

2019 北京市房山区高三（上）期末

数 学（文）

一、选择题（本大题共 8 小题，共 40.0 分）

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{x | x > a\}$, 若 $A \cap B = A$, 则实数 a 的取值可以为()

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

2. 下列函数中, 既是奇函数又在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是()

A. $y = -\frac{2}{x}$ B. $y = (x+1)^3$ C. $y = \tan x$ D. $y = 2^x$

3. 已知复数 z_1, z_2 在复平面内对应的点分别为 $(1, 1), (0, 1)$, 则 $\frac{z_1}{z_2} = ()$

A. $1+i$ B. $-1+i$ C. $-1-i$ D. $1-i$

4. 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 值为()

A. 15
B. 37
C. 57
D. 120

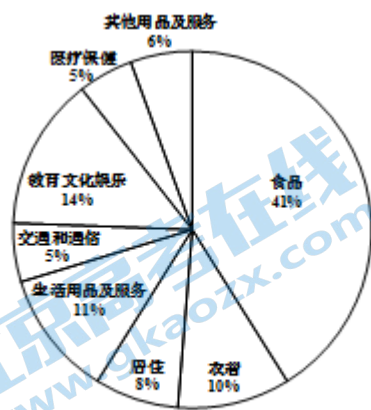
5. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x+2y=6 \\ x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$ 则 $3x+y$ 的最小值等于()

A. 2 B. $\frac{11}{2}$ C. $\frac{17}{2}$ D. 13

6. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则 “ $a > b$ ” 是 “ $a^3 > b^3$ ” 的()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 不充分也不必要条件

7. 改革开放四十年来, 北京市居民生活发生了翻天覆地的变化. 随着经济快速增长、居民收入稳步提升, 消费结构逐步优化升级, 生活品质显著增强, 美好生活蓝图正在快速构建. 北京市城镇居民人均消费支出从 1998 年的 7500 元增长到 2017 年的 40000 元. 1998 年与 2017 年北京市城镇居民消费结构对比如图所示: 则下列叙述中不正确的是()

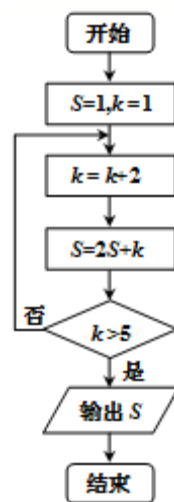


1998 年北京市城镇居民消费结构



2017 年北京市城镇居民消费结构

- A. 2017 年北京市城镇居民食品支出占比同 1998 年相比大幅度降低
 B. 2017 年北京市城镇居民人均教育文化娱乐类支出同 1998 年相比有所减少
 C. 2017 年北京市城镇居民医疗保健支出占比同 1998 年相比提高约 60%
 D. 2017 年北京市城镇居民人均交通和通信类支出突破 5 000 元, 大约是 1998 年的 14 倍



8. S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 其中 a_n 表示正整数 n 的所有因数中最大的奇数, 例如: 6 的因数有 1, 2, 3, 6, 则 $a_6 = 3$; 15 的因数有 1, 3, 5, 15, 则 $a_{15} = 15$. 那么 $S_{30} = (\quad)$

A. 240 B. 309 C. 310 D. 345

二、填空题 (本大题共 6 小题, 共 30.0 分)

9. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一个焦点坐标为 $(\sqrt{3}, 0)$, 则实数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 已知向量 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (2, 1)$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$; $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的大小为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. 在平面直角坐标系中, 角 α 的终边过点 $A(3, 4)$, 则 $\tan \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$; 将射线 OA (O 为坐标原点) 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后得到角 β 的终边, 则 $\sin \beta = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 如图所示, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗线画出的是某三棱锥的三视图, 则此三棱锥的最长的棱长等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.



13. 能够说明 “若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是单调函数, 则 $f(x)$ 的值域为 $\mathbb{R}$ ” 为假命题的一个函数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq a \\ x^2 - 2x - 4, & x > a. \end{cases}$

① 若 $a = 0$, 则 $f(x)$ 的极小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$;

② 若存在 m 使得方程 $f(x) - m = 0$ 无实根, 则 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 80.0 分)

15. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足公比 $q = 2$, 前 3 项和 $S_3 = 7$. 等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2 = a_3$, $b_3 + b_5 = 0$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 T_n 是 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求 T_n 的最大值.

16. 在锐角三角形 ABC 中, $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin B}$.

(I) 求 $\angle A$ 的大小;

(II) 若 $a = \sqrt{7}$, $b = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

17. 为节能环保, 推进新能源汽车推广和应用, 对购买纯电动汽车的用户进行财政补贴. 某地补贴政策如下 (R 表示纯电续航里程):

续航里程(公里)	补贴(万元/辆)
$R < 150$	不补贴
$150 \leq R < 200$	2.5
$200 \leq R < 300$	3.5
$300 \leq R < 400$	5.0
$400 \leq R$	7.5

有 A, B, C 三个纯电动汽车 4s 店分别销售不同品牌的纯电动汽车, 在一个月內它们的销售情况如下:

销量(辆) 4S 店 型号	A	B	C
型号 I : $150 \leq R < 200$	5	4	2
型号 II : $200 \leq R < 300$	15	12	6
型号 III : $300 \leq R < 400$	10	4	12

(每位客户只能购买一辆纯电动汽车)

(I)从上述购买纯电动汽车的客户中随机选一人,求此人购买的是B店纯电动汽车且享受补贴不低于3.5万元的概率;

(II)从购买A店纯电动汽车的客户中按分层抽样的方法随机选6人,再从这6人中随机选2人,进行使用满意度的调查,求这两人享受补贴恰好相同的概率;

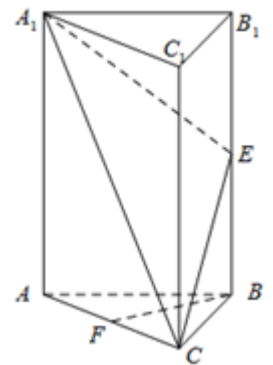
(III)分别用 $\bar{x}_A, \bar{x}_C$ 表示购买A店和C店纯电动汽车客户享受补贴的平均值,比较 $\bar{x}_A, \bar{x}_C$ 的大小.(只需写出结论)

18. 如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $A_1A \perp$ 底面 ABC ,底面 ABC 为等边三角形, $AB=4$, $AA_1=6$,E,F分别为 BB_1, AC 的中点.

(I)求证: $BF \parallel$ 平面 A_1EC ;

(II)求证: 平面 $A_1EC \perp$ 平面 ACC_1A_1 ;

(III)求四棱锥 $C-ABEA_1$ 的体积.



19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0,1)$, 且一个焦点坐标为 $(2\sqrt{2}, 0)$.

(I)求椭圆C的方程及离心率;

(II)过点 $N(1,0)$ 且与x轴不垂直的直线l与椭圆C交于P,Q两点,若在线段ON上存在点 $M(m,0)$,使得以MP, MQ为邻边的平行四边形是菱形,求m的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - kx (k \in \mathbb{R})$.

(I)当 $k=0$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II)若 $f(x) < 0$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,求k的取值范围;

(III)证明: 若 $f(x)$ 存在零点,则 $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

数学试题答案

一、选择题（本大题共 8 小题，共 40.0 分）

1.

【答案】A

【解析】解：∵ $A \cap B = A$ ，∴ $A \subseteq B$ ，

∴ $a < -1$ ，∴ $a = -2$ 。

故选：A。

由 $A \cap B = A$ ，得 $A \subseteq B$ ，得 $a < -1$ ，结合选项得 $a = -2$ 。

本题考查集合间的基本关系的应用，属基础题。

2.

【答案】A

【解析】解：A. 满足条件，

B. $y = (x + 1)^3$ 不是奇函数，不满足条件。

C. $y = \tan x$ 是奇函数，但在 $(0, +\infty)$ 上不是单调函数，不满足条件。

D. $y = 2^x$ 不是奇函数，不满足条件，

故选：A。

根据函数奇偶性和单调性的性质分别进行判断即可。

本题主要考查函数奇偶性和单调性的判断，要求熟练掌握常见函数的奇偶性和单调性的性质。

3.

【答案】D

【解析】解：∵ 复数 z_1, z_2 在复平面内对应的点分别为 $(1, 1), (0, 1)$ ，

∴ $z_1 = 1 + i, z_2 = i$ 。

∴ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{i} = \frac{-i(1+i)}{-i^2} = 1 - i$ 。

故选：D。

由已知条件可得 z_1, z_2 ，然后代入 $\frac{z_1}{z_2}$ ，再利用复数代数形式的乘除运算化简得答案。

本题考查了复数的代数表示法及其几何意义，考查了复数代数形式的乘除运算，是基础题。

4.

【答案】B

【解析】解：模拟程序的运行，可得

$S = 1, k = 1$

执行循环体， $k = 3, S = 5$

不满足条件 $k > 5$ ，执行循环体， $k = 5, S = 15$

不满足条件 $k > 5$ ，执行循环体， $k = 7, S = 37$

满足条件 $k > 5$ ，退出循环，输出 S 的值为 37。

故选：B。

由已知中的程序语句可知：该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 S 的值，模拟程序的运行过程，分析循环中各变量值的变化情况，可得答案。

本题考查了程序框图的应用问题，解题时应模拟程序框图的运行过程，以便得出正确的结论，是基础题。

5.

【答案】B

【解析】解：由 x, y 满足 $\begin{cases} x+2y=6 \\ x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$ 作出可行域如图，

联立 $\begin{cases} x+2y=6 \\ x=1 \end{cases}$ ，解得 $A(1, \frac{5}{2})$ ，

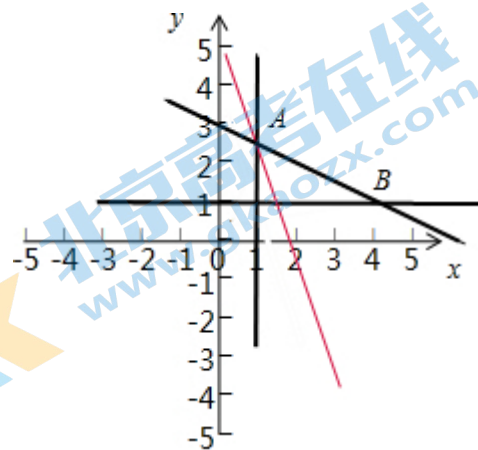
化目标函数 $z=3x+y$ 为 $y=-3x+z$ ，

由图可知，当直线 $y=-3x+z$ 过 A 时，直线在 y 轴上的截距最小， z 有最小值为 $3 \times 1 + \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$ 。

故选：B。

由约束条件作出可行域，化目标函数为直线方程的斜截式，数形结合得到最优解，联立方程组求得最优解的坐标，代入目标函数得答案。

本题考查简单的线性规划，考查了数形结合的解题思想方法，是中档题。



6.

【答案】C

【解析】解： $\because a, b \in R$ ，

当 $a > b > 0$ 时， $a^3 > b^3$ ；

当 $0 > a > b$ 时， $a^3 > b^3$ ；

当 $a > 0 > b$ 时，

$a^3 > b^3$ 。

综上所述，“ $a > b$ ” $\Rightarrow$ “ $a^3 > b^3$ ”，

反之：“ $a^3 > b^3$ ” $\Rightarrow$ “ $a > b$ ”，

$\therefore$ “ $a > b$ ”是“ $a^3 > b^3$ ”的充要条件，

故选：C。

由“ $a > b$ ” $\Rightarrow$ “ $a^3 > b^3$ ”，“ $a^3 > b^3$ ” $\Rightarrow$ “ $a > b$ ”，能够得到正确答案。

本题考查必要条件、充分条件、充分要条件的性质和应用，解题时要认真审题，仔细解答。

7.

【答案】B

【解析】解：由 1998 年与 2017 年北京市城镇居民消费结构对比图，知：

在 A 中，2017 年北京市城镇居民食品支出占比同 1998 年相比大幅度降低，故 A 正确；

在 B 中，2017 年北京市城镇居民人均教育文化娱乐类支出： $11\% \times 40000 = 4400$ 元，

1998 年北京市城镇居民人均教育文化娱乐类支出： $14\% \times 7500 = 1050$ 元，

故 2017 年北京市城镇居民人均教育文化娱乐类支出同 1998 年相比明显增加，故 B 错误；

在 C 中，2017 年北京市城镇居民医疗保健支出占比同 1998 年相比提高约 60%，故 C 正确；

在 D 中，2017 年北京市城镇居民人均交通和通信类支出突破 5000 元，大约是 1998 年的 14 倍，故 D 正确。

故选：B。

2017 年北京市城镇居民人均教育文化娱乐类支出： $11\% \times 40000 = 4400$ 元，1998 年北京市城镇居民人均教育文化娱乐类支出： $14\% \times 7500 = 1050$ 元，故 2017 年北京市城镇居民人均教育文化娱乐类支出同 1998 年相比明显增加。

本题考查命题真假的判断，考查扇形统计表的性质等基础知识，考查运算求解能力，考查数形结合思想，是基础题。

8.

【答案】C

【解析】解： a_n 表示正整数 n 的所有因数中最大的奇数，

$\therefore a_n = a_{2n}$ ，且 n 为奇数时， $a_n = n$ ，

那么 $S_{30} = 1 + 1 + 3 + 1 + 5 + 3 + 7 + 1 + 9 + 5 + 11 + 3 + 13 + 7 + 15 + 1 + 17 + 9 + 19$
 $+ 5 + 21 + 11 + 23 + 3 + 25 + 13 + 27 + 7 + 29 + 15$
 $= (1 + 3 + 5 + \cdots + 29) + (4 + 9 + 10 + 14 + 9 + 11 + 13 + 15) = \frac{1}{2}(1 + 29) \times 15 + 85 = 225 + 85 = 310.$

故选: C.

根据题意求出 a_n 的值, 再分析规律, 从而求得它们的和.

本题考查了新定义的计算求和问题, 注意运用等差数列的求和公式, 是中档题.

二、填空题 (本大题共 6 小题, 共 30.0 分)

9.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】解: 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一个焦点坐标为 $(\sqrt{3}, 0)$, $\therefore 1 + a^2 = 3$,
 $\therefore a = \sqrt{2}.$

故答案为: $\sqrt{2}.$

根据双曲线的焦点坐标可得 $c = \sqrt{3}$, 即可得到 $1 + a^2 = 3$, 解得即可.

本题考查双曲线的几何性质与标准方程, 考查学生的计算能力, 比较基础.

10.

【答案】 $5, \frac{\pi}{4}$

【解析】解: 因为向量 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (2, 1)$,

由向量数量积的坐标运算得: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 2 + 3 \times 1 = 5$,

设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ , 由向量的夹角公式得: $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{10} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

因为 $\theta \in [0, \pi]$,

所以 $\theta = \frac{\pi}{4}$,

故答案为: $5, \frac{\pi}{4}.$

由向量数量积的坐标运算得: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 2 + 3 \times 1 = 5$,

由向量的夹角公式得: $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{10} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 得解.

本题考查了向量数量积的坐标运算、向量的夹角公式, 属简单题.

11.

【答案】 $\frac{4}{3}, \frac{3}{5}$

【解析】解: $\because$ 角 α 的终边过点 $A(3, 4)$, 则 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$,

将射线 OA (O 为坐标原点) 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后得到角 β 的终边, 则 $\sin \beta = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}$,

故答案为: $\frac{4}{3}, \frac{3}{5}.$

由题意利用任意角的三角函数的定义, 诱导公式, 求得 $\tan \alpha$ 、 $\sin \beta$ 的值.

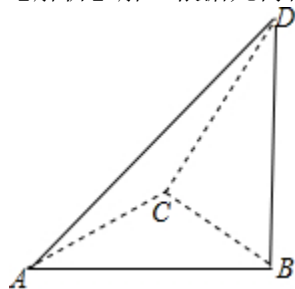
本题主要考查任意角的三角函数的定义, 诱导公式, 属于基础题.

12.

【答案】 3



【解析】解：根据几何体的三视图，转换为几何体为：



根据网格的长度得到： $AB = 2$ ， $BC = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$ ， $BD = 2$ ，
由于： $BD \perp$ 平面 ABC ，

所以： $CD = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = 3$ 最长。

故答案为：3

首先对几何体的三视图进行转换，进一步利用线面的垂直的应用求出结果。

本题考查的知识要点：三视图和几何体的转换，主要考查学生的运算能力和转化能力，属于基础题型。

13.

【答案】 $f(x) = 2^x$

【解析】解：函数 $f(x) = 2^x$ 满足是单调递增函数，但 $f(x)$ 的值域不是 $\mathbb{R}$ ，

故答案为： $f(x) = 2^x$

根据函数单调性和值域的性质进行寻找即可。

本题主要考查函数单调性和值域的应用，比较基础。

14.

【答案】 -5 $(-\infty, -5) \cup (4, +\infty)$

【解析】解：①当 $a = 0$ 时，当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = x$ 为增函数，

当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2 - 2x - 4$ ，对称轴为 $x = 1$ ，

当 $0 < x \leq 1$ 时， $f(x)$ 为减函数，当 $x \geq 1$ 时， $f(x)$ 为增函数，

即当 $x = 1$ 时，函数取得极小值，此时 $f(1) = 1 - 2 - 4 = -5$ ，

② $\because$ 当 $x \leq a$ 时， $f(x) \leq a$ ，

当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $f(x) \rightarrow +\infty$ ，

若存在 m 使得方程 $f(x) - m = 0$ 无实根，即存在 m 使得方程 $f(x) = m$ 无实根，

则说明函数 $f(x)$ 的值域不是 $\mathbb{R}$ ，

即当 $x > a$ 时， $f(x) > a$ ，即可。

若 $a < 1$ ，当 $x > a$ 时， $f(x)$ 的最小值为 $f(1) = 1 - 2 - 4 = -5$ ，

此时只要 $a < -5$ 即可，

若 $a \geq 1$ ，此时 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 为增函数，则 $f(x) > f(a) = a^2 - 2a - 4$ ，

由 $a^2 - 2a - 4 > a$ ，即 $a^2 - 3a - 4 > 0$ ，得 $(a + 1)(a - 4) > 0$ ，

则 $a > 4$ 或 $a < -1$ (舍)，

综上 $a > 4$ 或 $a < -5$ ，

即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -5) \cup (4, +\infty)$ ，

故答案为： -5 ， $(-\infty, -5) \cup (4, +\infty)$ ，

①判断函数的单调性，结合函数极值的定义进行判断即可

②根据分段函数的表达式求出函数 $f(x)$ 的取值范围，若方程无实根，等价于 $f(x)$ 与 $y = m$ 没有交点，利用函数与方程的关系进行转化求解即可。

本题主要考查分段函数的应用，结合分段函数的解析式求出函数 $f(x)$ 的取值范围是解决本题的关键。

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80.0 分）

15.

【答案】解：(1)根据题意，等比数列 $\{a_n\}$ 满足公比 $q=2$ ，前3项和 $S_3=7$ ，
则有 $S_3=a_1+a_2+a_3=a_1+2a_1+4a_1=7$ ，
解可得 $a_1=1$ ，
则 $a_n=a_1 \times q^{n-1}=2^{n-1}$ ，
(2)等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2=a_3=4$ ，
若 $b_3+b_5=0$ ，则 $b_4=0$ ，
则数列 $\{b_n\}$ 的公差 $d=\frac{b_4-b_2}{2}=-2<0$ ，
故当 $n=3$ 或 4 时， T_n 取得最大值，此时 $T_3=T_4=b_1+b_2+b_3=3b_2=12$ 。

【解析】(1)根据题意，由等比数列的通项公式可得 $S_3=a_1+a_2+a_3=a_1+2a_1+4a_1=7$ ，解可得 a_1 的值，进而计算可得答案；

(2)根据题意，分析可得 $b_4=0$ ，可得公差 $d<0$ ，结合等差数列前 n 项和的性质分析可得答案。
本题考查等比数列、等差数列的性质，关键是掌握等比数列、等差数列的通项公式，属于基础题。

16.

【答案】(本题满分为13分)

解：(I) $\because \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin B}$ ，
 $\therefore$ 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，可得： $2\sin A \sin B = \sqrt{3}\sin B$ ，
 $\because \sin B \neq 0$ ，
 $\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，... 4分
 $\because A \in (0, \pi)$ ，
 $\therefore A = \frac{\pi}{3}$... 6分

(II) $\because a = \sqrt{7}, b = 2, A = \frac{\pi}{3}$ ，
 $\therefore$ 由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$ ，可得： $7 = 4 + c^2 - 2 \times 2 \times c \times \cos \frac{\pi}{3}$ ，整理可得： $c^2 - 2c - 3 = 0$ 。
 $\therefore$ 解得： $c = 3$ ，或 -1 (舍去)，... 11分
 $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$... 13分

【解析】(I)由正弦定理化简已知可得 $2\sin A \sin B = \sqrt{3}\sin B$ ，结合 $\sin B \neq 0$ ，可求 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，结合范围 $A \in (0, \pi)$ ，可求 $A = \frac{\pi}{3}$ 。

(II)由余弦定理可得 $c^2 - 2c - 3 = 0$ 。解得 c 的值，利用三角形的面积公式即可计算得解。
本题主要考查了正弦定理，余弦定理，三角形的面积公式在解三角形中的综合应用，考查了计算能力和转化思想，属于基础题。

17.

【答案】解：(I)由题意可知，从A，B，C三个纯电动汽车4s店购买纯电动汽车的客户共70人，
购买型号I，型号II，型号III纯电动汽车享受补贴分别为2.5万元，3.5万元，5万元，
从上述购买纯电动汽车的客户中任选一人共70个等可能的结果，
此人购买的是B店纯电动汽车且享受补贴不低于3.5万元(购买型号II或型号III)的结果共16个，

$\therefore$ 此人购买的是B店纯电动汽车且享受补贴不低于3.5万元的概率 $P = \frac{16}{70} = \frac{8}{35}$ 。

(II)A店客户中内购买型号I，型号II，型号III纯电动汽车的人数为5，15，10，
按分层抽样的方法任选6人，6人中购买型号I，型号II，型号III纯电动汽车的人数分别为1，3，2，
从这6人中任选2人，基本事件总数 $n = C_6^2 = 15$ ，
这两人享受补贴恰好相同包含的基本事件个数 $m = C_3^2 + C_2^2 = 4$ ，
 $\therefore$ 这两人享受补贴恰好相同的概率 $p = \frac{m}{n} = \frac{4}{15}$ 。

(III) $\bar{x}_A < \bar{x}_C$ 。

【解析】(I)由题意可知,从A, B, C三个纯电动汽车4s店购买纯电动汽车的客户共70人,购买型号I, 型号II, 型号III纯电动汽车享受补贴分别为2.5万元, 3.5万元, 5万元,从上述购买纯电动汽车的客户中任选一人共70个等可能的结果,此人购买的是B店纯电动汽车且享受补贴不低于3.5万元(购买型号II或型号III)的结果共16个,由此能求出此人购买的是B店纯电动汽车且享受补贴不低于3.5万元的概率.

(II)按分层抽样的方法任选6人,6人中购买型号I, 型号II, 型号III纯电动汽车的人数分别为1, 3, 2,从这6人中任选2人,基本事件总数 $n = C_6^2 = 15$,这两人享受补贴恰好相同包含的基本事件个数 $m = C_3^2 + C_2^2 = 4$,由此能求出这两人享受补贴恰好相同的概率.

(III) $\bar{x}_A < \bar{x}_C$.

本题考查概率、平均数的求法,考查古典概型、分层抽样等基础知识,考查运算求解能力,是基础题.

18.

【答案】证明:(I)取 A_1C 的中点G,连结GF, GE,

则 $GF \parallel A_1A$, 且 $GF = \frac{1}{2}A_1A$,

又 $BE \parallel A_1A$, 且 $BE = \frac{1}{2}A_1A$,

$\therefore$ 四边形BEGF为平行四边形, $\therefore GE \parallel BF$,

又 $GE \subset$ 平面 A_1EC , $BF \not\subset$ 平面 A_1EC ,

$\therefore BF \parallel$ 平面 A_1EC .

(II) $\because A_1A \perp$ 底面 ABC , $BF \subset$ 底面 ABC ,

$\therefore A_1A \perp BF$,

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore BF \perp AC$,

又 $A_1A \subset$ 平面 ACC_1A_1 , $AC \subset$ 平面 ACC_1A_1 , $AA_1 \cap AC = A$,

$\therefore BF \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,

又 $GE \parallel BF$, $\therefore GE \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,

$\because GE \subset$ 底面 ACC_1A_1 , $\therefore$ 平面 $A_1EC \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

解:(III)设O为AB中点,连结OC,

由题意得 $OC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , $\therefore OC$ 是棱锥 $C - ABEA_1$ 的高,

$\therefore$ 四棱锥 $C - ABEA_1$ 的体积 $V = \frac{1}{3}S_{ABEA_1} \times OC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(3+6) \times 4 \times 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

【解析】(I)取 A_1C 的中点G,连结GF, GE,推导出四边形BEGF为平行四边形,从而 $GE \parallel BF$,由此能证明 $BF \parallel$ 平面 A_1EC .

(II)推导出 $A_1A \perp BF$, $BF \perp AC$,从而 $BF \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,由 $GE \parallel BF$,得 $GE \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,由此能证明平面 $A_1EC \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

(III)设O为AB中点,连结OC,则OC是棱锥 $C - ABEA_1$ 的高,由此能求出四棱锥 $C - ABEA_1$ 的体积.

本题考查线面平行、面面垂直的证明,考查四棱锥的体积的求法,考查空间中中线、线面、面面间的位置关系等基础知识,考查运算求解能力,考查数形结合思想,是中档题.

19.

【答案】解:(1) $\because$ 椭圆C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点(0,1), 且一个焦点坐标为

$(2\sqrt{2}, 0)$,

$\therefore b = 1, c = 2\sqrt{2}$,

$\therefore a^2 = b^2 + c^2 = 9$,

$\therefore$ 椭圆C的方程 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$,

$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

(2)设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 设 $l: y = k(x-1) (k \neq 0)$, 代入椭圆, 得 $(1+9k^2)x^2 - 18k^2x + 9k^2 - 9 = 0$,

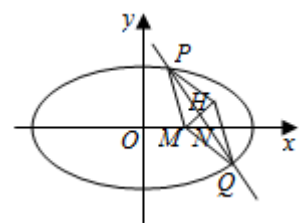
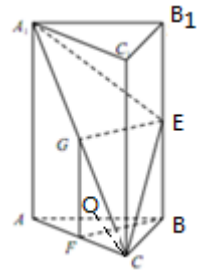
$\therefore x_1 + x_2 = \frac{18k^2}{1+9k^2}$,

$\therefore y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2 - 2) = \frac{-2k}{1+9k^2}$,

$\therefore PQ$ 中点H的坐标为 $(\frac{9k^2}{1+9k^2}, -\frac{k}{1+9k^2})$,

$\therefore$ 以MP、MQ为邻边的平行四边形是菱形,

$\therefore k_{MH} \cdot k = -1$,



$$\therefore \frac{\frac{-k}{1+9k^2}}{\frac{9k^2}{1+9k^2}-m} \cdot k = -1, \text{ 即 } m = \frac{8k^2}{1+9k^2}.$$

$$\because k \neq 0, \therefore 0 < m < \frac{8}{9}.$$

又点 $M(m, 0)$ 在线段 ON 上, $\therefore 0 < m < 1$.

$$\text{综上 } 0 < m < \frac{8}{9}.$$

【解析】(I) 由题意可得 $b = 1, c = 2\sqrt{2}$, 根据 $a^2 = b^2 + c^2 = 9$, 即可求出 a , 再椭圆方程可求, 即可求出离心率,

(II) 把直线方程与椭圆的方程联立求出与 P, Q 两点的坐标有关的等量关系, 进而求出 PQ 的中点坐标, 再利用菱形的对角线互相垂直即可求出 m 的取值范围.

本小题主要考查直线与圆锥曲线的综合应用能力, 韦达定理, 斜率公式, 属于中档题

20.

【答案】解: (I) 当 $k = 0$ 时, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的导数为 $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$,

可得 $f(1) = 0, x = 1$ 处的切线的斜率为 $f'(1) = 1$,

可得切线的方程为 $y = x - 1$;

(II) 若 $f(x) < 0$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

即为 $k > \frac{\ln x}{x^2}$ 对 $x > 0$ 恒成立,

设 $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, 可得 $g'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$,

由 $g'(x) = 0$, 可得 $x = \sqrt{e}$,

当 $0 < x < \sqrt{e}$, 可得 $g'(x) > 0, g(x)$ 递增;

当 $x > \sqrt{e}$, 可得 $g'(x) < 0, g(x)$ 递减.

可得 $g(x)$ 在 $x = \sqrt{e}$ 处取得极大值, 且为最大值 $\frac{1}{2e}$,

则 $k > \frac{1}{2e}$;

(III) 证明: 若 $f(x)$ 存在零点, 即关于 x 的方程 $\frac{\ln x}{x} - kx = 0$ 有解,

可得 $k = \frac{\ln x}{x^2}$ 有解, 由 $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ 在 $(0, \sqrt{e})$ 递增, $(\sqrt{e}, +\infty)$ 递减,

可得 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 递增, 且 $g(1) = 0$, 可得 $g(x) < 0$,

当 $x \in (1, \sqrt{e}]$ 时, $g(x) = \frac{\ln x}{x^2} > \ln 1 = 0$,

可得 $k = \frac{\ln x}{x^2}$ 有解, 则在 $(0, \sqrt{e}]$ 上仅有一个解,

即若 $f(x)$ 存在零点, 则 $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

【解析】(I) 求得 $k = 0$ 时 $f(x)$ 的导数, 可得切线的斜率和切点, 可得切线方程;

(II) 若 $f(x) < 0$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 即为 $k > \frac{\ln x}{x^2}$ 对 $x > 0$ 恒成立, 设 $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, 求得导数和单调性、极大值即最大值, 可得 k 的范围;

(III) 若 $f(x)$ 存在零点, 即关于 x 的方程 $\frac{\ln x}{x} - kx = 0$ 有解, 可得 $k = \frac{\ln x}{x^2}$ 有解, 由 $g(x)$ 的单调性, 即可得证.

本题考查导数的运用: 求切线方程和单调性、极值和最值, 考查转化思想和参数分离, 考查化简变形能力, 属于中档题.