

2023 年茂名市高三级第一次综合测试

数学试卷

本试卷共4页, 22小题, 满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号填写在答题卡指定的位置上。
2. 选择题每小题选出答案后, 用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑; 如需改动, 擦干净后, 再选涂其它答案, 答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新的答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁, 考试结束后, 将答题卡交回。

一、单选题: 本大题共8小题, 每小题5分, 满分40分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | -1 < x < 3\}$, $B = \{-2, -1, 0, 3\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{-1, 3\}$ B. $\{x | -1 < x < 3\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{0\}$

2. 复平面内表示复数 $z = i(2 - 3i)$ 的点位于

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} = c$, $\overrightarrow{AC} = b$, 若点 M 满足 $\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{BM}$, 则 $\overrightarrow{AM} =$

- A. $\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c$ B. $\frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c$ C. $\frac{5}{3}c - \frac{2}{3}b$ D. $\frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c$

4. 将4个6和2个8随机排成一行, 则2个8不相邻的情况有

- A. 480种 B. 240种 C. 15种 D. 10种

5. 蒙古包是蒙古族牧民居住的一种房子, 建造和搬迁都很方便, 适于牧业生产和游牧生活。

蒙古包下半部分近似一个圆柱, 高为 $2m$; 上半部分近似一个与下半部分同底的圆锥, 其母线

长为 $2\sqrt{3}m$, 轴截面(过圆锥旋转轴的截面)是面积为 $3\sqrt{3}m^2$ 的等腰

钝角三角形, 则该蒙古包的体积约为



A. $21\pi\text{mm}^3$

B. $18\pi\text{mm}^3$

C. $(18+3\sqrt{3})\pi\text{mm}^3$

D. $(20+3\sqrt{3})\pi\text{mm}^3$

6. 下列四个函数中, 最小正周期与其余三个函数不同的是

A. $f(x) = \cos^2 x + \sin x \cos x$ $T = \pi$

B. $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2 \sin x \cos x}$ $T = \pi$

C. $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{3})$

D. $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) \cos(x + \frac{\pi}{6})$ $T = \pi$
 $= \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{3})$

7. 设 $a = 2|\ln 2 - \frac{3}{5}|$, $b = \ln \frac{3}{e^2} + 1$, $c = \ln \frac{5}{e^2} + \frac{2}{3}$, 则

A. $a < b < c$

B. $b < a < c$

C. $c < a < b$

D. $b < c < a$

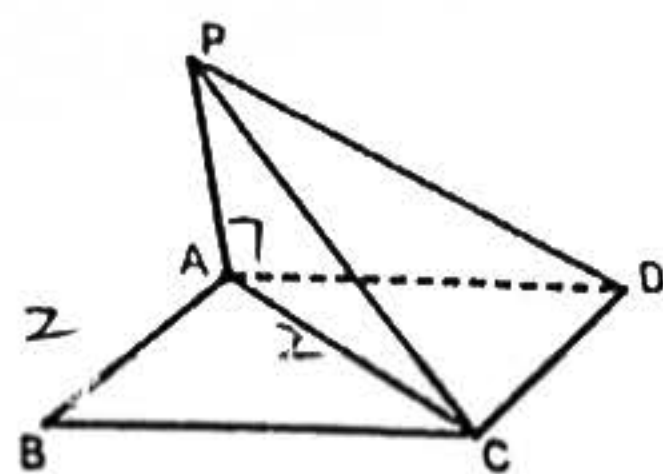
8. 已知菱形 $ABCD$ 的各边长为 2, $\angle B = 60^\circ$. 将 $\triangle ABC$ 沿 AC 折起, 折起后记点 B 为 P , 连接 PD , 得到三棱锥 $P-ACD$, 如图所示, 当三棱锥 $P-ACD$ 的表面积最大时, 三棱锥 $P-ACD$ 的外接球体积为

A. $\frac{5\sqrt{2}}{3}\pi$

B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$

C. $2\sqrt{3}\pi$

D. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$



二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 已知空间中三条不同的直线 a 、 b 、 c , 三个不同的平面 α 、 β 、 γ , 则下列说法中正确的是

A. 若 $a \parallel b$, $a \perp \alpha$, 则 $b \perp \alpha$

B. 若 $\alpha \cap \beta = a$, $\beta \cap \gamma = b$, $\alpha \cap \gamma = c$, 则 $a \parallel b \parallel c$

C. 若 $\alpha \perp \beta$, $a \subset \alpha$, $a \perp \beta$, 则 $a \parallel \alpha$

D. 若 $c \perp \beta$, $c \perp \gamma$, 则 $\beta \parallel \gamma$

10. 已知函数 $f(x)$ 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x) = f(-x)$, $f(x+1)$ 为奇函数, 且 $x \in [0, 1)$ 时,

$f(x) = x^2$, 下列结论正确的是

A. 函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(1, 0)$ 中心对称

B. $f(x)$ 是周期为 2 的函数

C. $f(-1) = 0$

D. $f(\frac{7}{2}) = \frac{1}{4}$

11. 已知抛物线 $C: x^2 = 4y$, F 为抛物线 C 的焦点, 下列说法正确的是

A. 若抛物线 C 上一点 P 到焦点 F 的距离是 4, 则 P 的坐标为 $(-2\sqrt{3}, 3)$ 、 $(2\sqrt{3}, 3)$

B. 抛物线 C 在点 $(-2, 1)$ 处的切线方程为 $x + y + 1 = 0$

一个顶点在原点 O 的正三角形与抛物线相交于 A, B 两点, $\triangle OAB$ 的周长为 $8\sqrt{3}$

D. 点 H 为抛物线 C 上的任意一点, 点 $G(0, -1)$, $|HG| = t|HF|$, 当 t 取最大值时, $\triangle GFH$ 的面积为 2

12. e 是自然对数的底数, $m, n \in \mathbb{R}$, 已知 $me^m + \ln n > n \ln n + m$, 则下列结论一定正确的是

A. 若 $m > 0$, 则 $m - n > 0$

B. 若 $m > 0$, 则 $e^m - n > 0$

C. 若 $m < 0$, 则 $m + \ln n < 0$

D. 若 $m < 0$, 则 $e^m + n > 2$

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $(x + \frac{1}{x})^8$ 的展开式中 x^2 的系数为 7 (用数字作答).

14. 过四点 $(-1, 1), (1, -1), (2, 2), (3, 1)$ 中的三点的一个圆的方程为 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ (写出一个即可).

15. e 是自然对数的底数, $f(x) = e^{\cos(2\pi x)} + e^{2x} - 2ex - \frac{1}{e}$ 的零点为 0.

16. 已知直线 $x = 2m$ 与双曲线 $C: \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1 (m > 0, n > 0)$ 交于 A, B 两点 (A 在 B 的上方), A 为

BD 的中点, 过点 A 作直线与 y 轴垂直且交于点 E , 若 $\triangle BDE$ 的内心到 y 轴的距离不小于 $\frac{3}{2}m$,

则双曲线 C 的离心率取值范围是 $[\frac{5}{4}, +\infty)$.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_n > 0$, $a_n^2 + 2a_n = 4S_n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \frac{1}{a_n}$, T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求 T_n , 并证明: $\frac{1}{8} \leq T_n < \frac{1}{4}$.

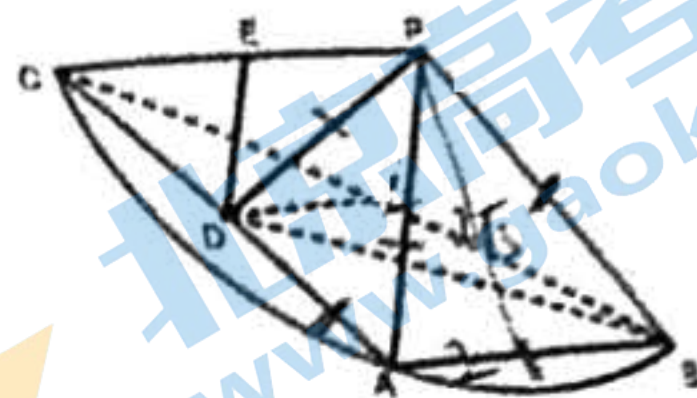
18. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a = b + 2b \cos C$.

(1) 求证: $C = 2B$.

(2) 求 $\frac{a+c}{b}$ 的取值范围.

19. (12分) 如图所示, 三棱锥 $P-ABC$, BC 为圆 O 的直径, A 是弧 $\widehat{BC}$ 上异于 B, C 的点, D 在直线 AC 上, $OD \parallel$ 平面 PAB , E 为 PC 的中点.

(1) 证: $DE \parallel$ 平面 PAB ;
(2) 若 $PA = PB = PD = AB = AD = 4$, 求平面 PAB 与平面 PBC 夹角的余弦值.



20. (12分) 学校举办学生与智能机器人的围棋比赛, 现有来自两个班的学生报名表, 分别装于两袋, 第一袋有 5 名男生和 4 名女生的报名表, 第二袋有 6 名男生和 5 名女生的报名表, 现随机选择一袋, 然后从中随机抽取 2 名学生, 让他们参加比赛.

(1) 求恰好抽到一名男生和一名女生的概率;
(2) 比赛记分规则如下: 在一轮比赛中, 两人同时赢积 2 分, 一赢一输积 0 分, 两人同时输积 -2 分. 现抽中甲、乙两位同学, 每轮比赛甲赢概率为 $\frac{3}{5}$, 乙赢概率为 $\frac{2}{5}$, 比赛共进行二轮.

(i) 在一轮比赛中, 求这两名学生得分的分布列;

(ii) 在两轮比赛中, 求这两名学生得分的分布列和均值.

21. (12分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点 F 为 $(-\sqrt{7}, 0)$, 过椭圆左顶点和上顶点的直线的斜率为 $\frac{3}{4}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 若 $N(t, 6)$ 为平面上一点, C, D 分别为椭圆的上、下顶点, 直线 NC, ND 与椭圆的另一个交点分别为 P, Q . 试判断点 F 到直线 PQ 的距离是否存在最大值? 如果存在, 求出最大值; 如果不存在, 请说明理由.

22. (12分) 若函数 $f(x) = a \ln x - \frac{1}{2}x^2 + a + \frac{1}{2} (x > 0)$ 有两个零点 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$ 处的切线交于点 (x_3, y_3) , 求证: $2x_3 < x_1 + x_2 < 2(a+1)$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯