# 2023 届高三数学查漏补缺题

## 一、选择题部分

1．已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个单位向量，则“$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<\sqrt{2}$”是“$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$ 为锐角”的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

2．数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，且 $S_n=n^2-n+a$，则“$a=0$”是“$2a_3=a_2+a_4$”的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{m+n}=a_m+a_n$，若 $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+10}=310$，则 $k=$（　）

A．10　　B．15　　C．20　　D．25

4．已知 $\{a_n\}$ 是首项为正数，公比不为 $\pm1$ 的等比数列，$\{b_n\}$ 是等差数列，且 $a_1=b_1,a_5=b_5$，那么（　）

A．$a_3>b_3$　　B．$a_3=b_3$

C．$a_3<b_3$　　D．$a_3,b_3$ 的大小关系不能确定

5．已知直线 $l:x+y+t=0$，曲线 $C:y=\sqrt{4-x^2}$，则“$l$ 与 $C$ 相切”是“$t=-2\sqrt{2}$”的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．已知点 $A(0,2),B(-1,0)$．若点 $C(x_0,y_0)$ 在函数 $y=x^2$ 的图象上，记 $\triangle ABC$ 的面积为 $S(x_0)$，则使得 $S(x_0)=S(1)$ 的点 $C$ 的个数为（　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

7．过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 $F$ 的直线交抛物线于 $A,B$ 两点,若 $F$ 是线段 $AB$ 的中点,则$|AB|=$（　）

A．1　　B.2　　C.3　　D.4

8．已知点 $M(2,0)$,点 $P$ 在曲线 $y^2=4x$ 上运动,点 $F$ 为抛物线的焦点,则 $\dfrac{|PM|^2}{|PF|-1}$ 的最小值为（　）

A.$\sqrt{3}$　　B.$2(\sqrt{5}-1)$　　C.$4\sqrt{5}$　　D.4

9．设 $\alpha\in\mathbf{R}$，则“$\alpha$ 是第一象限角”是“$\sin\alpha+\cos\alpha>1$”的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

10. 若角 $\alpha,\beta$ 是锐角三角形的两个内角，则 “$\cos\alpha<\sin\beta$”是“$\sin\alpha>\cos\beta$”的　　(　　)

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

11. 函数 $f(x)=\cos(x+a)+\sin(x+b)$，则　　(　　)

A. 若 $a+b=0$，则 $f(x)$ 为奇函数　　B. 若 $a+b=\frac{\pi}{2}$，则 $f(x)$ 为偶函数

C.若 $b-a=\frac{\pi}{2}$，则 $f(x)$ 为偶函数　　D.若 $a-b=\pi$，则 $f(x)$ 为奇函数

12. 函数 $f(x)=a\cos x+\cos 2x$，则“对任意的实数 $x$，$f(x)\le 3$”是“$a\le 2$”的　　(　　)

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

13. 已知 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，故“存在 $k\in\mathbf{Z}$ 使得 $\alpha=k\pi+(-1)^k\beta$”是“$\sin\alpha=\sin\beta$”的　　(　　)

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

14. 已知 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ 则“$\sin(\alpha+\beta)=\sin 2\alpha$”是“$\beta=\alpha+k\pi(k\in\mathbf{Z})$”的　　(　　)

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

15. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，$BC=2$，则 “$AB=2$” 是 “$\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$” 的　　(　　)

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

## 二、填空题部分

16. 与双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 渐近线相同，且一个焦点坐标是 $(0,5)$ 的双曲线的标准方程是________.

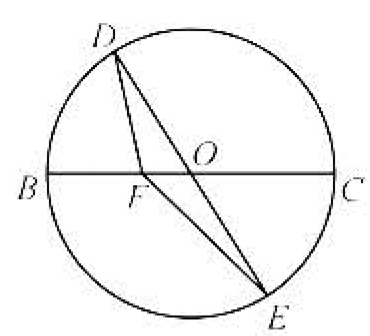
17. 已知 $F_1,F_1$ 分别是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1(a\neq 0)$ 的左右焦点，$P$ 是 $C$ 上的一点，且 $|PF_1|=2|PF_2|=16$，

则 $\triangle PF_1F_2$ 的周长是__________.

18. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3},|\boldsymbol{b}|=1$，则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 夹角的最大值是________.

19. 如图，$BC,DE$ 是半径为 3 的圆 $O$ 的两条直径，

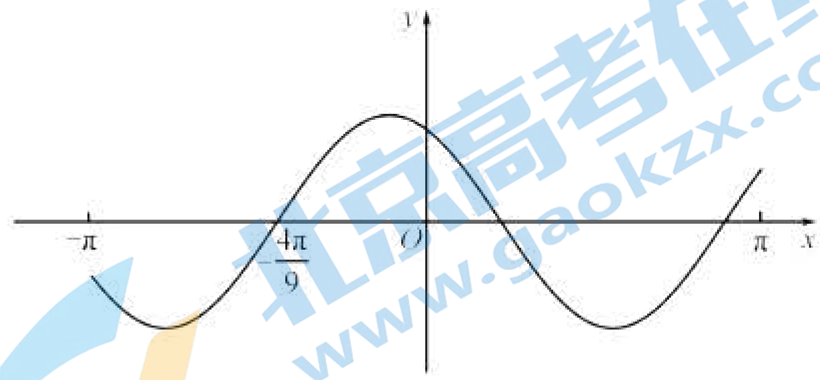
$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FO}$，则 $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FE}=$____________.



20. 函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象如图所示．则

① $f(x)$ 的最小正周期为____________；

②距离 $y$ 轴最近的对称轴方程__________．




21. 将函数 $f(x)=a\sin x+b\cos x(a,b\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq 0)$ 的图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍，再将所得图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度后，得到一个偶函数图象，则 $\dfrac{a}{b}=$__________．

22. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-x+a, x\leq 1,\\ -a(x-2)^2+1, x>1.\end{cases}$

① 若 $a=2$，则 $f(x)$ 的单调递增区间是_________；

② 若 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，则 $a$ 的取值范围是_________．

23. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, x\leq t,\\ \ln x, x>t\end{cases}$ $(t>0)$ 有 2 个零点，且过点 $(\mathrm{e},1)$，则常数 $t$ 的一个取值为_______．

24. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，$a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，则 $S_8=$_______．

25. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，若 $S_{m-1}=-3$，$S_m=-2$，$S_{m+1}=0$，则公差 $d=$____；$m=$____．

26. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-a\cos x(1+\cos 2x), & 0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2},\\ -a\cos x+\cos 2x, & \dfrac{\pi}{2}<x\leq\pi.\end{cases}$

①当 $a=1$ 时，$f(x)$ 的值域为____________；

②若 $f(x)=a$ 恰有 2 个解，则 $a$ 的取值范围为____________．

27. 已知平面直角坐标系中的点集 $S=\{(x,y)\mid(x-k)^2+(y-k^2)^2=4|k|,k\in\mathbf{Z}\}$，给出下列四个结论：

①当直线 $l$ 为 $y=x-2$ 时，$l$ 与 $S$ 没有公共点；

②存在直线 $l$ 与 $S$ 有且只有一个公共点；

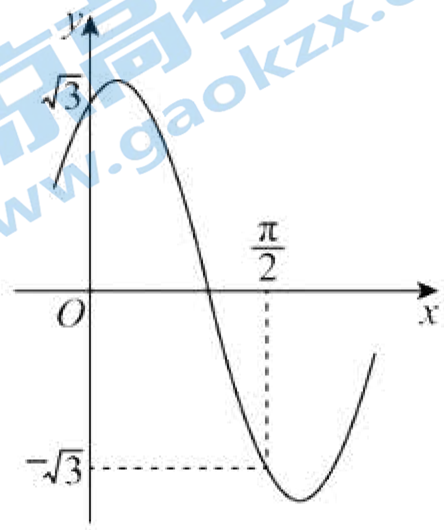
③存在直线 $l$ 经过 $S$ 中的无穷个点；

④存在直线 $l$ 与 $S$ 没有公共点，且 $S$ 中存在两点在 $l$ 的两侧．

其中所有正确结论的序号是________．

## 三、三角函数解答题部分

28．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示.




（Ⅰ）直接写出 $\omega$ 的值；

（Ⅱ）再从条件①、条件②中选择一个作为已知，求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最小值.

条件①：直线 $x=\dfrac{7\pi}{12}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图象的一条对称轴；

条件②：$\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$ 为函数 $y=f(x)$ 的图象的一个对称中心

29．在△$ABC$ 中，$\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

（Ⅰ）求 $B$ 的值；

（Ⅱ）给出以下三个条件：

①$a^2-b^2+c^2+3c=0$；　②$a=\sqrt{3}$，$b=1$；　③$S_{\triangle ABC}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$.

若这三个条件中仅有两个正确，请选出正确的条件并回答下面问题：

（ⅰ）求 $\sin A$ 的值；

（ⅱ）$\angle ABC$ 的平分线交 $AC$ 于点 $D$，求线段 $BD$ 的长.

30．设函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A,\omega,\varphi$ 是常数，$A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）．若 $f(x)$ 在区间 $[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}]$ 上具有单调性，且 $f(0)=f(\dfrac{\pi}{6})=-f(\dfrac{\pi}{2})=\sqrt{3}$，

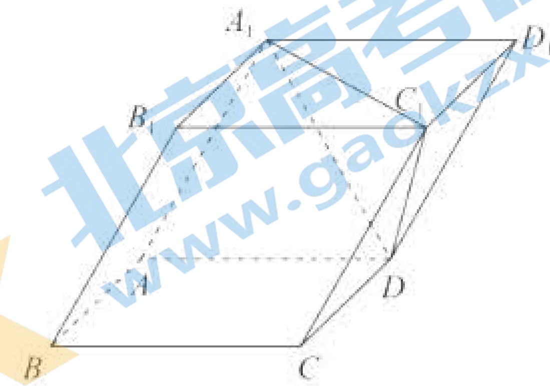
（Ⅰ）直接写出 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调递减区间；

（Ⅲ）已知 $g(x)=2\sin x+f(x+\dfrac{\pi}{12})$，求函数 $g(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的值域.

## 四、立体几何解答题部分

31. 如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，平面 $A_1ADD_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AD=2$，$AA_1=A_1D$.




（Ⅰ）求证：$A_1D\perp AB$；

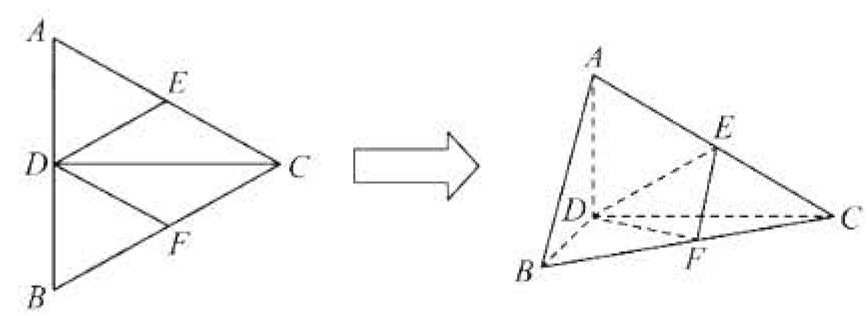
（Ⅱ）若 $AA_1=2$.

（ⅰ）求直线 $AB_1$ 与直线 $A_1D_1$ 所成角的余弦值；

（ⅱ）求点 $A$ 到平面 $A_1C_1D$ 的距离；

（ⅲ）设点 $E$ 为线段 $AA_1$ 上任意一点（不包含端点），证明：直线 $CE$ 与平面 $A_1C_1D$ 相交。

32. 正△$ABC$ 的边长为 2，$CD$ 是 $AB$ 边上的高，$E$、$F$ 分别是 $AC$ 和 $BC$ 边的中点，先将△$ABC$ 沿 $CD$ 翻折成直二面角 $A-DC-B$.

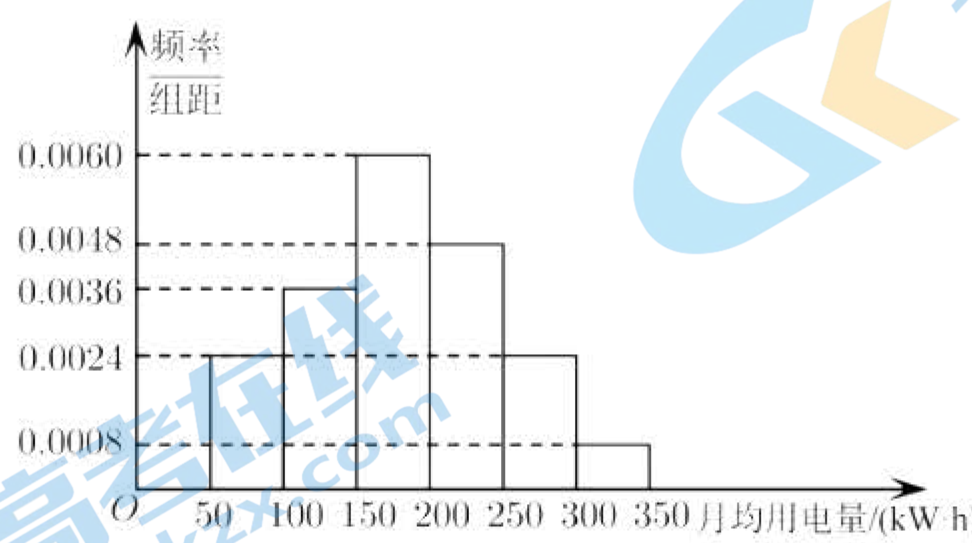



（Ⅰ）求二面角 $E-DF-C$ 的余弦值；

（Ⅱ）在线段 $BC$ 上是否存在一点 $P$，使 $AP\perp DE$？证明你的结论.

## 五、概率统计解答题部分

33. 为了解某地区居民每户月均用电情况，采用随机抽样的方式，从该地区随机调查了 100 户居民，获得了他们每户月均用电量的数据，发现每户月均用电量都在 50～350 kW·h 之间，进行适当分组后（每组为左闭右开区间），得到如下频率分布直方图：

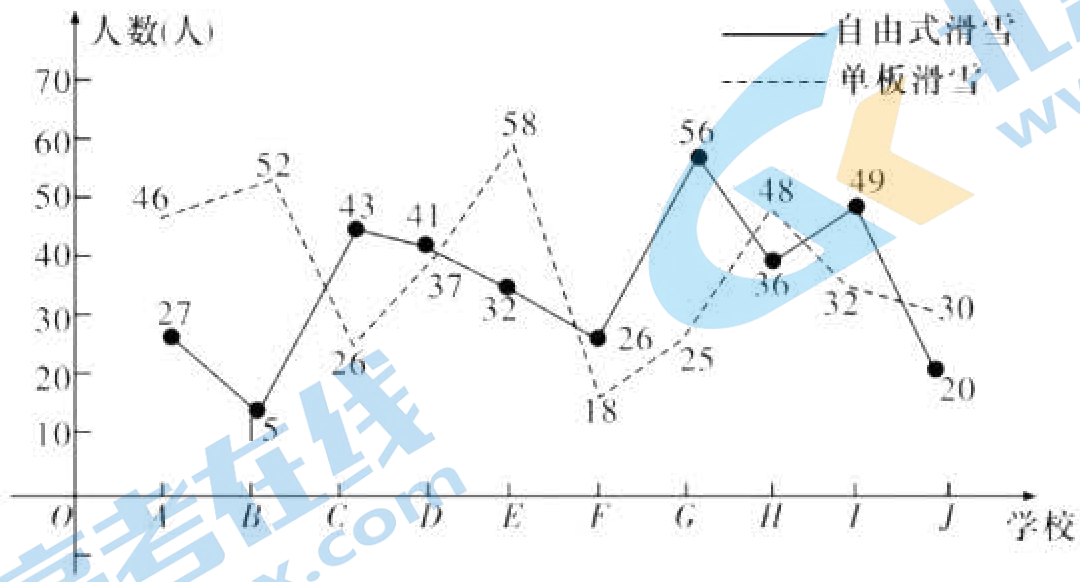



（Ⅰ）记频率分布直方图中从左到右的分组依次为第 1 组，第 2 组，…，第 6 组，从第 5 组，第 6 组中任取 2 户居民，求他们月均用电量都不低于 300 kW·h 的概率；

（Ⅱ）根据上述频率分布直方图，估计月均用电量的样本数据的第 90 百分位数；

（Ⅲ）该地区为提倡节约用电，拟以每户月均用电量为依据，给该地区月均用电量不少于 $w$ kW·h 的居民用户每户发出一份节约用电倡议书，且发放倡议书的数量为该地区居民用户数的 2%．请根据此次调查的数据，估计 $w$ 应定为多少合适？（只需写出结论）.

34. 2022 年冬季奥林匹克运动会主办城市是北京，北京成为第一个举办过夏季奥林匹克运动会和冬季奥林匹克运动会以及亚洲运动会三项国际赛事的城市．为迎接冬奥会的到来，某地很多中小学开展了模拟冬奥会赛事的活动，为了深入了解学生在“自由式滑雪”和“单板滑雪”两项活动的参与情况，在该地随机选取了10 所学校进行研究，得到如图数据：




（Ⅰ）“自由式滑雪”参与人数超过 40 人的学校可以作为“基地学校”，现在从这 10 所学校中随机选出 3 所，记 $X$ 为可作为“基地学校”的学校个数，求 $X$ 的分布列和数学期望；

（Ⅱ）在这 10 所学校中随机选取 3 所来调查研究，求在抽到学校中恰有一所参与“自由式滑雪”超过 40 人的条件下，抽到学校中恰有一所学校“单板滑雪”超过 30 人的概率；

（Ⅲ）现在有一个“单板滑雪”集训营，对“滑行、转弯、停止”这 3 个动作技巧进行集训，且在集训中进行了多轮测试．规定：在一轮测试中，这 3 个动作中至少有 2 个动作达到“优秀”，则该轮测试记为“优秀”．在集训测试中，小明同学 3 个动作中每个动作达到“优秀”的概率均为 $\frac{1}{3}$，每个动作互不影响且每轮测试互不影响．如果小明同学在集训测试中要想获得“优秀”的次数的平均值达到 3 次，那么理论上至少要进行多少轮测试？

## 六、解析几何解答题部分

35. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 $A$，上、下顶点分别为 $B_1,B_2$，$|B_1B_2|=2$，$|AB_1|=\sqrt{5}$．

（Ⅰ）求椭圆 $E$ 的方程；

（Ⅱ）设 $P$ 是椭圆 $E$ 上一点，不与顶点重合，点 $M$ 与点 $P$ 关于坐标原点 $O$ 中心对称，过 $P$ 作垂直于 $y$ 轴的直线交直线 $AB_1$ 于点 $Q$，再过 $Q$ 作垂直于 $x$ 轴的直线交直线 $PB_2$ 于点 $N$．求证：$A,M,N$ 三点共线．

36. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点为 $A,B$，$|AB|=4$，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，直线 $l_1:y=x+t(t\neq 0)$ 与椭圆 $E$ 交于 $M,N$ 不同的两点，直线 $AM,BN$ 分别与直线 $y=x$ 交于点 $P,Q$.

（Ⅰ）求椭圆 $E$ 的标准方程；

（Ⅱ）求证：以 $P,Q$ 为直径的圆恒过定点.

## 七、函数综合题（导数）部分

37. 设函数 $f(x)=[ax^2-(4a+1)x+4a+3]e^x$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 $x$ 轴平行，求 $a$；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间.

38. 已知函数 $f(x)=x^2\ln x-2x$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求证：存在唯一的 $x_0\in(1,2)$，使得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率为 $f(2)-f(1)$；

（Ⅲ）比较 $f(1.01)$ 与 $-2.01$ 的大小，并加以证明.

39. 设函数 $f(x)=x^3+bx+c$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\frac{1}{2},f(\frac{1}{2}))$ 处的切线与 $y$ 轴垂直.

（Ⅰ）求 $b$；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点，证明：$f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

## 八、第 21 题

40．设 $A$ 是如下形式的 2 行 3 列的数表：

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |

满足性质 $P: a,b,c,d,e,f\in[-1,1]$，且 $a+b+c+d+e+f=0$.

记 $r_i(A)$ 为 $A$ 的第 $i$ 行各数之和（$i$=1,2），$C_j(A)$ 为 $A$ 的第 $j$ 列各数之和（$j$=1,2,3）记 $k(A)$ 为

$|r_1(A)|,|r_2(A)|,|c_1(A)|,|c_2(A)|,|c_3(A)|$ 中的最小值.

（Ⅰ）对如下表 $A$，求 $k(A)$ 的值；

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $-0.8$ |
| 0.1 | $-0.3$ | $-1$ |

（Ⅱ）设数表 $A$ 形如

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $-1-2d$ |
| $d$ | $d$ | $-1$ |

其中 $-1\le d\le 0$，求 $k(A)$ 的最大值；

（Ⅲ）对所有满足性质 $P$ 的 2 行 3 列的数表 $A$，求 $k(A)$ 的最大值.

41．已知数列 $\{a_n\}$ 是由正实数组成的无穷数列，满足 $a_1=3$， $a_2=7$， $a_n=|a_{n+1}-a_{n+2}|$， $n\in\mathbf{N}^*$.

（Ⅰ）写出数列 $\{a_n\}$ 前 4 项的所有可能取法；

（Ⅱ）判断：是否存在正整数 $k$，满足 $a_k=1$，并说明理由；

（Ⅲ）$c_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项中不同取值的个数，求 $c_{100}$ 的最小值.

（2）解：不存在，下面证明：

42．已知集合 $P$ 的元素个数为 $3n\,(n\in\mathbf{N}^*)$ 且元素均为正整数，若能够将集合 $P$ 分成元素个数相同且两两没有公共元素的三个集合 $A, B, C$，即 $P=A\cup B\cup C$， $A\cap B=\varnothing$， $A\cap C=\varnothing$， $B\cap C=\varnothing$，其中 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，$C=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$，且满足 $c_1<c_2<\cdots<c_n$，$a_k+b_k=c_k$，$k=1,2,\cdots,n$，则称集合 $P$ 为“完美集合”.

（Ⅰ）若集合 $P=\{1,2,3\}$，$Q=\{1,2,3,4,5,6\}$，判断集合 $P$ 和集合 $Q$ 是否为“完美集合”？并说明理由；

（Ⅱ）已知集合 $P=\{1,x,3,4,5,6\}$ 为“完美集合”，求正整数 $x$ 的值；

（Ⅲ）设集合 $P=\{x\,|\,1\leqslant x\leqslant 3n, n\in\mathbf{N}^*\}$，证明：集合 $P$ 为“完美集合”的一个必要条件是 $n=4k$ 或 $n=4k+1$

# 2023 届高三数学查漏补缺题

## 参考答案

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | B | A | A | C | C | B | D | D |
| 题号 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | |
| 答案 | C | C | B | A | C | D | C | |

16. $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$　　17. 34　　18. $60°$

19. $-8$　　20. $\frac{4\pi}{3}$；$x=-\frac{\pi}{9}$　　21. $\sqrt{3}$

22. ①$(1,2]$（或$(1,2)$）；②$(0,2]$　　23. $[1,e)$，取内部任意值均可　　24. 36

25. $d=1$，$m=4$　　26. ①$[-2,2]$；②$(-4+2\sqrt{2},-1)$　　27. ②④

28. 解：（1）由图象可知，函数$f(x)$的最小正周期$T$满足$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，$\therefore T=\pi$，则$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$；

（2）选择条件①：因为直线$x=\frac{7\pi}{12}$为函数$y=f(x)$的图象的一条对称轴，

所以，$2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$，即$\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in Z)$，

$\because -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$，则$f(0)=A\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}A=\sqrt{3}$，$\therefore A=2$，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

当$x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$时，$\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{6}$，

所以当$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$时，即当$x=-\frac{\pi}{12}$或$\frac{\pi}{4}$时，函数$f(x)$取得最小值，即$f(x)_{\min}=1$；

选择条件②：因为$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$是函数$y=f(x)$图象的一个对称中心，

则$2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\pi+2k\pi(k\in Z)$，解得$\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in Z)$，

$\because -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$，则$f(0)=A\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}A=\sqrt{3}$，$\therefore A=2$，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

当$x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$时，$\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{6}$，

所以当$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$时，即当$x=-\frac{\pi}{12}$或$\frac{\pi}{4}$时，函数$f(x)$取得最小值，即$f(x)_{\min}=1$.

# 2023届高三数学查漏补缺题

## 参考答案

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | B | A | A | C | C | B | D | D |
| 题号 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | |
| 答案 | C | C | B | A | C | D | C | |

16. $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ 17. 34 18. $60^\circ$

19. $-8$ 20. $\frac{4\pi}{3}$；$x=-\frac{\pi}{9}$ 21. $\sqrt{3}$

22. ①$(1,2]$（或$(1,2)$）；②$(0,2]$ 23. $[1,e)$，取内部任意值均可 24. 36

25. $d=1$，$m=4$ 26. ①$[-2,2]$； ②$(-4+2\sqrt{2},-1)$ 27. ②④

28. 解：（1）由图象可知，函数$f(x)$的最小正周期$T$满足$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，$\therefore T=\pi$，则$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$；

（2）选择条件①：因为直线$x=\frac{7\pi}{12}$为函数$y=f(x)$的图象的一条对称轴，

所以，$2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$，即$\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in Z)$，

$\because -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$，则$f(0)=A\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}A=\sqrt{3}$，$\therefore A=2$，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

当$x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$时，$\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{6}$，

所以当$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$时，即当$x=-\frac{\pi}{12}$或$\frac{\pi}{4}$时，函数$f(x)$取得最小值，即$f(x)_{\min}=1$；

选择条件②：因为$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$是函数$y=f(x)$图象的一个对称中心，

则$2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\pi+2k\pi(k\in Z)$，解得$\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in Z)$，

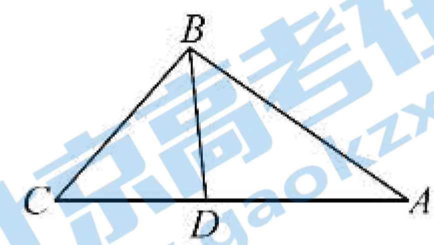
$\because -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$，则$f(0)=A\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}A=\sqrt{3}$，$\therefore A=2$，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

当$x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$时，$\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{6}$，

所以当$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$时，即当$x=-\frac{\pi}{12}$或$\frac{\pi}{4}$时，函数$f(x)$取得最小值，即$f(x)_{\min}=1$．

29．解：（1）由题设 $\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=0$，

而 $\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$，




所以 $B+\frac{\pi}{3}=\pi$，故 $B=\frac{2\pi}{3}$；

（2）若①②正确，则 $c^2+3c+2=(c+1)(c+2)=0$，得 $c=-1$ 或 $c=-2$，

所以①②有一个错误条件，则③是正确条件，

若②③正确，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{15\sqrt{3}}{4}$，可得 $\sin C=\frac{15}{2}>1$，即②为错误条件，

综上，正确条件为①③，

（i）由 $2ac\cos B=a^2+c^2-b^2$，则 $c(3-a)=0$，即 $a=3$，

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{15\sqrt{3}}{4}$，可得 $c=5$，

所以 $9-b^2+25+15=0$，可得 $b=7$，则 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{14}{\sqrt{3}}$，

故 $\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{14}$；

（ii）因为 $\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{14}$ 且 $A\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，得 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{13}{14}$，

由 $BD$ 平分 $\angle ABC$ 得 $\angle ABD=\frac{\pi}{3}$，

在 $\triangle ABD$ 中，$\sin\angle ADB=\sin(\angle ABD+A)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{13}{14}+\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

在 $\triangle ABD$ 中，由 $\frac{BD}{\sin A}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，得 $BD=\frac{5\times\frac{3\sqrt{3}}{14}}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}=\frac{15}{8}$.

30．解：（1）$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$；

（2）$[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi],(k\in Z)$

（3）由（1）知，

$g(x)=2\sin x+2\sin(2(x+\frac{\pi}{12})+\frac{\pi}{3})=2\sin x+2\cos 2x=2\left(\sin x+1-2\sin^2 x\right)$

因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以 $\sin x\in[0,1]$，

令 $u=\sin x\in[0,1]$，$y=-4u^2+2u+2=-4(u-\frac{1}{4})^2+\frac{9}{4}$

所以 $g(x)$ 的值域为 $[0,\frac{9}{4}]$

31. 【解析】（I）因为底面 $ABCD$ 是正方形，所以 $AB\perp AD$，

又因为平面 $A_1ADD_1\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $A_1ADD_1\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

所以 $AB\perp$ 平面 $A_1ADD_1$.

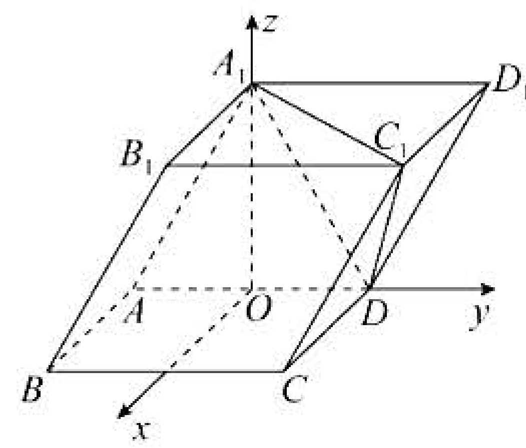
因为 $A_1D\subset$ 平面 $A_1ADD_1$，所以 $AB\perp A_1D$.

（II）（i）如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$，

则 $A(0,-1,0)$，$B_1(2,0,\sqrt{3})$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$，$D_1(0,2,\sqrt{3})$，$D(0,1,0)$，$C_1(2,2,\sqrt{3})$

所以 $\overrightarrow{AB_1}=(2,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{A_1D_1}=(0,2,0)$，

设直线 $AB_1$ 与直线 $A_1D_1$ 所成角为 $\theta$，则




$$\cos\theta=|\cos<\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{A_1D_1}>|=|\frac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}}{|\overrightarrow{AB_1}||\overrightarrow{A_1D_1}|}|=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

（ii）$\overrightarrow{A_1C_1}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{A_1D}=(0,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,1,\sqrt{3})$

设平面 $A_1DC_1$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=y-\sqrt{3}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=2x+2y=0,\end{cases}$$

令 $z=1$，则 $y=\sqrt{3}$，$x=-\sqrt{3}$，

于是 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},\sqrt{3},1)$.

所以点 $A$ 到平面 $A_1C_1D$ 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AA_1}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

（iii）

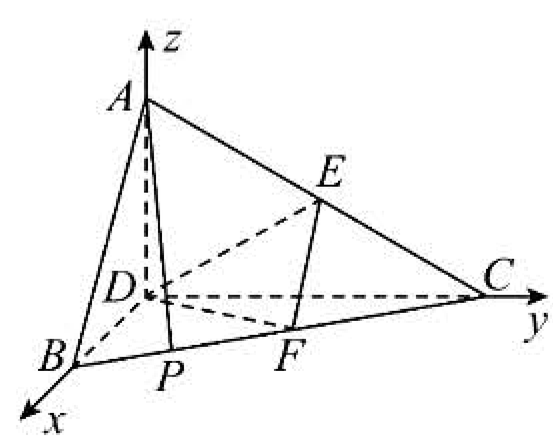
设 $E$ 是线段 $AA_1$ 上一点，设 $\overrightarrow{A_1E}=\lambda\overrightarrow{A_1A}$（$\lambda\in(0,1)$）.

则 $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{A_1E}=\overrightarrow{CA_1}+\lambda\overrightarrow{A_1A}=(-2,-1-\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$

因为 $\overrightarrow{CE}\cdot\mathbf{n}=2\sqrt{3}(1-\lambda)\neq 0$，

所以直线 $CE$ 与平面 $A_1C_1D$ 相交。

32.【解】（1）由已知 $AD\perp DC,BD\perp DC$，




所以 $\angle ADB$ 为二面角 $A-DC-B$ 的平面角，

又二面角 $A-DC-B$ 为直二面角，所以 $AD\perp DB$，

以 $D$ 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(0,0,1)$，$B(1,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$E\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，$F\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，

所以 $\overrightarrow{DF}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right),\overrightarrow{DE}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

设平面 $EDF$ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{DF}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$，

取 $x=\sqrt{3}$，则 $y=-1,z=\sqrt{3}$，

所以 $\vec{n}=\left(\sqrt{3},-1,\sqrt{3}\right)$ 为平面 $EDF$ 的一个法向量，

又 $\overrightarrow{DA}=(0,0,1)$ 为平面 $CDF$ 的一个法向量，

$\cos\left\langle\overrightarrow{DA},\vec{n}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{DA}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{DA}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，

∴二面角 $E-DF-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

（2）设 $P(x,y,0)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x,y,-1),\overrightarrow{DE}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，

因为 $AP\perp DE$，

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DE}=\sqrt{3}y-1=0$，

∴ $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

又 $\overrightarrow{BP}=(x-1,y,0)$，$\overrightarrow{PC}=\left(-x,\sqrt{3}-y,0\right)$，

∵ $\overrightarrow{BP}//\overrightarrow{PC}$，

∴ $(x-1)\left(\sqrt{3}-y\right)=-xy$，

∴ $\sqrt{3}x+y=\sqrt{3}$，

把 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 代入上式得 $x=\frac{2}{3}$，

∴ $P\left(\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$，

∴ $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，

∴在线段 $BC$ 上存在点 $P\left(\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$，使 $AP\perp DE$.

33．解：(1)由频率分布直方图可知，100户居民中，第5组的居民户数为$100\times50\times0.0024=12$，

第6组的居民户数为$100\times50\times0.0008=4$，

从第5组、第6组中任取2户居民，他们月均用电量都不低于300kW·h的概率为$P=\frac{C_4^2}{C_{16}^2}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$.

(2)前4个矩形的面积之和为$(0.0024+0.0036+0.006+0.0048)\times50=0.84<0.9$，

前5个矩形的面积之和为$0.84+0.0024\times50=0.96>0.9$，设月均用电量的样本数据的第90百分位数为$a$，则

$a\in(250,300)$，则$0.84+(a-250)\times0.0024=0.9$，解得$a=275$，因此，估计月均用电量的样本数据的第90百分位数为275kW·h.

(3)前5个矩形的面积之和为$0.96<0.98$，

设月均用电量的样本数据的第98百分位数为$b$，则$b\in(300,350)$，

则$0.96+(b-300)\times0.0008=0.98$，解得$b=325$，

故$w$应定为325较为合适.

34．解：（1）“自由式滑雪”参与人数超过40人的学校有4所，则$X$的可能取值为0，1，2，3.

$P(X=0)=\frac{C_4^0C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}, P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}, P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10},\quad P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$.

所以$X$的分布列为：

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{30}$ |

所以$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$.

（2）由题可知，参与“自由式滑雪”的人数超过40人的学校，且参加“单板滑雪”的人数不超过30人的学校为$C$、$G$，

参与“自由式滑雪”的人数超过40人，且参加“单板滑雪”的人数超过30人的学校为$D$、$I$，

参与“自由式滑雪”的人数不超过40人，且参加“单板滑雪”的人数超过30人的学校为$A$、$B$、$E$、$H$，

参与“自由式滑雪”的人数不超过40人，且参加“单板滑雪”的人数不超过30人的学校为$F$、$J$，

设事件$A$为“从这10所学校中抽3所学校恰有一个参与‘自由式滑雪’的人数超过40人”.

事件$B$为“从这10所学校中抽3所学校恰有一个参与‘单板滑雪’的人数超过30人”.

则 $P(A)=\dfrac{C_4^1\cdot C_6^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{2}$.

若“自由式滑雪”的人数超过 40 人和“单板滑雪”人数超过 30 人为同一个学校，则有 $C_2^1\cdot C_2^2=2$ 种情况，

若“自由式滑雪”的人数超过 40 人和“单板滑雪”人数超过 30 人非同一个学校，则有 $C_2^1\cdot C_4^1\cdot C_2^1=16$ 种情况，

$P(AB)=\dfrac{2+16}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{20}$,

所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{3}{10}$.

（3）由题意可得小明同学在一轮测试中为“优秀”的概率为：$P=C_3^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+C_3^3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{7}{27}$.

所以小明在 $n$ 轮测试中获得“优秀”的次数 $Y$ 满足 $Y\sim B\left(n,\dfrac{7}{27}\right)$，由 $E(Y)=n\cdot\dfrac{7}{27}\geq 3$，得 $n\geq\dfrac{81}{7}\approx 11.6$.

所以理论上至少要进行 12 轮测试.

35. 解：(I) 可得 $B_1(0,1),B_2(0,-1),A(-2,0)$，$a=2,b=1$，因此 $E:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

(II) 设 $PB_2:y=kx-1,k\neq 0,\pm\dfrac{1}{2}$. 联立方程可得：$(4k^2+1)x^2-8kx=0$，

解得 $x_{B_2}=0,x_P=\dfrac{8k}{4k^2+1}$，代入得 $P(\dfrac{8k}{4k^2+1},\dfrac{4k^2-1}{4k^2+1})$，于是 $M(\dfrac{-8k}{4k^2+1},\dfrac{1-4k^2}{4k^2+1})$.

$AB_1$ 的方程为 $y=\dfrac{x}{2}+1$，代入 $y_Q=\dfrac{4k^2-1}{4k^2+1}$，得：$Q(\dfrac{-4}{4k^2+1},\dfrac{4k^2-1}{4k^2+1})$.

再代入得：$y_N=kx_Q-1=\dfrac{-4k}{1+4k^2}-1$，即 $N(\dfrac{-4}{4k^2+1},\dfrac{-4k^2-4k-1}{4k^2+1})$.

$$所以，k_{AN}=\frac{y_N-0}{x_N+2}=\frac{-\dfrac{(2k+1)^2}{4k^2+1}}{2-\dfrac{4}{4k^2+1}}=\frac{-(2k+1)^2}{2(4k^2-1)}=\frac{2k+1}{2-4k},$$

而 $k_{AM}=\dfrac{y_M-0}{x_M+2}=\dfrac{\dfrac{1-4k^2}{4k^2+1}}{2-\dfrac{8k}{4k^2+1}}=\dfrac{1-4k^2}{2(1-2k)^2}=\dfrac{1+2k}{2-4k}=k_{AN}$，总之 $A,M,N$ 三点共线.

36. 解：（I）$a=2,c=\sqrt{2},b=\sqrt{2}$，所以 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$；

（II）$A(-2,0),B(2,0)$. 联立 $\begin{cases}y=x+t,\\x^2+2y^2=4.\end{cases}$

消元得，$3x^2+4tx+2t^2-4=0$，$\Delta=16t^2-12(2t^2-4)=48-8t^2>0, \therefore |t|<\sqrt{6}$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

可得，$x_1+x_2=-\dfrac{4t}{3}$，$x_1x_2=\dfrac{2t^2-4}{3}$，

$k_{AM}=\dfrac{y_1}{x_1+2}$，直线 $AM$ 的方程为：$y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，

令 $y=x$，可得 $x_P=\dfrac{2y_1}{x_1+2-y_1}=\dfrac{2(x_1+t)}{2-t}$，$P(\dfrac{2(x_1+t)}{2-t},\dfrac{2(x_1+t)}{2-t})$.

$k_{BM}=\dfrac{y_2}{x_2-2}$，直线 $AM$ 的方程为：$y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

令 $y=x$，可得 $x_Q=\dfrac{-2y_2}{x_2-2-y_2}=\dfrac{2(x_2+t)}{t+2}$，$Q(\dfrac{2(x_2+t)}{t+2},\dfrac{2(x_2+t)}{t+2})$.

取定点 $T_1(\frac{2}{3}\sqrt{3},-\frac{2}{3}\sqrt{3}),T_2(-\frac{2}{3}\sqrt{3},\frac{2}{3}\sqrt{3})$，则：

$$\overline{T_1P}\cdot\overline{T_1Q}=(\frac{2(x_1+t)}{2-t}-\frac{2}{3}\sqrt{3},\frac{2(x_1+t)}{2-t}+\frac{2}{3}\sqrt{3})\cdot(\frac{2(x_2+t)}{t+2}-\frac{2}{3}\sqrt{3},\frac{2(x_2+t)}{t+2}+\frac{2}{3}\sqrt{3})$$

$$=\frac{8(x_1+t)(x_2+t)}{(2-t)(t+2)}+\frac{8}{3}=\frac{8x_1x_2+8t(x_1+x_2)+8t^2}{4-t^2}+\frac{8}{3}=\frac{8(2t^2-4)-8t\times4t+24t^2}{3(4-t^2)}+\frac{8}{3}=0,$$

同理，$\overline{T_2P}\cdot\overline{T_2Q}=(\frac{2(x_1+t)}{2-t}+\frac{2}{3}\sqrt{3},\frac{2(x_1+t)}{2-t}-\frac{2}{3}\sqrt{3})\cdot(\frac{2(x_2+t)}{t+2}+\frac{2}{3}\sqrt{3},\frac{2(x_2+t)}{t+2}-\frac{2}{3}\sqrt{3})=0$，

因此以 $P,Q$ 为直径的圆恒过定点 $T_1,T_2$.

37. 解：（I）因为 $f(x)=[ax^2-(4a+1)x+4a+3]e^x$，

所以 $f'(x)=[2ax-(4a+1)]e^x+[ax^2-(4a+1)x+4a+3]e^x \ (x\in\mathbf{R})$

$=[ax^2-(2a+1)x+2]e^x$.

$f'(1)=(1-a)e$.

由题设知 $f'(1)=0$，即 $(1-a)e=0$，解得 $a=1$.

此时 $f(1)=3e\neq0$.

所以 $a$ 的值为 1.

（II）由（I）得 $f'(x)=[ax^2-(2a+1)x+2]e^x=(ax-1)(x-2)e^x$.

1）当 $a=0$ 时，令 $f'(x)=0$，$x=2$，

所以 $x, f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表：

| $x$ | $(-\infty,2)$ | $2$ | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↗ | 极大值 | ↘ |

2）当 $a \neq 0$，令 $f'(x)=0$，$x=\frac{1}{a}$ 或 $2$

①当 $a<0$ 时，$\frac{1}{a}<2$，所以 $x, f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表：

| $x$ | $(-\infty,\frac{1}{a})$ | $\frac{1}{a}$ | $(\frac{1}{a},2)$ | $2$ | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↘ | 极小值 | ↗ | 极大值 | ↘ |

②当 $a>0$ 时，

（i）当 $0<\frac{1}{a}<2$ 即 $a>\frac{1}{2}$ 时，

| $x$ | $(-\infty,\frac{1}{a})$ | $\frac{1}{a}$ | $(\frac{1}{a},2)$ | $2$ | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 极大值 | ↘ | 极小值 | ↗ |

（ii）当 $\frac{1}{a}=2$ 即 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)\geq 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增；

（iii）当 $\frac{1}{a}>2$ 即 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，

| $x$ | $(-\infty,2)$ | $2$ | $(2,\frac{1}{a})$ | $\frac{1}{a}$ | $(\frac{1}{a},+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 极大值 | ↘ | 极小值 | ↗ |

综上，

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(\frac{1}{a},2)$，单调递减区间是 $(-\infty,\frac{1}{a})$ 和 $(2,+\infty)$；

当 $a=0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,2)$，单调递减区间是 $(2,+\infty)$；

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,2)$ 和 $(\frac{1}{a},+\infty)$，单调递减区间为 $(2,\frac{1}{a})$；

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $\mathbb{R}$，无单调递减区间；

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,\frac{1}{a})$ 和 $(2,+\infty)$，单调递减区间是 $(\frac{1}{a},2)$.

38. 解：（I）函数 $f(x)=x^2\ln x-2x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，

导函数为 $f'(x)=2x\ln x+x-2$．

所以 $f'(1)=-1$，　又 $f(1)=-2$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-x-1$．

（II）由已知 $f(2)-f(1)=4\ln 2-2$．

所以只需证明方程 $2x\ln x+x-2=4\ln 2-2$ 在区间 $(1,2)$ 有唯一解．

即方程 $2x\ln x+x-4\ln 2=0$ 在区间 $(1,2)$ 有唯一解．

设函数 $g(x)=2x\ln x+x-4\ln 2$，

则 $g'(x)=2\ln x+3$．

当 $x\in(1,2)$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在区间 $(1,2)$ 单调递增．

又 $g(1)=1-4\ln 2<0$，$g(2)=2>0$，

所以 存在唯一的 $x_0\in(1,2)$，使得 $g(x_0)=0$．

综上，存在唯一的 $x_0\in(1,2)$，使得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率为 $f(2)-f(1)$．

（III）$f(1.01)>-2.01$．证明如下：

首先证明：当 $x>1$ 时，$f(x)>-x-1$．

设 $h(x)=f(x)-(-x-1)=x^2\ln x-x+1$，

则 $h'(x)=x+2x\ln x-1$．

当 $x>1$ 时，$x-1>0$，$2x\ln x>0$，

所以 $h'(x)>0$，故 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

所以 $x>1$ 时，有 $h(x)>h(1)=0$，

即当 $x>1$ 时，有 $f(x)>-x-1$．

所以 $f(1.01)>-1.01-1=-2.01$．

39. 解：（I）因为 $f'(x)=3x^2+b$，由题意，$f'(\frac{1}{2})=0$，即：$3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+b=0$，则 $b=-\frac{3}{4}$．

（II）由（I）可得 $f(x)=x^3-\frac{3}{4}x+c$，$f'(x)=3x^2-\frac{3}{4}=3(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$，

令 $f'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{2}$ 或 $x<-\frac{1}{2}$；令 $f'(x)<0$，得 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(-\infty,-\frac{1}{2})$，$(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增，

且 $f(-1)=c-\frac{1}{4},f(-\frac{1}{2})=c+\frac{1}{4},f(\frac{1}{2})=c-\frac{1}{4},f(1)=c+\frac{1}{4}$，

若 $f(x)$ 所有零点中存在一个绝对值大于 1 的零点 $x_0$，则 $f(-1)>0$ 或 $f(1)<0$，

即 $c>\frac{1}{4}$ 或 $c<-\frac{1}{4}$.

当 $c>\frac{1}{4}$ 时，$f(-1)=c-\frac{1}{4}>0, f(-\frac{1}{2})=c+\frac{1}{4}>0, f(\frac{1}{2})=c-\frac{1}{4}>0, f(1)=c+\frac{1}{4}>0$，

又 $f(-4c)=-64c^3+3c+c=4c(1-16c^2)<0$，

由零点存在性定理知 $f(x)$ 在 $(-4c,-1)$ 上存在唯一一个零点 $x_0$，

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上存在唯一一个零点，在 $(-1,+\infty)$ 上不存在零点，

此时 $f(x)$ 不存在绝对值不大于 1 的零点，与题设矛盾；

当 $c<-\frac{1}{4}$ 时，$f(-1)=c-\frac{1}{4}<0, f(-\frac{1}{2})=c+\frac{1}{4}<0, f(\frac{1}{2})=c-\frac{1}{4}<0, f(1)=c+\frac{1}{4}<0$，

又 $f(-4c)=64c^3+3c+c=4c(1-16c^2)>0$，

由零点存在性定理知 $f(x)$ 在 $(1,-4c)$ 上存在唯一一个零点 $x_0'$，

即 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上存在唯一一个零点，在 $(-\infty,1)$ 上不存在零点，

此时 $f(x)$ 不存在绝对值不大于 1 的零点，与题设矛盾；

综上，$f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

40.【详解】（1）因为 $r_1(A)=1.2, r_2(A)=-1.2$，$c_1(A)=1.1, c_2(A)=0.7, c_3(A)=-1.8$，所以 $k(A)=0.7$

（2）$r_1(A)=1-2d, r_2(A)=-1+2d$，$c_1(A)=c_2(A)=1+d, c_3(A)=-2-2d$

因为 $-1\le d\le 0$，所以 $|r_1(A)|=|r_2(A)|\ge 1+d\ge 0$，$|c_3(A)|\ge 1+d\ge 0$

所以 $k(A)=1+d\le 1$

当 $d=0$ 时，$k(A)$ 取得最大值 1

（3）任给满足性质 $P$ 的数表 $A$（如图所示）

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |

任意改变 $A$ 的行次序或列次序，或把 $A$ 中的每个数换成它的相反数，所得数表 $A^*$ 仍满足性质 $P$，并且

$k(A)=k(A^*)$，因此，不妨设 $r_1(A)\ge 0$，$c_1(A)\ge 0$，$c_2(A)\ge 0$

由 $k(A)$ 得定义知，$k(A)\le r_1(A)$，$k(A)\le c_1(A)$，$k(A)\le c_2(A)$，

从而 $3k(A)\le r_1(A)+c_1(A)+c_2(A)=(a+b+c)+(a+d)+(b+e)$

$=(a+b+c+d+e+f)+(a+b-f)=a+b-f\le 3$

所以，$k(A)\le 1$，由（2）知，存在满足性质 $P$ 的数表 $A$ 使 $k(A)=1$，故 $k(A)$ 的最大值为 1

41.【详解】(1) 解：由 $a_n=|a_{n+1}-a_{n+2}|$ 得 $-a_n=a_{n+1}-a_{n+2}$ 或 $a_n=a_{n+1}-a_{n+2}$，

所以 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 或 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$，

因为足 $a_1=3$，$a_2=7$，

所以 $a_3=10$ 或 $a_3=4$，

所以，当 $a_3=10$ 时，$a_4=17$ 或 $a_4=3$；

当 $a_3=4$ 时，$a_4=11$ 或 $a_4=-3$

因为数列 $\{a_n\}$ 是由正实数组成的无穷数列，

所以 $a_4=-3$ 舍，

所以，数列 $\{a_n\}$ 前 4 项的所有可能取法有 $a_1=3$，$a_2=7$，$a_3=10$，$a_4=17$ 或 $a_1=3$，$a_2=7$，$a_3=10$，$a_4=3$

或 $a_1=3$，$a_2=7$，$a_3=4$，$a_4=11$.

（2）解：不存在，下面证明：

因为 $a_n=|a_{n+1}-a_{n+2}|$，$n\in\mathbf{N}^*$

所以，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 或 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$，

当 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 时，

因为数列 $\{a_n\}$ 是由正实数组成的无穷数列，

所以 $a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}>a_{n+2}=a_{n+1}+a_n>a_n$，即 $a_{n+3}>a_n$

或 $a_{n+3}=a_{n+2}-a_{n+1}=a_n$，

所以 $a_{n+3}\ge a_n$；

当 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$ 时，

因为数列 $\{a_n\}$ 是由正实数组成的无穷数列，

所以 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n>0$，即 $a_{n+1}>a_n$

所以 $a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}>a_{n+1}>a_n$ 或 $a_{n+3}=a_{n+2}-a_{n+1}=-a_n<0$（舍），

综上，$a_{n+3}\ge a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$

所以 $a_{3k-2}\ge a_1=3$，$a_{3k-1}\ge a_2=7$，$a_{3k}\ge a_3=4$.

综上，不存在正整数 $k$，满足 $a_k=1$.

（3）解：由 $a_n=|a_{n+1}-a_{n+2}|$，$n\in\mathbf{N}^*$

所以，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ ①或 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$ ②，

对于任意的 $a_n,a_{n+1}$，均可以使用①递推，只有满足 $a_{n+1}>a_n$ 时，才可以使用②递推；

若 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$，显然 $a_{n+2}<a_{n+1}$，下次只能用①递推，即 $a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}$

所以，②不能连续使用.

记 $b_k=\max\{a_{2k-1},a_{2k}\}(k\in\mathrm{N}$ 且 $k\ge1)$，$b_{k+1}=\max\{a_{2k+1},a_{2k+2}\}$

若 $a_{2k+1}=a_{2k}+a_{2k-1}$，则 $b_{k+1}>b_k$；

若 $a_{2k+1}=a_{2k}-a_{2k-1}$，则 $a_{2k+2}=a_{2k+1}+a_{2k}>a_{2k}>a_{2k-1}$，所以 $b_{k+1}>b_k$，

所以 $b_{k+1}>b_k$ $(k\in\mathrm{N}$ 且 $k\ge1)$，

所以，$a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 中至少有 $a_1,a_2,b_2,b_3,\cdots,b_{50}$ 共 51 项，即 $c_{100}\ge51$.

举例如下：

$$a_n=\begin{cases}a_{n-1}+a_{n-2},(n\text{为奇数})\\a_{n-1}-a_{n-2},(n\text{为偶数})\end{cases}$$

所以 $\{a_n\}$: 3,7,10,3,13,10,23,13,36,23……，此时 $c_{100}=51$，

所以，$c_{100}$ 的最小值为 51.

42.【详解】(1) $P=\{1,2,3\}$ 是“完美集合”，此时，$A=\{1\}$，$B=\{2\}$，$C=\{3\}$，

满足 $c_1<c_2<\cdots<c_n$，$a_k+b_k=c_k$.

$Q=\{1,2,3,4,5,6\}$ 不是“完美集合”，

若 $Q$ 为“完美集合”，将 $Q$ 分成 3 个集合，每个集合中有两个元素，则 $a_1+b_1=c_1$，$a_2+b_2=c_2$.

$Q$ 中所有元素之和为 21，$21\div2=10.5$ 不符合要求.

（II）由（I）可得 $x\neq 2$，

若 $A=\{1,3\}$， $B=\{4,6\}$，根据"完美集合"的定义，

则 $C=\{5,x\}$， $x=3+6=9$.

若 $A=\{1,4\}$， $B=\{5,3\}$，根据"完美集合"的定义，

则 $C=\{6,x\}$， $x=3+4=7$.

若 $A=\{1,5\}$， $B=\{6,3\}$，根据"完美集合"的定义，

则 $C=\{4,x\}$， $x=5+6=11$.

综上：正整数 $x$ 的值为，9，7，11 中任一个.

（III）设集合 $P$ 中所有元素的和为 $1+2+3+\ldots+3n=\dfrac{3n(3n+1)}{2}$，

而 $a_1+b_1+c_1+a_2+b_2+c_2+\ldots+a_{3n}+b_{3n}+c_{3n}=2(c_1+c_2+c_3+c_{n-1}+c_n)$，

因为 $c_n=3n$，

所以 $\dfrac{3n(3n+1)}{2}=2(c_1+c_2+c_3+c_{n-1}+c_n)$， $\dfrac{3n(3n+1)}{4}=c_1+c_2+c_3+c_{n-1}+c_n$，

$\dfrac{9n(n-1)}{4}=c_1+c_2+c_3+c_{n-1}$，

等号右边为正整数，

则等式左边 $9n(n-1)$ 可以被 4 整除，

所以 $n=4k$ 或 $n-1=4k$，

即 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ $(n\in N^*)$.

## 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。