北京三十五中学高二数学测试

2023. 10

一. 选择题

1.下列说法正确的是（　　）

A．任何三个不共线的向量可构成空间向量的一个基底

B．空间的基底有且仅有一个

C．两两垂直的三个非零向量可构成空间的一个基底

D．基底$\{a，b，c\}$中基向量与基底$\{e，f，g\}$基向量对应相等

2.若直线l的方向向量为$\vec{a}=(1,-2,3)$,平面α的法向量为$\vec{n}=(-3,6,-9)$,则(　)

A．$l\perp\alpha$　　B．$l//\alpha$　　C．$l\subset\alpha$　　D．l与α位置关系不确定

3．在正四面体$P-ABC$中，棱长为2，且E是棱AB中点，则$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{BC}$的值为(　　)

A．-1　　B．1　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\dfrac{7}{3}$

4．已知$\overrightarrow{PA}=$（2，1，﹣3），$\overrightarrow{PB}=$（﹣1，2，3），$\overrightarrow{PC}=$（7，6，λ），若P，A，B，C四点共面，则λ=（　　）

A．9　　B．﹣9　　C．﹣3　　D．3

5.“直线 L 垂直于平面 α 内无数条直线”是“直线 L 垂直于平面 α”的（　　）

A．充要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　D．既不充分也不必要条件

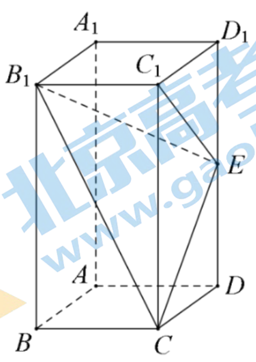
6. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M，N分别为AD，C_1D_1的中点，为侧面BCC_1B_1的中心，则异面直线MN与OD_1所成角的余弦值为(　　　)

A．$\dfrac{1}{6}$　　B．$\dfrac{1}{4}$　　C．$-\dfrac{1}{6}$　　D．$-\dfrac{1}{4}$

7．已知正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=2AB$，则 CD 与平面BDC_1所成角的正弦值等于（ ）

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．$\dfrac{1}{3}$

8. 若长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是边长为 2 的正方形，高为 4，E 是 DD_1 的中点，则（　　）



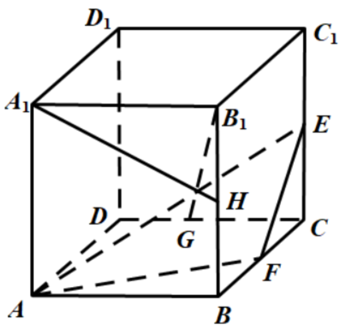
A. $B_1E\perp A_1B$

B. 平面 B_1CE// 平面 A_1BD

C. 三棱锥 C_1-B_1CE 的体积为 2

D. 三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 的外接球的表面积为 24π

9. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F、G、H 分别为 CC_1、BC、CD、BB、BB_1 的中点，则下列结论正确的是（　　）



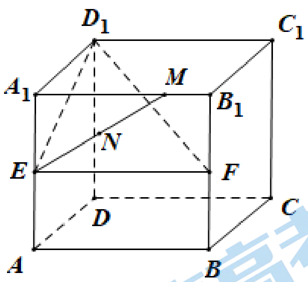
A. $B_1G\perp BC$

B. 平面 $AEF\cap$ 平面 $AA_1D_1D=AD_1$

C. $A_1H\perp$ 面 AEF

D. 二面角 $E-AF-C$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{4}$

10. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 AA_1、BB_1 的中点，M 为棱 A_1B_1 上的一点，且 $A_1M=\lambda(0<\lambda<2)$，设点 N 为 ME 的中点，则点 N 到平面 D_1EF 的距离为（　　）



A. $\sqrt{3}\lambda$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}\lambda}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

二、填空题

11．若 $\vec{a}=(2,\ -3,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ 0,\ 3)$，$\vec{c}=(3,\ 4,\ 2)$，则 $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=$__3________

12．已知 l，m 是平面 α 外的两条不同直线．给出下列三个论断：

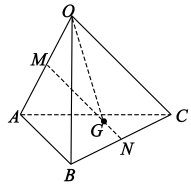
①$l\perp m$；　②$m\parallel\alpha$；　③$l\perp\alpha$ ．

以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：

①③→②或②③→①．________

13. 如右图，三棱锥 O-ABC 中，M、N 分别为 OA、BC 的中点，点 G 在线段 MN 上，且 $\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{GN}$，

用基底 $\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$ 表示向量 $\overrightarrow{OG}$，则 $\overrightarrow{OG}=$___$\frac{1}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{OC}$_ ．



14. 已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，直线 B_1D_1 与平面 A_1BCD_1 所成角的大小为____$\frac{\pi}{6}$.

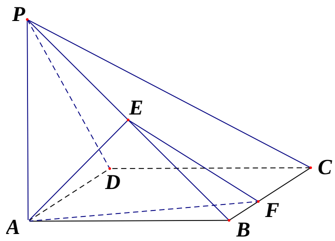
15. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，

$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AB=2$，E 为线段 PB 的中点，

F 为线段 BC 上的动点，

平面 AEF 与平面 PBC __________(填"垂直"或"不垂直")；

$\triangle AEF$ 的面积的最大值为__________.　　垂直，$\sqrt{3}$



16. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 O 为底面 $ABCD$ 的中心，点 P 在侧面

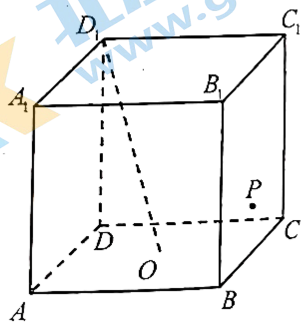
BB_1C_1C 的边界及其内部运动．给出下列四个结论：

① $D_1O\perp AC$；

②存在一点 P，$D_1O//B_1P$；

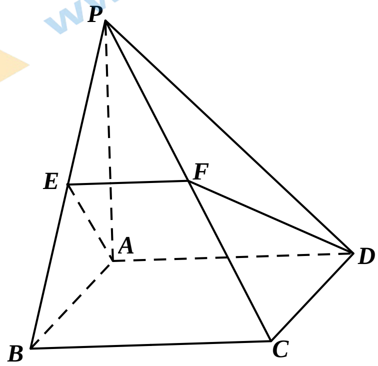
③若 $D_1O\perp OP$，则 $\triangle D_1C_1P$ 面积的最大值为 $\sqrt{5}$；

④若 P 到直线 D_1C_1 的距离与到点 B 的距离相等，则 P 的轨迹为直线的一部分．其中所有正确结论的序号__①③④______.



三、解答题

17. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，侧面 PAD 为等腰直角三角形，且 $\angle PAD=\frac{\pi}{2}$，点 F 为棱 PC 上的点，平面 ADF 与棱 PB 交于点 E.



（Ⅰ）求证：$EF // AD$；

（Ⅱ）从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，求平面 PCD 与平面 $ADFE$ 所成锐二面角的大小.

条件①：$AE=\sqrt{2}$；

条件②：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$；

条件③：$PB\perp FD$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

解：（Ⅰ）证明：因为底面 $ABCD$ 是正方形，所以 $AD // BC$，

$BC\subset$ 平面 PBC，$AD\not\subset$ 平面 PBC，

所以 $AD //$ 平面 PBC

又因为平面 ADF 与 PB 交于点 E.

$AD\subset$ 平面 $ADFE$，平面 $PBC\cap$ 平面 $ADFE=EF$，

所以 $EF // AD$.

（Ⅱ）选条件①②

侧面 PAD 为等腰直角三角形，且 $\angle PAD=\frac{\pi}{2}$，

即 $PA=AD=2$，$PA\perp AD$

平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PA\subset$ 平面 PAD，

则 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，又 $ABCD$ 为正方形，所以 $PA\perp AB, PA\perp AD, AB\perp AD$.

以点 A 为坐标原点，AB, AD, AP 方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴正方向，建立如图所示空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 $A(0,0,0), P(0,0,2), C(2,2,0), B(2,0,0), D(0,2,0)$

因为 $AE=\sqrt{2}$，所以点 E 为 PB 的中点，则 $E(1,0,1)$

从而：$\overrightarrow{PC}=(2,2,-2), \overrightarrow{AD}=(0,2,0), \overrightarrow{AE}=(1,0,1)$，

设平面 $ADFE$ 的法向量为：$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

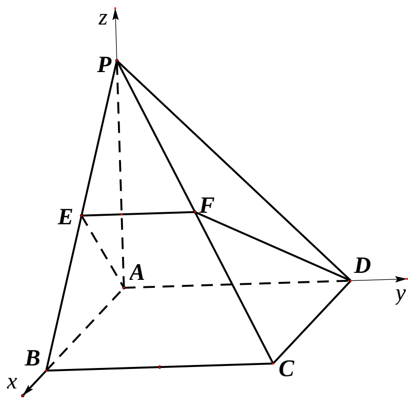
则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=x+z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=2y=0\end{cases}$，

令 $x=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(1,0,-1)$

（方法 2：因为 PAB 为等腰三角形，则 $PB\perp AE, PB\perp AD, AE\cap AD=A$

$PB\perp$ 平面 $ADFE$，则 $\overrightarrow{PB}=(2,0,-2)$ 平面 $ADFE$ 的法向量）

设平面 PCD 的法向量为：$\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，则



$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=2y-2z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=2x+2y-2z=0\end{cases}$，

令 $y=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$

所以 $|\cos<\overrightarrow{PB},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PB}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{2}$

则两平面所成的锐二面角为 $\dfrac{\pi}{3}$

选条件①③

侧面 PAD 为等腰直角三角形，且 $\angle PAD=\dfrac{\pi}{2}$，即 $PA=AD=2, PA\perp AD$

$AD\perp AB, PA\cap AB=A$，可得 $AD\perp$ 平面 PAB，$PB\subset$ 平面 PAB，则 $AD\perp PB$.

又因为 $PB\perp FD, AD\cap FD=D,$

则 $PB\perp$ 平面 $ADFE$,$AE\subset$ 平面 $ADFE,$ 则 $PB\perp AE$

因为 $PA=AB$，所以 $\triangle PAB$ 为等腰三角形，所以点 E 为 PB 的中点

又因为 $AE=\sqrt{2}$，所以 $\triangle PAB$ 为等腰直角三角形，

下面同①②

选条件②③侧面 PAD 为等腰直角三角形，且 $\angle PAD=\dfrac{\pi}{2}$，

即 $PA=AD=2, PA\perp AD$ 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PA\subset$ 平面 PAD ,则 $PA\perp$ 平面 $ABCD, ABCD$ 为正方形，

所以 $PA\perp AB, PA\perp AD, AB\perp AD$.

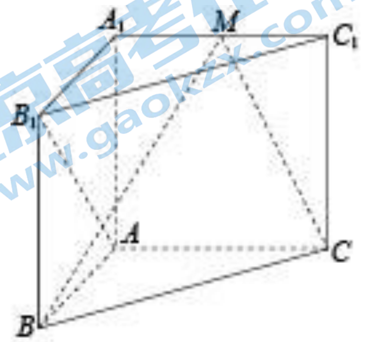
又因为 $PB\perp FD, AD\cap FD=D,$ 则 $PB\perp$ 平面 $ADFE$，$AE\subset$ 平面 $ADFE,$

则 $PB\perp AE$

因为 $PA=AB$，所以 $\triangle PAB$ 为等腰三角形，所以点 E 为 PB 的中点.

下面同①②

18.如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AA_1\perp$ 平面 ABC， $AB\perp AC$， $AB=AC=AA_1=1$，M 为线段 A_1C_1 上的一点.



（Ⅰ）求证： $BM\perp AB_1$；

（Ⅱ）若直线 AB_1 与平面 BCM 所成角为 $\frac{\pi}{4}$，求点 A_1 到平面 BCM 的距离.

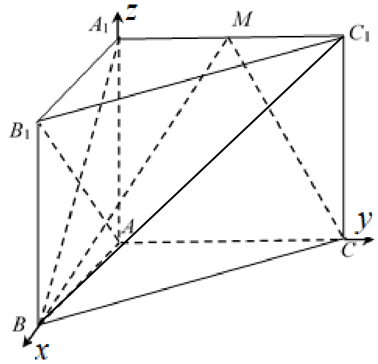
解：（I）因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp AB$， $AA_1\perp AC$.

因为 $AB\perp AC$，所以 $AC\perp$ 平面 AA_1B_1B.所以 $AC\perp AB_1$.

因为在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AC\,//\,A_1C_1$，

所以 $A_1C_1\perp AB_1$.

又因为 $AA_1=AB$，所以四边形 AA_1B_1B 为正方形.



连结 A_1B，则 $AB_1\perp A_1B$.

又因为 $A_1B\cap A_1C_1=A_1$，所以 $AB_1\perp$ 平面 BA_1C_1

因为 $BM\subset$ 平面 BA_1C_1，所以 $AB_1\perp BM$.

（II）因为 AB，AC， AA_1 两两垂直，所以如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$.

可得 $A(0,0,0)$， $B(1,0,0)$， $C(0,1,0)$， $A_1(0,0,1)$， $B_1(1,0,1)$， $C_1(0,1,1)$.

则 $\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$， $\overrightarrow{AB_1}=(1,0,1)$， $\overrightarrow{A_1B}=(1,0,-1)$.

设 $\overrightarrow{A_1M}=\lambda\overrightarrow{A_1C_1}(0\le\lambda\le1)$，

则 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1M}=\overrightarrow{BA_1}+\lambda\overrightarrow{A_1C_1}=(-1,0,1)+\lambda(0,1,0)=(-1,\lambda,1)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 BCM 的法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y=0,\\ -x+\lambda y+z=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=1$， $z=1-\lambda$，可得 $\boldsymbol{n}=(1,1,1-\lambda)$.

则 $\sin\frac{\pi}{4}=\left|\cos<\overrightarrow{AB_1},\ \boldsymbol{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AB_1}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right|\left|\boldsymbol{n}\right|}=\frac{|2-\lambda|}{\sqrt{2}\times\sqrt{\lambda^2-2\lambda+3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，则 $\boldsymbol{n}=(1,1,\frac{1}{2})$.

$\therefore d=\dfrac{|\overrightarrow{A_1B}\cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{3}$,

所以点 A_1 到平面 BCM 的距离为 $\dfrac{1}{3}$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！