．若存在正整数 n，使得 S_n 有最小值．

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求 S_n 的最小值．

从①$a_3=-1$，②$d=2$，③$d=-2$ 这三个条件中选择符合题意的一个条件，补充在上面问题中并作答．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

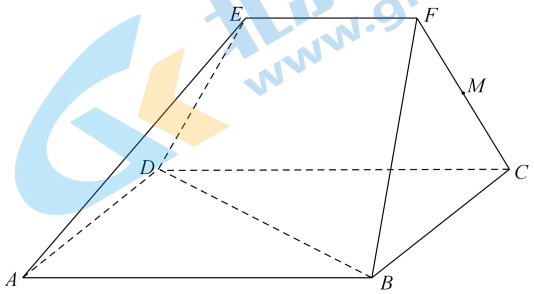
（17）（本小题 14 分）

如图，在五面体 $ABCDEF$ 中，面 $ABCD$ 是正方形，$AD\perp DE$，$AD=4$，$DE=EF=2$，且 $\angle EDC=\dfrac{\pi}{3}$．

（Ⅰ）求证：$AD\perp$ 平面 $CDEF$；

（Ⅱ）求直线 BD 与平面 ADE 所成角的正弦值；

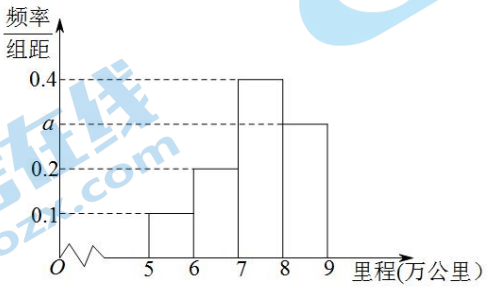
（Ⅲ）设 M 是 CF 的中点，棱 AB 上是否存在点 G，使得 $MG//$ 平面 ADE？若存在，求线段 AG 的长；若不存在，说明理由．



关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

（18）（本小题 14 分）

近年来，随着 5G 网络、人工智能等技术的发展，无人驾驶技术也日趋成熟．为了尽快在实际生活中应用无人驾驶技术，国内各大汽车研发企业都在积极进行无人驾驶汽车的道路安全行驶测试．某机构调查了部分企业参与测试的若干辆无人驾驶汽车，按照每辆车的行驶里程（单位：万公里）将这些汽车分为 4 组：$[5,6)$，$[6,7)$，$[7,8)$，$[8,9]$ 并整理得到如下的频率分布直方图：



（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）该机构用分层抽样的方法，从上述 4 组无人驾驶汽车中随机抽取了 10 辆作为样本．从样本中行驶里程不小于 7 万公里的无人驾驶汽车中随机抽取 2 辆，其中有 X 辆汽车行驶里程不小于 8 万公里，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）设该机构调查的所有无人驾驶汽车的行驶里程的平均数为 μ_0．若用分层抽样的方法从上述 4 组无人驾驶汽车中随机抽取 10 辆作为样本，其行驶里程的平均数为 μ_1；若用简单随机抽样的方法从上述无人驾驶汽车中随机抽取 10 辆作为样本，其行驶里程的平均数为 μ_2．有同学认为 $|\mu_0-\mu_1|<|\mu_0-\mu_2|$，你认为正确吗？说明理由．

（19）（本小题 14 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且椭圆 C 经过点 $(1,\dfrac{\sqrt{6}}{2})$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）已知过点 $P(4,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 A，B，与直线 $x=1$ 交于点 Q，设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{AQ}=\mu\overrightarrow{QB}$ $(\lambda,\ \mu\in\mathbf{R})$，求证：$\lambda+\mu$ 为定值．

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-ax$ $(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线的斜率为1.

（ⅰ）求 a 的值；

（ⅱ）证明：函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内有唯一极值点；

（Ⅱ）当 $a\le 1$ 时，证明：对任意 $x\in(0,\pi)$，$f(x)>0$.

（21）（本小题 14 分）

设集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，其中 a_1，a_2，a_3，a_4 是正整数，记 $S_A=a_1+a_2+a_3+a_4$. 对于 a_i，$a_j\in A$ $(1\le i<j\le 4)$，若存在整数 k，满足 $k(a_i+a_j)=S_A$，则称 a_i+a_j 整除 S_A，设 n_A 是满足 a_i+a_j 整除 S_A 的数对 (i,j) $(i<j)$ 的个数.

（Ⅰ）若 $A=\{1,2,4,8\}$，$B=\{1,5,7,11\}$，写出 n_A，n_B 的值；

（Ⅱ）求 n_A 的最大值；

（Ⅲ）设 A 中最小的元素为 a，求使得 n_A 取到最大值时的所有集合 A.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

北京市朝阳区高三年级高考练习二

数学　参考答案　　2020. 6

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

（1）B　（2）B　（3）D　（4）A　（5）A

（6）C　（7）C　（8）D　（9）C　（10）A

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$\frac{1}{2}$　（12）15　（13）12

（14）2；$2\sqrt{3}$　（15）②④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程）

（16）（本小题 14 分）

解：（不可以选择③作为补充条件.）

选择①作为补充条件.

解答如下：（Ⅰ）因为 $a_5=1$，$a_3=-1$，所以 $d=1$.

所以 $a_n=1+(n-5)\times 1=n-4\ (n\in\mathbf{N}^*)$.　……4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $a_1=-3$.

所以 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{1}{2}n(n-7)$.

因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以当 $n=3$ 或 4 时，S_n 取得最小值，最小值为 -6.

故存在正整数 $n=3$ 或 4，使得 S_n 有最小值，最小值为 -6.　……14 分

选择②作为补充条件.

解答如下：（Ⅰ）因为 $a_5=1$，$d=2$，

所以 $a_n=1+(n-5)\times 2=2n-9\ (n\in\mathbf{N}^*)$.　……4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $a_1=-7$.

所以 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=n^2-8n$. 所以当 $n=4$ 时，S_n 取得最小值，最小值为 -16.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

故存在正整数 $n=4$，使得 S_n 有最小值，最小值为 -16．　　……14 分

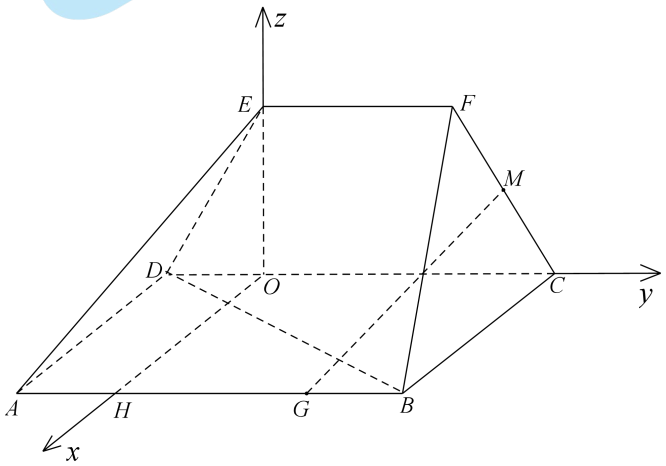
（17）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $ABCD$ 是正方形，所以 $AD \perp CD$．

又因为 $AD \perp DE$，$DE \subset$ 平面 $CDEF$，

$CD \subset$ 平面 $CDEF$，$CD \cap DE = D$，

所以 $AD \perp$ 平面 $CDEF$．　……4 分



（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$AD \perp$ 平面 $CDEF$，

所以平面 $ABCD \perp$ 平面 $CDEF$．

过点 E 作 $EO \perp CD$，垂足为 O，

则 $OE \perp$ 平面 $ABCD$．

在平面 $ABCD$ 内，过 O 作 $OH \perp CD$，

则 $OE \perp OH$．

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$，

因为 $AD=4$，$DE=EF=2$，且 $\angle EDC=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $DO=1$，$OE=\sqrt{3}$．

则 $A(4,-1,0)$，$B(4,3,0)$，$C(0,3,0)$，$D(0,-1,0)$，$E(0,0,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{AD}=(-4,0,0)$，$\overrightarrow{AE}=(-4,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BD}=(-4,-4,0)$．

设平面 ADE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-4x=0,\\ -4x+y+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

令 $y=\sqrt{3}$，则 $x=0$，$z=-1$，于是 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},-1)$．

设直线 BD 与平面 ADE 所成角为 q，

则 $\sin q=|\cos\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{BD}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BD}|}=\dfrac{4\sqrt{3}}{2\times 4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$．

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

所以直线 BD 与平面 ADE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$. ……10

分

（Ⅲ）棱 AB 上存在点 G，使得 $MG//$ 平面 ADE，此时 $AG=3$. 理由如下：

因为 $DC//AB$，$DC\not\subset$ 平面 $ABFE$，$AB\subset$ 平面 $ABFE$，

所以 $DC//$ 平面 $ABFE$.

因为 $DC\subset$ 平面 $DCFE$，平面 $DCFE\cap$ 平面 $ABFE=EF$，

所以 $DC//EF$.

由（Ⅱ）知，$F(0,2,\sqrt{3})$，$M(0,\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

设 $G(4,y_1,0)(-1\le y_1\le 3)$，则 $\overrightarrow{MG}=(4,y_1-\frac{5}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

由（Ⅱ）知，平面 ADE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},-1)$.

若 $MG//$ 平面 ADE，则 $\overrightarrow{MG}\cdot\boldsymbol{n}=0$，即 $\sqrt{3}(y_1-\frac{5}{2})+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$，解得 $y_1=2$，即 $G(4,2,0)$.

经验证，此时 $MG//$ 平面 ADE.

所以棱 AB 上存在点 G，使得 $MG//$ 平面 ADE，此时 $AG=3$. ……14 分

（18）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由题意知，$1\times(0.1+0.2+0.4+a)=1$，所以 $a=0.3$. ……3 分

（Ⅱ）4 组无人驾驶汽车的数量比为 $1:2:4:3$，若使用分层抽样抽取 10 辆汽车，

则行驶里程在 $[7,8)$ 这一组的无人驾驶汽车有 $10\times\frac{4}{10}=4$ 辆，

行驶里程在 $[8,9]$ 这一组的无人驾驶汽车有 $10\times\frac{3}{10}=3$ 辆.

由题意可知，X 的所有可能取值为 0，1，2.

$P(X=0)=\frac{C_4^2}{C_7^2}=\frac{2}{7}$，$P(X=1)=\frac{C_4^1C_3^1}{C_7^2}=\frac{4}{7}$，$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{1}{7}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，获取更多试题资料及排名分析信息。

P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

所以 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$. ……11 分

（Ⅲ）这种说法不正确．理由如下：

由于样本具有随机性，故 μ_1， μ_2 是随机变量，受抽样结果影响．

因此有可能 μ_1 更接近 μ_0，也有可能 μ_2 更接近 μ_0，

所以 $|\mu_0-\mu_1|<|\mu_0-\mu_2|$ 不恒成立．

所以这种说法不正确． ……14 分

（19）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由题意可知 $\begin{cases} a^2=b^2+c^2, \\ \frac{1}{a^2}+\frac{(\frac{\sqrt{6}}{2})^2}{b^2}=1, \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$ 得 $b^2=2$， $a^2=4$．

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$． ……5 分

（Ⅱ）由题意可知，直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)$．

由 $\begin{cases} y=k(x-4), \\ x-1=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1, \\ y=-3k. \end{cases}$ 所以 $Q(1,-3k)$．

由 $\begin{cases} y=k(x-4), \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 得 $x^2+2(kx-4k)^2=4$．

整理得 $(1+2k^2)x^2-16k^2x+(32k^2-4)=0$．

由 $\Delta=(-16k^2)^2-4(1+2k^2)(32k^2-4)>0$，得 $-\frac{\sqrt{6}}{6}<k<\frac{\sqrt{6}}{6}$．

设直线 l 与椭圆 C 的交点 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

则 $x_1+x_2=\frac{16k^2}{1+2k^2}$， $x_1x_2=\frac{32k^2-4}{1+2k^2}$.

因为 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$， $\overrightarrow{AQ}=\mu\overrightarrow{QB}$ 且 $\overrightarrow{AP}=(4-x_1,-y_1)$， $\overrightarrow{PB}=(x_2-4,y_2)$，

$\overrightarrow{AQ}=(1-x_1,-3k-y_1)$， $\overrightarrow{QB}=(x_2-1,y_2+3k)$，

所以 $\lambda+\mu=\frac{4-x_1}{x_2-4}+\frac{1-x_1}{x_2-1}=\frac{(4-x_1)(x_2-1)+(1-x_1)(x_2-4)}{(x_2-4)(x_2-1)}$

$=\frac{5(x_1+x_2)-2x_1x_2-8}{(x_2-4)(x_2-1)}$.

因为 $5(x_1+x_2)-2x_1x_2-8=5\times\frac{16k^2}{1+2k^2}-2\times\frac{32k^2-4}{1+2k^2}-8$

$=\frac{80k^2-64k^2+8-8-16k^2}{1+2k^2}=0$，

所以 $\lambda+\mu=0$.

……14 分

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）（ⅰ）因为 $f(x)=2\sin x-x\cos x-ax$ ，所以 $f'(x)=2\cos x-(\cos x-x\sin x)-a=\cos x+x\sin x-a$.

因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线的斜率为1，

所以 $f'(0)=1$，即 $1-a=1$，故 $a=0$.

经检验，符合题意.

……4 分

（ⅱ）由（ⅰ）可知 $f(x)=2\sin x-x\cos x$， $f'(x)=\cos x+x\sin x$.

设 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=x\cos x$.

令 $g'(x)=0$，又 $x\in(0,\pi)$，得 $x=\frac{\pi}{2}$.

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时， $g'(x)>0$；当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时， $g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内单调递增，在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内单调递减.

又 $g(0)=1$， $g(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$， $g(\pi)=-1$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

因此，当 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 时， $g(x)>g(0)>0$，即 $f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上无极值点；

当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时， $g(x)=0$ 有唯一解 x_0，即 $f'(x)=0$ 有唯一解 x_0，

且易知当 $x\in(\frac{\pi}{2},x_0)$ 时， $f'(x)>0$，当 $x\in(x_0,\pi)$ 时， $f'(x)<0$，

故此时 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内有唯一极大值点 x_0.

综上可知，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内有唯一极值点. 10分

（Ⅱ） 因为 $f'(x)=\cos x+x\sin x-a$，设 $h(x)=f'(x)$，则 $h'(x)=x\cos x$.

令 $h'(x)=0$，又 $x\in(0,\pi)$，得 $x=\frac{\pi}{2}$. 且当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时， $h'(x)>0$；当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时， $h'(x)<0$，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内单调递增，在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内单调递减.

当 $a\le 1$ 时， $f'(0)=1-a\ge 0$， $f'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-a>0$， $f'(\pi)=-1-a$.

（1）当 $f'(\pi)=-1-a\ge 0$，即 $a\le -1$ 时， $f'(x)\ge 0$.

此时函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内单调递增， $f(x)>f(0)=0$；

（2）当 $f'(\pi)=-1-a<0$，即 $-1<a\le 1$ 时，因为 $f'(0)=1-a\ge 0$， $f'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-a>0$，

所以，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内 $f'(x)\ge 0$ 恒成立，而在区间 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内 $f'(x)$ 有且只有一个零点，记为 x_1，

则函数 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 内单调递增，在 (x_1,π) 内单调递减.

又因为 $f(0)=0$， $f(\pi)=(1-a)\pi\ge 0$，所以此时 $f(x)>0$.

由（1）（2）可知，当 $a\le 1$ 时，对任意 $x\in(0,\pi)$，总有 $f(x)>0$. 15分

（21）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ） $n_A=2$； $n_B=4$. 4分

（Ⅱ）不妨设 $0<a_1<a_2<a_3<a_4$.

因为 $\frac{1}{2}S_A=\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3+a_4)<a_2+a_4<a_3+a_4<S_A$，所以 a_2+a_4， a_3+a_4 不能整除 S_A.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

因为 (i,j) 最多有 $(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$，$(2,3)$，$(2,4)$，$(3,4)$ 六种情况，

而 $(2,4)$，$(3,4)$ 不满足题意，所以 $n_A \le 6-2=4$.

当 $A=\{1,5,7,11\}$ 时，$n_A=4$，所以 n_A 的最大值为 4. ……9 分

（Ⅲ）假设 $0<a=a_1<a_2<a_3<a_4$.

由（Ⅱ）可知，当 n_A 取到最大值 4 时，a_1+a_2，a_1+a_3，a_1+a_4，a_2+a_3 均能整除 S_A.

因为 $\frac{1}{2}S_A \le \max\{a_1+a_4,a_2+a_3\}<S_A$，故 $\frac{1}{2}S_A=\max\{a_1+a_4,a_2+a_3\}$，

所以 $a_1+a_4=a_2+a_3$.

设 $u=a_1+a_2$，$v=a_1+a_3$，则 u，v 是 $S_A=2(a_2+a_3)=2(u+v-2a_1)$ 的因数，

所以 v 是 $2(u-2a_1)$ 的因数，且 u 是 $2(v-2a_1)$ 的因数.

因为 $u<v$，所以 $2(u-2a_1)<2u<2v$，

因为 v 是 $2(u-2a_1)$ 的因数，所以 $v=2u-4a_1$.

因为 u 是 $2(v-2a_1)=4u-12a_1$ 的因数，所以 u 是 $12a_1$ 的因数.

因为 $u<v=2u-4a_1$，所以 $u>4a_1$，所以 $u=6a_1=6a$，或 $u=12a_1=12a$.

故 $A=\{a_1,5a_1,7a_1,11a_1\}$，或 $A=\{a_1,11a_1,19a_1,29a_1\}$.

所以当 n_A 取到最大值 4 时，$A=\{a,5a,7a,11a\}$，或 $A=\{a,11a,19a,29a\}$. ……14 分

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，获取更多试题资料及排名分析信息。

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯（ID：bj-gaokao）
扫码关注获取更多

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。