

数 学 试 卷

2024. 1

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知直线过点 $P(-1, 1)$ ，且倾斜角是 45° ，则直线不经过

- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

(2) 若 $(1+x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ ，则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 =$

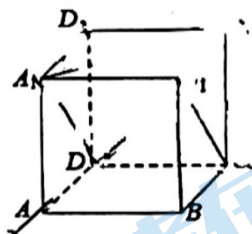
- (A) 8 (B) 16 (C) 32 (D) 64

(3) 某气象台天气预报的准确率为 80%，则 3 次预报中恰有 1 次预报准确的概率是

- (A) 9.6% (B) 10.4% (C) 80% (D) 99.2%

(4) 如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 CB_1 与直线 A_1C_1 所成角的大小为

- (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$
(C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$



(5) 已知某班级中，喜欢文学阅读的学生占 75%，喜欢文学阅读而且喜欢科普阅读的学生占 30%。若从这个班级的学生中任意抽取一人，则在抽到的学生喜欢文学阅读的条件下，该学生也喜欢科普阅读的概率为

- (A) 22.5% (B) 30% (C) 40% (D) 75%

(6) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的实轴长为 4，则双曲线的渐近线方程为

- (A) $y = \pm \frac{1}{2}x$ (B) $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$ (C) $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}x$ (D) $y = \pm 2x$

(7) 为了迎接在杭州举行的第十九届亚运会，学校开展了“争做运动达人，喜迎杭州亚运”活动。现从某班的 4 名男生和 3 名女生中选出 3 人参加活动，则这 3 人中既有男生又有女生的选法种数为

- (A) 20 (B) 30 (C) 35 (D) 60

数学试卷第 1 页(共 4 页)

(8) 已知直线 $l_1: ax - y + 1 = 0$, $l_2: x - by - 2 = 0$, 则 “ $\frac{a}{b} = -1$ ” 是 “ $l_1 \perp l_2$ ” 的

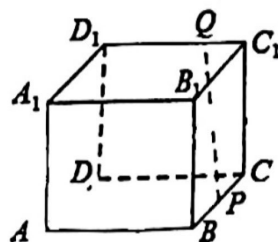
- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分又不必要条件

(9) 《九章算术》中的方亭指的是正四面形棱台体建筑物, 正四面形棱台即今天的正四棱台. 如图, 某方亭的上底面与下底面的边长分别为 4 和 8, 每个侧面与下底面夹角的正切值均为 $\sqrt{14}$, 则方亭的侧面积为



- (A) $64\sqrt{15}$ (B) $48\sqrt{15}$
(C) $12\sqrt{15}$ (D) $4\sqrt{15}$

(10) 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = AD = 2$, $AA_1 = \sqrt{3}$, P, Q 分别是棱 BC 和 C_1D_1 上的两个动点, 且 $PQ = 2$, 则 PQ 的中点 E 到 CC_1 的距离为



- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

(11) 在 $(x - \frac{1}{x})^5$ 的展开式中, x 的系数为_____.

(12) 设 F 为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, 则点 F 的坐标为_____; 若抛物线上一点 M 满足 $|MF| = 5$, 那么点 M 的横坐标为_____.

(13) 北京的三条文化带——大运河文化带、长城文化带、西山永定河文化带, 是北京文化脉络乃至中华文明的精华所在. 为了让同学们了解这三条文化带的内涵, 现从 4 名老师中选 3 名老师, 每人讲述一条文化带, 每条文化带由一名老师讲述, 则不同的分配方案种数是_____.

(14) 已知圆 $D: x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$, 则圆 D 的半径为_____; 与圆 D 和圆 $x^2 + y^2 = 1$ 都相切的直线的方程为_____ (只需写出一条直线的方程)

(15) 数学中有许多形状优美的曲线, 曲线 $E: |x| + |y| + x^2y^2 = 3$ 就是其中之一.

给出下列四个结论:

- ① 曲线 E 关于坐标原点对称;
② 曲线 E 上任意一点到原点的距离的最小值为 2;
③ 曲线 E 恰好经过 8 个整点 (即横、纵坐标均为整数的点);
④ 曲线 E 所围成的区域的面积大于 8.

其中所有正确结论的序号是_____.

数学试卷第 2 页 (共 4 页)

三、解答题（本大题共6小题，共85分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

(16)（本小题13分）

已知圆 C 的圆心为 $(2,3)$ ，且过坐标原点

(I) 求圆 C 的方程；

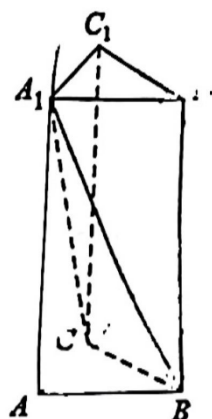
(II) 若过点 $(0,2)$ 的直线 l 与圆 C 相交于 M, N 两点，且 $|MN|=6$ ，求直线 l 的方程。

(17)（本小题13分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AA_1 \perp$ 平面 ABC ， $AB=AC=1$ ， $AA_1=2$ ， $AB \perp AC$ 。

(I) 求直线 AC 与平面 A_1BC 所成角的正弦值；

(II) 求点 B_1 到平面 A_1BC 的距离。



(18)（本小题14分）

某网站为研究新闻点击量的变化情况，收集得到了该网站连续30天的新闻点击量变化数据，如下表所示。在描述新闻点击量变化时，用“ $\uparrow$ ”表示“上涨”，即当天新闻点击量比前一天新闻点击量高；用“ $\downarrow$ ”表示“下降”，即当天新闻点击量比前一天新闻点击量低；用“-”表示“不变”，即当天新闻点击量与前一天新闻点击量相同。

时段	新闻点击量													
第1天到第15天	$\uparrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	-	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	-	$\downarrow$	$\uparrow$
第16天到第30天	-	$\downarrow$	-	$\uparrow$	-	$\uparrow$	$\downarrow$		$\uparrow$	$\downarrow$	-	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

用频率估计概率。

(I) 试估计该网站新闻点击量“下降”的概率；

(II) 从样本中的前15天和后15天中各随机抽取1天，记 X 表示其中该网站新闻点击量“上涨”的天数，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$ ；

(III) 从样本给出的30天中任取1天，用“ $\zeta=1$ ”表示该天新闻点击量“上涨”，“ $\zeta=0$ ”表示该天新闻点击量“下降”或“不变”然后继续统计接下来的10天的新闻点击量，其中有6天“上涨”、3天“下降”、1天“不变”，相应地，从这40天中任取1天，用“ $\eta=1$ ”表示该天新闻点击量“上涨”，“ $\eta=0$ ”表示该天新闻点击量“下降”或“不变”，直接写出方差 $D\zeta$ ， $D\eta$ 大小关系。

(19) (本小题 15 分)

已知椭圆 $G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $A(2, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 直线 $y = k(x - 1)$ 与

椭圆 G 交于不同的两点 M, N .

(I) 求椭圆 G 的方程;

(II) 当 $\triangle AMN$ 的面积为 $\frac{\sqrt{10}}{3}$ 时, 求 k 的值.

(20) (本小题 15 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AD \perp CD$, $PD = CD = 2AB = 2$, M 是 PC 的中点.

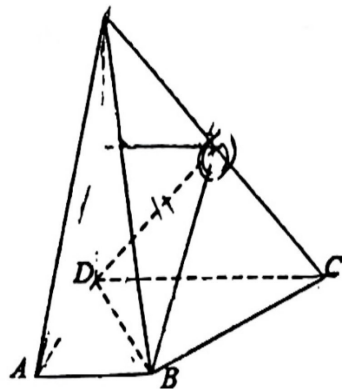
(I) 求证: $BM \parallel$ 平面 PAD ;

(II) 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求二面角 $M-BD-C$ 的余弦值.

条件①: $CB \perp PB$;

条件②: $DM = BM$.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.



(21) (本小题 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的上顶点为 B , 圆 $O: x^2 + y^2 = n (n > 0)$.

对于圆 O , 给出两个性质:

① 在圆 O 上存在点 P , 使得直线 BP 与椭圆 C 相交于另一点 A , 满足 $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{BP}$;

② 对于圆 O 上任意点 Q , 圆 O 在点 Q 处的切线与椭圆 C 交于 M, N 两点, 都有 $OM \perp ON$.

(I) 当 $n = 1$ 时, 判断圆 O 是否满足性质①和性质②; (直接写出结论)

(II) 已知当 $n = \frac{65}{9}$ 时, 圆 O 满足性质①, 求点 A 和点 P 的坐标;

(III) 是否存在 $n (n > 0)$, 使得圆 O 同时满足性质①和性质②, 若存在, 求出 n 的值; 若不存在, 说明理由.

昌平区 2023—2024 学年第二学期高二年级期末质量抽测

数学试卷参考答案及评分标准 2024.1

一、选择题(本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	A	C	C	A	B	A	B	D

二、填空题(本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

(11) 10 (12) (1,0);4 (13) 24

(14) $4; x=1$ (答案不唯一) (15) ①③④

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 85 分)

(16) (共 13 分)

解: (I) 设圆 C 的方程为 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = r^2 (r > 0)$,

依题意, $r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$,

所以圆 C 的方程为 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$5 分

(II) 设圆心 $C(2, 3)$ 到直线 l 的距离为 d ,

由 $|MN| = 6$, $(\frac{1}{2}|MN|)^2 + d^2 = r^2$, 解得 $d = 2$.

若直线 l 的斜率不存在, 则直线 l 的方程为 $x = 0$, 满足条件;

若直线 l 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y = kx + 2$, 即 $kx - y + 2 = 0$.

$$d = \frac{|2k - 3 + 2|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2,$$

解得 $k = -\frac{3}{4}$. 此时, 直线 l 的方程为 $3x + 4y - 8 = 0$.

所以直线 l 的方程为 $x = 0$ 或 $3x + 4y - 8 = 0$13 分

(17) (共 13 分)

解 (I) 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,

因为 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $AB, AC \subset$ 平面 ABC ,

所以 $AA_1 \perp AB, AA_1 \perp AC$.

因为 $AB \perp AC$, 以点 A 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系 $A - xyz$.

则 $A(0,0,0), B(1,0,0), C(0,1,0), A_1(0,0,2)$,

$$\overrightarrow{CB} = (1, -1, 0), \overrightarrow{CA_1} = (0, -1, 2), \overrightarrow{AC} = (0, 1, 0).$$

设平面 A_1BC 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CB} = x - y = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CA_1} = -y + 2z = 0, \end{cases} \text{ 所以 } x = y, y = 2z.$$

令 $z = 1$, 则 $x = y = 2$, 所以 $\vec{n} = (2, 2, 1)$.

$$\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\vec{n}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2}{3}.$$

设直线 AC 与平面 A_1BC 所成角为 θ ,

$$\sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AC} \rangle| = \frac{2}{3}.$$

所以直线 AC 与平面 A_1BC 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$9 分

$$(II) \quad B_1 = (1, 0, 2), \overrightarrow{BB_1} = (0, 0, 2),$$

$$\text{所以点 } B_1 \text{ 到平面 } A_1BC \text{ 的距离 } d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{BB_1}|}{|\vec{n}|} = \frac{2}{3}. \quad \text{.....13 分}$$

(18) (共 14 分)

解 (I) 根据表格数据可以看出, 上述 30 天里有 10 天新闻点击量“下降”,

设事件 M 为该网站新闻点击量“下降”. 用频率估计概率, 估计 $P(M) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$4 分

(II) 设从样本的前 15 天中随机抽取 1 天, 该天网站新闻点击量“上涨”为事件 A , 则

$$P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3},$$

从样本的后 15 天中随机抽取 1 天, 该天网站新闻点击量“上涨”为事件 B , 则 $P(B) = \frac{7}{15}$.

A, B 互相独立.

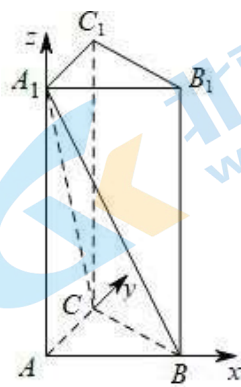
X 的所有可能取值为 0, 1, 2.

$$P(X=0) = P(\overline{AB}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{7}{15}) = \frac{16}{45},$$

$$P(X=1) = P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = \frac{1}{3} \times (1 - \frac{7}{15}) + (1 - \frac{1}{3}) \times \frac{7}{15} = \frac{22}{45},$$

$$P(X=2) = P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{15} = \frac{7}{45}.$$

X 的分布列为:



X	0	1	2
P	$\frac{16}{45}$	$\frac{22}{45}$	$\frac{7}{45}$

$$E(X) = 0 \times \frac{16}{45} + 1 \times \frac{22}{45} + 2 \times \frac{7}{45} = \frac{4}{5}.$$

.....11 分

(III) $D(\xi) < D(\eta)$.

.....14 分

(19) (本小题 15 分)

解: (I) 因为椭圆 G 过点 $A(2, 0)$, 所以 $a = 2$.

因为离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $c = \sqrt{2}$.

$$\text{由 } b^2 = a^2 - c^2 = 2,$$

所以椭圆 G 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

.....5 分

$$\text{(II) 将直线方程与椭圆方程联立} \begin{cases} y = k(x-1), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases}$$

$$\text{消元得 } (1+2k^2)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 4 = 0.$$

$$\Delta = (-4k^2)^2 - 4(1+2k^2)(2k^2-4) = 24k^2 + 16 > 0.$$

设交点 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则

$$x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1+2k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{2k^2-4}{1+2k^2},$$

$$\text{所以 } |MN| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{2\sqrt{(1+k^2)(4+6k^2)}}{1+2k^2}.$$

因为点 $A(2, 0)$ 到直线的距离为 $d = \frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$

$$\text{所以 } \triangle AMN \text{ 的面积为 } S = \frac{1}{2} |MN| \cdot d = \frac{|k|\sqrt{4+6k^2}}{1+2k^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}, \text{ 即 } 7k^4 - 2k^2 - 5 = 0.$$

解得 $k = \pm 1$.

.....15 分

(20) (共 15 分)

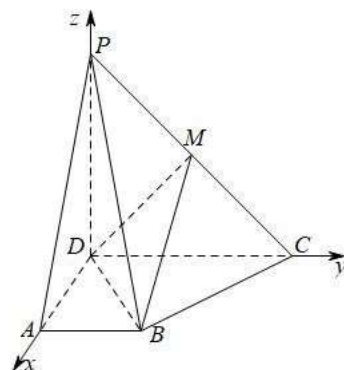
解: (I) 因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $PD \perp CD, PD \perp AD$.

因为 $AD \perp CD$, 以 D 为原点建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.

设 $DA = a(a > 0)$, 则 $D(0, 0, 0), B(a, 1, 0), C(0, 2, 0), P(0, 0, 2), M(0, 1, 1)$,

所以 $\overrightarrow{BM} = (-a, 0, 1)$.



因为平面 PAD 的一个法向量 $\overrightarrow{CD} = (0, -2, 0)$ ，且 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ ，

所以 $CD \perp BM$ 。

因为 $BM \not\subset$ 平面 PAD ，

所以 $BM \parallel$ 平面 PAD 。

(II) 选条件①： $CB \perp PB$ 。

因为 $CB \perp PB$ ， $\overrightarrow{PB} = (a, 1, -2)$ ， $\overrightarrow{CB} = (a, -1, 0)$ ，

所以 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2 - 1 = 0$ 。

所以 $a = 1$ (舍负)，所以 $B(1, 1, 0)$ 。

所以 $\overrightarrow{DM} = (0, 1, 1)$ ， $\overrightarrow{DB} = (1, 1, 0)$ 。

设平面 MBD 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DM} = y + z = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DB} = x + y = 0, \end{cases} \text{所以 } y = -x, z = x.$$

令 $x = 1$ ，则 $y = -1$ ， $z = 1$ 。

所以 $\vec{n} = (1, -1, 1)$ 。

因为平面 BDC 的一个法向量为 $\vec{m} = (0, 0, 1)$ ，

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

由图可知二面角 $M - BD - C$ 是锐角，

所以二面角 $M - BD - C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

选条件②： $DM = BM$ 。

在 $Rt\triangle PDC$ 中， $DM = \sqrt{2}$ ，

所以 $BM = \sqrt{a^2 + 1} = \sqrt{2}$ 。

所以 $a = 1$ (舍负)，所以 $B(1, 1, 0)$ 。

以下同选条件①。

(21) (共 15 分)

解 (I) 当 $n = 1$ 时，圆 O 满足性质①，不满足性质②。

.....6 分

.....15 分

.....4 分

(II) 由椭圆C的上顶点为B, 得 $B(0,3)$.

由 $n = \frac{65}{9}$ 时, 圆O满足性质①,

设点 $P(x_0, y_0)$, $A(c, d) (-3 \leq d \leq 3)$.

$$\overrightarrow{PA} = (c - x_0, d - y_0), \quad \overrightarrow{BP} = (x_0, y_0 - 3).$$

$$\text{由 } \overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{BP} \text{ 得 } \begin{cases} c - x_0 = 2x_0, \\ d - y_0 = 2(y_0 - 3), \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x_0 = \frac{c}{3}, \\ y_0 = \frac{d+6}{3}. \end{cases}$$

由点P在圆O上, A在椭圆C上, 得

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = \frac{65}{9}, \\ c^2 + 2d^2 = 18, \end{cases} \text{ 化简得 } d^2 - 12d + 11 = 0, \text{ 解得 } d = 1 \text{ 或 } d = 11 \text{ (舍)}.$$

$$\text{所以 } \begin{cases} d = 1, \\ c = 4, \\ x_0 = \frac{4}{3}, \\ y_0 = \frac{7}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} d = 1, \\ c = -4, \\ x_0 = -\frac{4}{3}, \\ y_0 = \frac{7}{3}. \end{cases}$$

$$\text{所以 } A(4,1), P(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}) \text{ 或 } A(-4,1), P(-\frac{4}{3}, \frac{7}{3}).$$

.....9分

(III) 存在 $n = 6$, 使得圆O同时满足性质①和性质②.

下面进行证明:

当 $n = 6$ 时, 圆O的方程为 $x^2 + y^2 = 6$. 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

当直线MN的斜率不存在时, 直线MN的方程为 $x = \pm\sqrt{6}$.

$$\text{当 } x = \sqrt{6} \text{ 时, } \begin{cases} x = \sqrt{6}, \\ \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1, \end{cases} \text{ 解得 } y_1 = \sqrt{6}, y_2 = -\sqrt{6}.$$

$$\text{此时 } M(\sqrt{6}, \sqrt{6}), N(\sqrt{6}, -\sqrt{6}).$$

所以 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$, 即 $OM \perp ON$.

同理当 $x = -\sqrt{6}$ 时也满足 $OM \perp ON$.

若直线MN的斜率存在, 设其方程为 $y = kx + m$.

直线 MN 与圆 $x^2 + y^2 = 6$ 相切, 所以 $d = \frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{6}$, 化简得 $m^2 = 6k^2 + 6$.

$$\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \quad \text{得 } (2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 18 = 0.$$

由 $\Delta = 16k^2m^2 - 4(2k^2 + 1)(2m^2 - 18) > 0$, 得 $m^2 < 18k^2 + 9$.

$$x_1 + x_2 = -\frac{4km}{2k^2 + 1}, \quad x_1x_2 = \frac{2m^2 - 18}{2k^2 + 1}.$$

$$OM \cdot ON = x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = (k^2 + 1)x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2,$$

$$\text{所以 } OM \cdot ON = (k^2 + 1) \frac{2m^2 - 18}{2k^2 + 1} + km \left(-\frac{4km}{2k^2 + 1} \right) + m^2 = \frac{3m^2 - 18k^2 - 18}{2k^2 + 1}.$$

因为 $m^2 = 6k^2 + 6$, 所以 $OM \cdot ON = 0$, 即 $OM \perp ON$.

所以当 $n = 6$ 时, 圆 O 满足性质②.

当 $B(0, 3)$, $A(3\sqrt{2}, 0)$ 时满足 $OA \perp OB$, 此时直线 AB 的方程为 $\sqrt{2}x + 2y - 6 = 0$,

$$\text{圆心 } O \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离为 } \frac{|6|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2}} = \sqrt{6},$$

所以直线 AB 与圆 O 相切, 且切点 $P(\sqrt{2}, 2)$, 满足 $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{BP}$.

同理, 当 $B(0, 3)$, $A(-2\sqrt{3}, 0)$ 时满足 $OA \perp OB$,

直线 AB 与圆 O 相切, 且切点 $P(\sqrt{2}, 2)$, 满足 $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{BP}$.

所以, 当 $n = 6$ 时, 圆 O 满足性质①.

综上, 当 $n = 6$ 时, 圆 O 同时满足性质①和性质②.

.....15 分

北京高一高二高三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2024年1月北京各区各年级期末试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！



微信搜一搜



京考一点通

