北京市朝阳区高三年级第一次综合练习

数学学科测试(文史类)

2017.3

(考试时间120分钟　满分150分)

本试卷分为选择题(共40分)和非选择题(共110分)两部分

第一部分(选择题　共40分)

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

(1)已知集合 $A=\{x\mid -1\leq x<3\}$，$B=\{x\in \mathbf{Z}\mid x^2<4\}$，则 $A\cap B=$

(A) $\{0,1\}$　　(B) $\{-1,0,1,2\}$

(C) $\{-1,0,1\}$　　(D) $\{-2,-1,0,1,2\}$

(2)若 x,y 满足 $\begin{cases}2x-y\leq 0,\\ x+y\leq 3,\\ x\geq 0,\end{cases}$ 则 $y-x$ 的最大值为

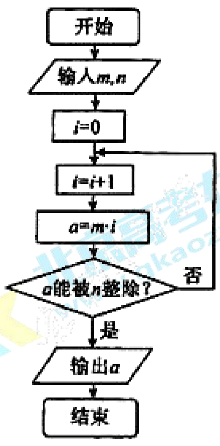
(A)0　　(B)3

(C)4　　(D)5

(3)执行如图所示的程序框图，若输入 $m=4,n=6$，则输出 $a=$

(A)4　　(B)8

(C)12　　(D)16



第(3)题图

(4)已知直线 l 过定点 $(0,1)$，则"直线 l 与圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 相切"是"直线 l 的斜率为 $\frac{3}{4}$"的

(A)充分不必要条件

(B)必要不充分条件

(C)充分必要条件

(D)既不充分也不必要条件

(5)已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x, & x\leq 2,\\ \log_2 x-a, & x>2\end{cases}$ 有两个不同的零点，则实数 a 的取值范围是

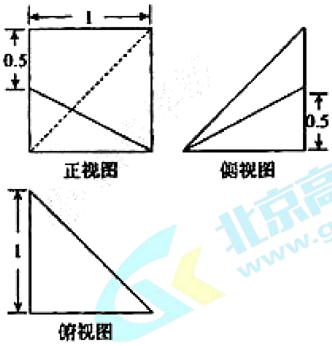
(A) $[-1,0)$　　(B) $(1,2]$

(C) $(1,+\infty)$　　(D) $(2,+\infty)$

(6)设抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 为抛物线上一点，$PA\perp l$，A 为垂足．如果直线 AF 的斜率为 $\sqrt{3}$，那么 $|PF|=$

(A)8　　(B)16　　(C) $4\sqrt{3}$　　(D) $8\sqrt{3}$

(7)某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的底面的面积是



第(7)题图

(A)$\frac{1}{2}$　(B)$\frac{3}{2}$　(C)$\frac{1}{4}$　(D)$\frac{3}{4}$

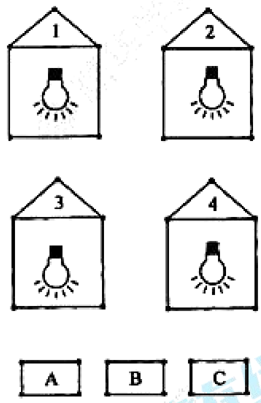
(8)如图，A,B,C三个开关控制着1,2,3,4号四盏灯．若开关A控制着2,3,4号灯(即按一下开关A,2,3,4号灯亮，再按一下开关A,2,3,4号灯熄灭)，同样，开关B控制着1,3,4号灯，开关C控制着1,2,4号灯．开始时，四盏灯都亮着，那么下列说法正确的是

(A)只需要按开关A,C可以将四盏灯全部熄灭

(B)只需要按开关B,C可以将四盏灯全部熄灭

(C)按开关A,B,C可以将四盏灯全部熄灭

(D)按开关A,B,C无法将四盏灯全部熄灭



第(8)题图

第二部分(非选择题　共110分)

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分．

(9)复数$z=1+\frac{1}{i}$在复平面内对应的点的坐标是________．

(10)已知$\{a_n\}$为等差数列，S_n为其前n项和．若$S_6=51$，$a_1+a_9=26$，则数列$\{a_n\}$的公差$d=$________，通项公式$a_n=$________．

(11)已知函数$f(x)=2^x-\frac{2}{x}-a$的一个零点在区间$(1,2)$内，则实数a的取值范围是________．

(12)在$\triangle ABC$中，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，$BC=3$，$AB=\sqrt{6}$，则$\angle C=$________，$AC=$________．

(13)为了促销某电子产品，商场进行降价，设$m>0,n>0,m\neq n$，有三种降价方案：

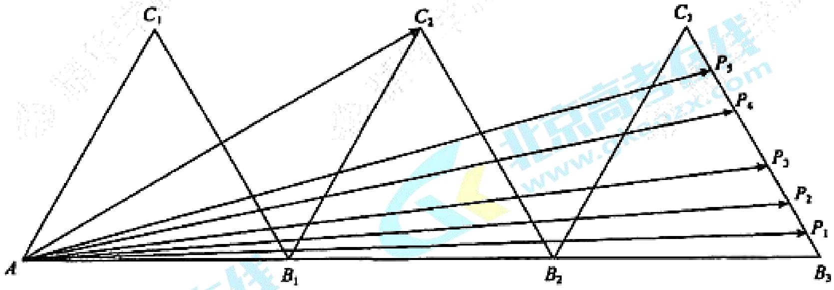
方案①：先降$m\%$，再降$n\%$；

方案②：先降$\frac{m+n}{2}\%$，再降$\frac{m+n}{2}\%$；

方案③：一次性降价$(m+n)\%$．

则降价幅度最小的方案是________．(填出正确的序号)

(14)如图，$\triangle AB_1C_1$，$\triangle B_1B_2C_2$，$\triangle B_2B_3C_3$ 是三个边长为2的等边三角形，且有一条边在同一直线上，边 B_3C_3 上有5个不同的点 P_1,P_2,P_3,P_4,P_5，设 $m_i=\overrightarrow{AC_2}\cdot\overrightarrow{AP_i}(i=1,2,\cdots,5)$，则 $m_1+m_2+\cdots+m_5=$________.



第(14)题图

三、解答题：本大题共6小题，共80分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

(15)(本小题满分13分)

已知函数 $f(x)=\sin x(\cos x-\sqrt{3}\sin x)$.

(Ⅰ)求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

(Ⅱ)求函数 $f(x)$ 在 $x\in[0,\pi]$ 上的单调递增区间.

(16)(本小题满分13分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2(n+1)}{n}a_n$，设 $b_n=\dfrac{a_n}{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(Ⅰ)证明 $\{b_n\}$ 是等比数列；

(Ⅱ)求数列 $\{\log_2 b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

(17)(本小题满分13分)

某校高三年级共有学生195人，其中女生105人，男生90人．现采用按性别分层抽样的方法，从中抽取13人进行问卷调查．设其中某项问题的选择分别为"同意"、"不同意"两种，且每人都做了一种选择．下面表格中提供了被调查人答卷情况的部分信息.

	同意	不同意	合计
女学生	4		
男学生		2	

(Ⅰ)完成上述统计表；

(Ⅱ)根据上表的数据估计高三年级学生该项问题选择"同意"的人数；

(Ⅲ)从被抽取的女生中随机选取2人进行访谈，求选取的2名女生中至少有一人选择"同意"的概率.

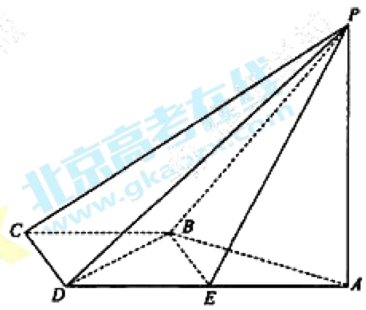
(18)(本小题满分 14 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，$AD // BC$，$PA\perp AB$，$CD\perp AD$，$BC=CD=\frac{1}{2}AD$，E 为 AD 的中点.

(Ⅰ)求证：$PA\perp CD$；

(Ⅱ)求证：平面 $PBD\perp$ 平面 PAB；

(Ⅲ)在平面 PAB 内是否存在点 M，使得直线 $CM //$ 平面 PBE，请说明理由.



(19)(本小题满分 14 分)

过点 $A(1,0)$ 的直线 l 与椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 相交于 E，F 两点，自点 E，F 分别向直线 $x=3$ 作垂线，垂足分别为 E_1，F_1.

(Ⅰ)当直线 l 的斜率为 1 时，求线段 EF 的中点坐标；

(Ⅱ)记 $\triangle AEE_1$，$\triangle AFF_1$ 的面积分别为 S_1，S_2. 设 $\lambda=S_1S_2$，求 λ 的取值范围.

(20)(本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x)=x^3-3ax+e$，$g(x)=1-\ln x$，其中 e 为自然对数的底数.

(Ⅰ)若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $l:x+2y=0$ 垂直，求实数 a 的值；

(Ⅱ)设函数 $F(x)=-x[g(x)+\frac{1}{2}x-2]$，若 $F(x)$ 在区间 $(m,m+1)$ $(m\in\mathbf{Z})$ 内存在唯一的极值点，求 m 的值；

(Ⅲ)用 $\max\{m,n\}$ 表示 m，n 中的较大者，记函数 $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ $(x>0)$. 若函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有 2 个零点，求实数 a 的取值范围.

北京市朝阳区高三年级第一次综合练习

数学学科测试答案（文史类） 2017.3

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	C	B	C	B	C	A	D	D

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

题号	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
答案	$(1,-1)$	$3,3n-2$	$(0,3)$	$\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$	②	90

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

(15)（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\sin x(\cos x-\sqrt{3}\sin x)=\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin^2 x$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sin(2x+\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. …………………………………… 6 分

（Ⅱ）令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$ 得，

$2k\pi-\frac{5\pi}{6}\leqslant 2x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$,

所以 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$.

又因为 $x\in[0,\pi]$,

所以函数 $f(x)$ 在 $x\in[0,\pi]$ 上的单调递增区间是 $[0,\frac{\pi}{12}]$ 和 $[\frac{7\pi}{12},\pi]$. …… 13 分

(16)（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $a_{n+1}=\frac{2(n+1)}{n}a_n$，得 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=2\frac{a_n}{n}$.

所以 $b_{n+1}=2b_n$，即 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=2$.

又因为 $b_1=\frac{a_1}{1}=1$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项，公比为 2 的等比数列． ························ 7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $b_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$．

所以 $\log_2 b_n=\log_2 2^{n-1}=n-1$．

则数列 $\{\log_2 b_n\}$ 的前 n 项和

$T_n=0+1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$． ························ 13 分

（17）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）统计表如下：

	同意	不同意	合计
女学生	4	3	7
男学生	4	2	6

························ 3 分

（Ⅱ）高三年级学生该项问题选择"同意"的人数估计有

$\frac{4}{7}\times 105+\frac{4}{6}\times 90=60+60=120$（人）． ························ 7 分

（Ⅲ）设"同意"的 4 名女生分别为 A_1,A_2,A_3,A_4，"不同意"的 3 名女生分别为 B_1,B_2,B_3．

从 7 人中随机选出 2 人的情况有

$A_1A_2,A_1A_3,A_1A_4,A_1B_1,A_1B_2,A_1B_3,A_2A_3,A_2A_4,A_2B_1,A_2B_2,A_2B_3,A_3A_4,A_3B_1,A_3B_2,A_3B_3,A_4B_1,A_4B_2,A_4B_3,B_1B_2,B_1B_3,B_2B_3$，共 21 种结果．

其中 2 人都选择"不同意"的情况有 B_1B_2,B_1B_3,B_2B_3，共 3 种结果．

设 2 名女生中至少有一人选择"同意"为事件 M，

所求概率 $P(M)=1-\frac{3}{21}=\frac{6}{7}$． ························ 13 分

（18）（本小题满分 14 分）

证明：（Ⅰ）因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，

又因为 $PA\perp AB$，

所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$．

则 $PA\perp CD$． ························ 5 分

（Ⅱ）由已知，$BC//ED$，且 $BC=ED$，所以四边形 $BCDE$ 是平行四边形，

又 $CD\perp AD$，$BC=CD$，所以四边形 $BCDE$ 是正方形，

连接 CE，所以 $BD\perp CE$，

又因为 $BC//AE$，$BC=AE$，

所以四边形 $ABCE$ 是平行四边形，

所以 $CE//AB$，则 $BD\perp AB$.

由（Ⅰ）知 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，

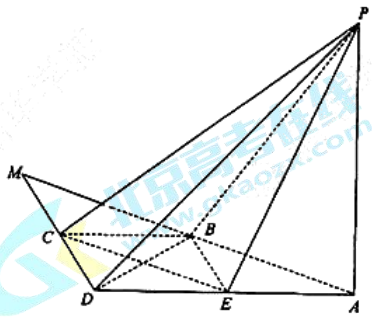
所以 $PA\perp BD$.

又因为 $PA\cap AB=A$，

则 $BD\perp$ 平面 PAB，

且 $BD\subset$ 平面 PBD，

所以平面 $PBD\perp$ 平面 PAB.



………………………………………………………………………… 10 分

（Ⅲ）在梯形 $ABCD$ 中，AB 与 CD 不平行．延长 AB，DC，相交于点 M（$M\in$ 平面 PAB），点 M 即为所求的一个点．理由如下：由已知，$BC//ED$，且 $BC=ED$.

所以四边形 $BCDE$ 是平行四边形，所以 $CD//EB$，即 $CM//EB$，

又 $EB\subset$ 平面 PBE，$CM\not\subset$ 平面 PBE，

所以 $CM//$ 平面 PBE.

………………………………………………………………………… 14 分

（19）（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）依题意，直线 l 的方程为 $y=x-1$，由 $\begin{cases}y=x-1,\\x^2+3y^2-3=0\end{cases}$，得 $2x^2-3x=0$.

设 $E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，线段 EF 的中点为 $M(x_0,y_0)$，

则 $x_1+x_2=\frac{3}{2}$，$x_0=\frac{3}{4}$，

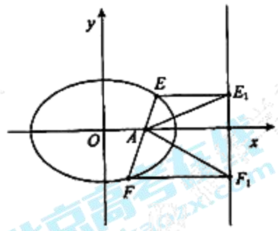
$y_0=x_0-1=-\frac{1}{4}$．所以 $M(\frac{3}{4},-\frac{1}{4})$．……………………………… 6 分

（Ⅱ）设直线 l 的方程为 $x=my+1$，由 $\begin{cases}x=my+1,\\x^2+3y^2-3=0\end{cases}$

得 $(m^2+3)y^2+2my-2=0$，显然 $m\in\mathbf{R}$.

设 $E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\dfrac{-2m}{m^2+3}$，$y_1y_2=\dfrac{-2}{m^2+3}$.

$E_1(3,y_1)$，$F_1(3,y_2)$.



因为 $\lambda=S_1S_2=\dfrac{1}{2}(3-x_1)|y_1|\cdot\dfrac{1}{2}(3-x_2)|y_2|$

$=\dfrac{1}{4}(2-my_1)(2-my_2)|y_1y_2|$

$=\dfrac{1}{4}[4-2m(y_1+y_2)+m^2y_1y_2]|y_1y_2|$

$=\dfrac{2m^2+6+2m^2-m^2}{2(m^2+3)}\cdot\dfrac{2}{m^2+3}$

$=\dfrac{3m^2+6}{(m^2+3)^2}$

$=-\dfrac{3}{(m^2+3)^2}+\dfrac{3}{m^2+3}$.

因为 $\dfrac{1}{m^2+3}\in(0,\dfrac{1}{3}]$，

所以实数 λ 的取值范围是 $(0,\dfrac{2}{3}]$. ………………………………………… 14 分

20.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由已知得，$f'(x)=3x^2-3a$，所以 $f'(1)=3-3a$，

依题意，$(3-3a)(-\dfrac{1}{2})=-1$，解得 $a=\dfrac{1}{3}$. ………………………………… 3 分

（Ⅱ）因为 $F(x)=-x[g(x)+\dfrac{1}{2}x-2]=-x\left[(1-\ln x)+\dfrac{1}{2}x-2\right]=x\ln x-\dfrac{1}{2}x^2+x$，

则 $F'(x)=\ln x+1-x+1=\ln x-x+2$，设 $t(x)=\ln x-x+2$，

则 $t'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$.

令 $t'(x)=0$，得 $x=1$.

则由 $t'(x)>0$，得 $0<x<1$，$F'(x)$ 为增函数；

由 $t'(x)<0$，得 $x>1$，$F'(x)$ 为减函数；

而 $F'(\dfrac{1}{e^2})=-2-\dfrac{1}{e^2}+2=-\dfrac{1}{e^2}<0$，$F'(1)=1>0$.

则 $F'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有且只有一个零点 x_1，

且在 $(0,x_1)$ 上 $F'(x)<0$，$F(x)$ 为减函数；

在 $(x_1,1)$ 上 $F'(x)>0$，$F(x)$ 为增函数.

所以 x_1 为极值点，此时 $m=0$.

又 $F'(3)=\ln 3-1>0, F'(4)=2\ln 2-2<0$,

则 $F'(x)$ 在 $(3,4)$ 上有且只有一个零点 x_2,

且在 $(3,x_2)$ 上 $F'(x)>0, F(x)$ 为增函数；

在 $(x_2,4)$ 上 $F'(x)<0, F(x)$ 为减函数.

所以 x_2 为极值点，此时 $m=3$.

综上 $m=0$ 或 $m=3$. ………………………………………………………… 9 分

(Ⅲ)(1)当 $x\in(0,e)$ 时，$g(x)>0$，依题意，$h(x)\geqslant g(x)>0$，不满足条件；

(2)当 $x=e$ 时，$g(e)=0$，$f(e)=e^3-3ae+e$,

①若 $f(e)=e^3-3ae+e\leqslant 0$，即 $a\geqslant\frac{e^2+1}{3}$，则 e 是 $h(x)$ 的一个零点；

②若 $f(e)=e^3-3ae+e>0$，即 $a<\frac{e^2+1}{3}$，则 e 不是 $h(x)$ 的零点；

(3)当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$g(x)<0$，所以此时只需考虑函数 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上零点的情况．因为 $f'(x)=3x^2-3a>3e^2-3a$，所以

①当 $a\leqslant e^2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递增．

又 $f(e)=e^3-3ae+e$，所以

(i)当 $a\leqslant\frac{e^2+1}{3}$ 时，$f(e)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上无零点；

(ii)当 $\frac{e^2+1}{3}<a\leqslant e^2$ 时，$f(e)<0$,

又 $f(2e)=8e^3-6ae+e\geqslant 8e^3-6e^3+e>0$,

所以此时 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上恰有一个零点；

②当 $a>e^2$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\sqrt{a}$.

由 $f'(x)<0$，得 $e<x<\sqrt{a}$；

由 $f'(x)>0$，得 $x>\sqrt{a}$；

所以 $f(x)$ 在 $(e,\sqrt{a})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增．

因为 $f(e)=e^3-3ae+e<e^3-3e^3+e<0$,

$f(2a)=8a^3-6a^2+e>8a^2-6a^2+e=2a^2+e>0$,

所以此时 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上恰有一个零点；

综上，$a>\frac{e^2+1}{3}$. ………………………………………………………… 13 分