

2019 北京育英学校高二（上）期末

数 学

2019.1

一、选择题（每小题 5 分，共 40 分）

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2=2$ ， $a_3=4$ ，则 S_{10} 为（ ）

- A. 12 B. 14 C. 18 D. 90

2. 若 $a=(x, -1, 3)$ ， $b=(2, y, 6)$ ，且 $a \parallel b$ ，则（ ）

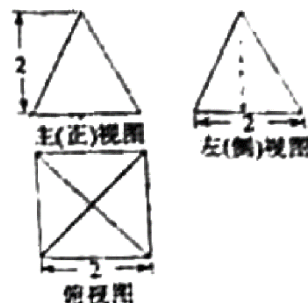
- A. $x=1, y=-2$ B. $x=1, y=2$ C. $x=\frac{1}{2}, y=-2$ D. $x=-1, y=-2$

3. 焦点在 y 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的离心率是 $\frac{1}{2}$ ，则实数 m 的值是（ ）

- A. 4 B. $\frac{9}{4}$ C. 1 D. $\frac{3}{4}$

4. 一个空间几何体的三视图如右图所示，该几何体的侧面积为（ ）

- A. 8 B. $\frac{8}{3}$ C. $4\sqrt{5}$ D. 6



5. 方程 $\sqrt{x^2 + (y-4)^2} + \sqrt{x^2 + (y+4)^2} = 10$ 的化简结果是（ ）

- A. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$ C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

6. 已知点 $A(0, 0, 0)$ ， $B(2, 5, 0)$ ， $C(1, 3, 5)$ ，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影的数量为（ ）

- A. $\frac{17\sqrt{29}}{29}$ B. $\frac{17\sqrt{35}}{35}$ C. $\frac{17\sqrt{29}}{29} (1, 3, 5)$ D. $\frac{17\sqrt{35}}{35} (2, 5, 0)$

7. “ $a \neq 1$ ”是“方程 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ 表示椭圆”的（ ）

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ， O 为坐标原点，若 M 为椭圆上一点，且在 y 轴右侧， N 为 x 轴上一点， $\angle OMN = 90^\circ$ ，则点 N 横坐标的最小值为（ ）

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $4\sqrt{5}$

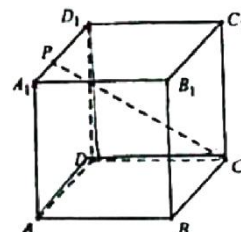
二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

9. 已知抛物线的准线为 $x=3$ ，则其标准方程为_____

10. 等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$ ， $a_1 + a_3 + a_5 = 21$ ，则 $a_3 + a_5 + a_7$ 的值为_____

11. 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的一个焦点是 $(2, 0)$ ，则其渐近线的方程为_____

12. 如图所示，已知点 P 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 A_1D_1 上的一个动点，设异面直线 AB 与 CP 所成的角为 α ，则 $\cos \alpha$ 的最小值是_____。



13. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = f(n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，能够说明“若 $\{a_n\}$ 为递减数列”则 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增是假命题的一个函数为 $f(x) =$ _____

14. 下列说法中，正确的有_____

①若点 $P(x_0, y_0)$ 是抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点，则该点到抛物线的焦点的距离是 $|PF| = x_0 + \frac{p}{2}$;

②点 M 与点 $F(0, -2)$ 的距离比它到直线 $l: y-3=0$ 的距离小 1 的轨迹方程式 $x^2 = -8y$

③设定圆 O 上有一动点 A ，圆 O 内一定点 M (M 与 O 不重合)， AM 的垂直平分线与半径 OA 的交点为 P ，则 P 的轨迹为一椭圆；

三、解答题 (共 6 小题，共 80 分)

15. (本小题满分 13 分)

设数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 d 的等差数列，且 $a_1, a_2 - 1, a_3 - 1$ 是等比数列 $\{b_n\}$ 的第 2, 3, 4 项

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n

16. (本小题满分 13 分)

已知椭圆 $W: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点为 F ，直线 $y=2x+t$ 与椭圆 W 相交于 A, B 两点

(I) 将 $|AB|$ 表示为 t 的函数

(II) 若 $|AB| = \frac{4\sqrt{15}}{19}$ ，并且 $t > 0$ 时，求 $\triangle AFB$ 的面积

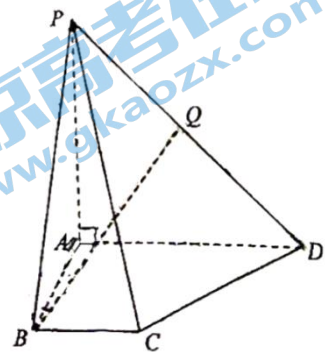
17. (本小题 14 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面四边形 $ABCD$ 为直角梯形， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp AB$ ， $PA=AD=2AB=2BC=2$ ， Q 为 PD 中点。

(I) 求证： $PD \perp BQ$ ；

(II) 求直线 BQ 与平面 PCD 所成角的正弦值

(III) 求棱锥 V_{A-CDQ}

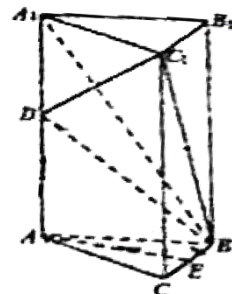


18. (本小题满分 14 分) 如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，已知 $AA_1=4$ ， $AB=2$ 。E 是 BC 的中点，D 在棱 AA_1 上。

(I) 求异面直线 AE 与 BC_1 所成角；

(II) 若 $AE \parallel$ 平面 DBC_1 ，求 AD 长；

(III) 当 D 为棱 AA_1 的中点时，求二面角 $D-BC_1-A$ 的余弦值



19. (本题满分 13 分)

育英学校高二年级某班有甲、乙两个手工制作小组做游戏，胜者去参观，现有 A、B、C、D 四个长方体容器，A、B 的底面积均为 x^2 ，高分别为 x 、 y ；C、D 的底面积均为 y^2 ，高也分别为 x 、 y (其中 $x \neq y$)，现规定的游戏规则：甲小组从四种容器中取两个类型容器，乙小组是另外两个类型容器，乙小组给出 x 、 y 的数值，然后，各自去做 (用防水纸剪开后沾上即可)，盛满水，两个盛水总量多者为胜，问甲组有没有必胜的方案？若有的话，有几种？并说明理由？

20. (本小题满分 13 分)

已知椭圆 E 中心在坐标原点，焦点在坐标轴上，且经过 A $(-2, 0)$ 、B $(2, 0)$ 、C $(1, \frac{3}{2})$ 三点，过椭圆的右焦点 F 任做一与坐标轴不平行的直线 l 与椭圆 E 交于 M、N 两点，AM 与 BN 所在的直线交于点 Q。

(I) 求椭圆 E 的方程；

(II) 是否存在这样直线 $m: x=t$ ，使得点 Q 恒在直线 m 上移动？若存在，求出直线 m 方程，若不存在，请说明理由。

