北京市八一学校 2022～2023 学年度第一学期期中试卷

高二 数学

制卷人 王娜　　审卷人　王明辉

本试卷共 4 页，120 分。考试时长 90 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题　共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知直线l经过$A(1,3)$，$B(-2,4)$两点，则直线l的斜率是（　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. 3　　D. -3

2. 直线$y=x+1$ 被圆 $x^2+y^2=1$ 截得的弦长为（　）

A.1　　B.$2\sqrt{2}$　　C.2　　D.$\sqrt{2}$

3. 已知圆的方程 $x^2+y^2+2ax+9=0$ 圆心坐标为$(5,0)$，则圆的半径为(　)

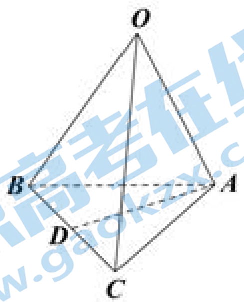
A.2　　B. 4　　C. 10　　D. 3

4. 若直线a的方向向量为$\vec{a}$，平面α，β的法向量分别为$\vec{n}$，$\vec{m}$，则下列命题为假命题的是（　）

A. 若$\vec{a}//\vec{n}$，则直线$a\perp$平面α;　　B. 若$\vec{a}\perp\vec{n}$，则直线$a//$平面α;

C. 若 $\cos\langle\vec{a},\vec{n}\rangle=\frac{1}{2}$，则直线$a$与平面$\alpha$所成角的大小为$\frac{\pi}{6}$;

D. 若 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{1}{2}$，则平面$\alpha$，$\beta$的夹角为$\frac{\pi}{3}$.



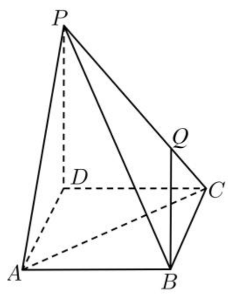
5. 如图，在三棱锥$O-ABC$中，D是BC的中点，若$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，则$\overrightarrow{AD}$等于(　)

A. $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　　B. $-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$　　C. $-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　D. $-\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

6. 设$a\in R$，则“$a=-1$”是“直线$ax+y-1=0$ 与直线$x+ay+5=0$ 平行”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

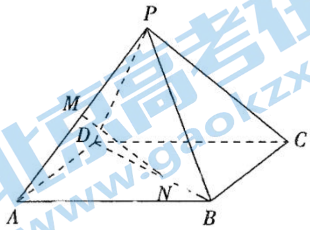
C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件



7. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$底面$ABCD$，底面$ABCD$为正方形，$PD=DC=4$，Q为PC上一点，且$PQ=3QC$，则异面直线AC与BQ所成的角的大小为（　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{5\pi}{6}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

8. 如图，在正四棱锥$P-ABCD$中，$PA=AB$，点M为PA的中点，$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BN}$.若$MN\perp AD$，则实数$\lambda$为（ ）

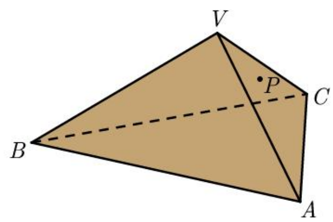


A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

9. 已知直线$l_1: mx-y=0(m\in R)$过定点A，直线$l_2: x+my+4-2m=0$过定点B，l_1与l_2的交点为C，则$\triangle ABC$面积的最大值为（ ）

A. $\sqrt{10}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. 5　　D. 10

10. 在通用技术教室里有一个三棱锥木块如图所示,VA, VB, VC两两垂直，$VA=VB=VC=1$（单位: dm），小明同学计划过侧面VAC内任意一点P将木块锯开，使截面平行于直线VB和AC，则该截面面积（单位：dm^2）的最大值是



A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　D. $\frac{3}{4}$

第二部分（非选择题　共 70 分）

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 已知直线l的一个方向向量为$(-1,3)$，则直线的斜率为____________

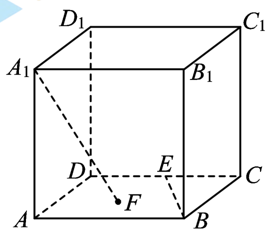
12. 求过点$P(2,3)$，$Q(1,1)$的直线方程______.

13. 若向量$\vec{a}=(1,2,2)$，$\vec{b}=(3,1,-1)$，$\vec{c}=(-1,3,m)$，且$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面，则$m=$______.

14. 设点$P(x,y)$在圆$O: x^2+y^2=1$上的动点，定点A（2，3），B（-2，3），则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的最大值为____________

15. 如图，在棱长为 2 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E为棱CD的中点，点F为底面$ABCD$内一点，给出下列三个论断：

①$A_1F\perp BE$；②$A_1F=3$；③$S_{\triangle ADF}=2S_{\triangle ABF}$.

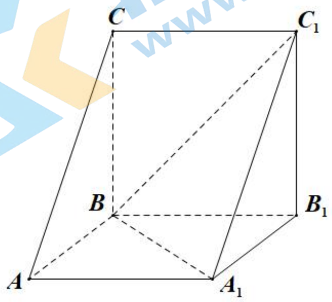


以其中的一个论断作为条件，另一个论断作为结论，写出一个正确的命题：______.

三、解答题（本大题共 4 小题，共 45 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16. (本小题 13 分)

如图，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$BB_1\perp$平面 ABC，$AB=BC=BB_1=1$.



（Ⅰ）求证：AC//平面 BA_1C_1；

（Ⅱ）若 $AB\perp BC$，求：

①求二面角$A-BA_1-C_1$的平面角的余弦值；

②直线 AC 与平面 BA_1C_1 的距离.

17. (本小题 11 分)

在△ABC中，BC边上的高AD所在直线的方程为$x-2y+1=0$，$\angle A$的平分线所在直线方程为$y=0$，若点B的坐标为$(1,2)$.

（Ⅰ）求点A和点C的坐标；

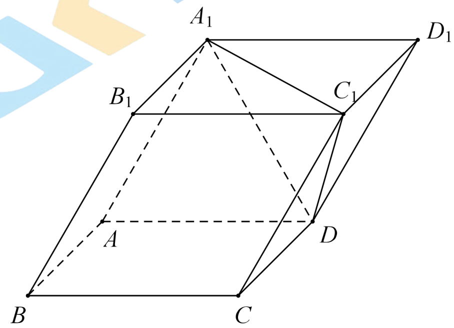
（Ⅱ）求AC边上的高所在的直线l的方程.

18. (本小题 10 分)

如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，平面 $A_1ADD_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AD=2$，$AA_1=A_1D$.

（Ⅰ）求证：$A_1D\perp AB$；

（Ⅱ）若 AB 与平面 A_1DC_1 的所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$，求 AA_1 的长度.



19. (本小题 11 分)

已知圆C的圆心在直线$y=x+1$上，且过点$M(1,3)$，与直线$x+2y-7=0$相切.

（Ⅰ）求圆C的方程.

（Ⅱ）设直线$l:ax-y-2=0(a>0)$与圆C相交于A，B两点．求实数a的取值范围.

（III）在（Ⅱ）的条件下，是否存在实数a，使得弦AB的垂直平分线l过点$P(-2,4)$，若存在，求出实数a的值；若不存在，请说明理由.

北京市八一学校 2022～2023 学年度第一学期期中试卷

高二 数学

制卷人 王娜　审卷人　王明辉

评分标准

本试卷共 4 页，120 分。考试时长 90 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题　共 50 分）

一、选择题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分.在每题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

BDBBC　ABCCB

第二部分（非选择题　共 70 分）

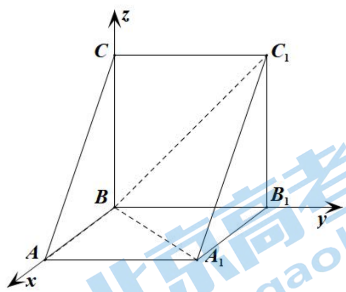
二、填空题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分.

11. -3;　12. $y=2x-1$;　13.5;　14.12;　15.①↔③

16.(本小题 13 分)

（Ⅰ）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 AA_1CC_1 为平行四边形.

所以 $AC//A_1C_1$.



因为 $AC\not\subset$ 平面 BA_1C_1，$A_1C_1\subset$ 平面 BA_1C_1，

所以 $AC//$平面 BA_1C_1.——2 分

（Ⅱ）因为 $BB_1\perp$平面 ABC，$AB,BC\subset$平面 ABC，

所以 $BB_1\perp AB$，$BB_1\perp BC$.

又 $AB\perp BC$，

所以 AB,BB_1,BC 两两互相垂直.

如图建立空间直角坐标系 $B-xyz$，——3 分

则 $A(1,0,0)$，$B_1(0,1,0)$，$C_1(0,1,1)$，$A_1(1,1,0)$，$B(0,0,0)$.——4 分

所以 $\overrightarrow{BA_1}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{BC_1}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,1,0)$

设平面 BA_1C_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0\end{cases}，即\begin{cases}x+y=0,\\ y+z=0.\end{cases}$$

令 $x=1$，则 $y=-1,z=1$. 于是 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$. ——7 分

①面ABA_1的法向量为$\boldsymbol{m}=(0,0,1)$——8 分

则 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,——10 分

因为二面角为钝角，所以余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$——11 分

②因为 AC //平面 BA_1C_1，

所以直线 AC 与平面 BA_1C_1 的距离就是点 A 到平面 BA_1C_1 的距离.

设 A到面BA_1C_1 的距离为 h，则

$$h=\frac{\left|\overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|(0,1,0)\cdot(1,-1,1)|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

——13 分

17.(本小题 11 分)

解：（Ⅰ）由已知可知，点A应在BC边上的高所在直线与$\angle A$的角平分线所在直线的交点，

由$\begin{cases}x-2y+1=0\\ y=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x=-1\\ y=0\end{cases}$，故$A(-1,0)$．——2 分

因为BC边上的高所在直线的斜率：$\frac{1}{2}$,

所以BC所在直线的斜率为$k_{BC}=-2$，

BC所在直线的方程为$y-2=-2(x-1)$，——4 分

点$B(1,2)$关于$y=0$ 对称点$B'(1,-2)$在直线AC上，

直线AC经过点$A(-1,0)$及$B'(1,-2)$，

所以直线AC：$x+y+1=0$，——7 分

由$\begin{cases}x+y+1=0\\ y-2=-2(x-1)\end{cases}$，得$C(5,-6)$；——9 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知AC所在直线方程$x+y+1=0$，则$k_l=1$，——10 分

所以l所在的直线方程为$x-y+1=0$．—— 11 分

18.(本小题 10 分)

解：（Ⅰ）在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，取棱 AD 中点为 O，

因为 $AA_1=A_1D$，所以 $A_1O\perp AD$.

又因为平面 $A_1ADD_1\perp$平面 $ABCD$，且平面 $A_1ADD_1\cap$平面 $ABCD=AD$，

所以 $A_1O\perp$平面 $ABCD$.

所以 $A_1O \perp AB$.

因为底面 $ABCD$ 是正方形，所以 $AB \perp AD$ ，

因为 $AD \cap A_1O = O$ ，

所以 $AB \perp$ 平面 A_1AD .

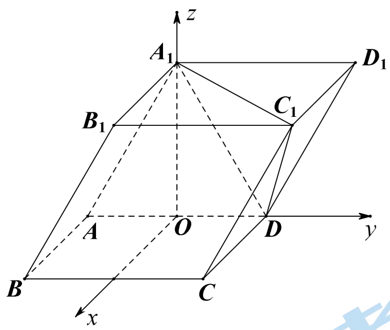
所以 $AB \perp A_1D$ ，即 $A_1D \perp AB$. ——4 分

（Ⅱ）如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$ ，设 OA_1 长度为 a ，——6 分

因为正方形 $ABCD$ 的边长 $AD=2$ ，
则 $O(0,0,0)$ ， $A(0,-1,0)$ ， $B(2,-1,0)$ ，

$D(0,1,0)$ ， $A_1(0,0,a)$ ， $C_1(2,2,a)$.

所以 $\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$ ， $\overrightarrow{A_1D}=(0,1,-a)$ ， $\overrightarrow{A_1C_1}=(2,2,0)$.



设平面 A_1DC_1 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$ ，则

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=y-az=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=2x+2y=0,\end{cases}$$

令 $z=1$ ，则 $y=a$， $x=-a$ ，

于是 $\vec{n}=(-a,a,1)$.

因为 AB 与平面 A_1DC_1 的所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ ，

所以 $\left|\cos<\overrightarrow{AB},\vec{n}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2a}{2\times\sqrt{2a^2+1}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ ，

所以 $a=\sqrt{3}$ ，

所以 $AA_1=\sqrt{AO^2+AA_1^2}=\sqrt{3+1}=2$. ——10 分

19.(本小题 11 分)

解：（Ⅰ）解：由圆C的圆心在直线$y=x+1$ 上，

设圆C的圆心坐标为$(t,t+1)$，半径为r，

则圆C的方程为$(x-t)^2+(y-t-1)^2=r^2$，

又因为圆C过点$A(1,3)$，且与直线$x+2y-7=0$ 相切，

则$\begin{cases}(1-t)^2+(2-t)^2=r^2\\ \dfrac{|t+2t+2-7|}{\sqrt{5}}=r\end{cases}$，解得$t=0$，$r=\sqrt{5}$，

∴圆C的方程为$x^2+(y-1)^2=5$；——4 分

（Ⅱ）圆C的方程为$x^2+(y-1)^2=5$，

把直线l：$ax-y-2=0$，即$y=ax-2$代入圆C的方程，

消去y整理，得$(a^2+1)x^2-6ax+4=0$.

由于直线$ax-y+5=0$交圆C于A，B两点，

故$\triangle=36a^2-16(a^2+1)>0$，即$5a^2-4>0$，

由于$a>0$，解得$a>\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

所以实数a的取值范围是$(\frac{2\sqrt{5}}{5},+\infty)$. ——8 分

（III）设符合条件的实数a存在，由于$a\neq 0$，则直线l的斜率为$-\frac{1}{a}$，

又因为直线l过点$P(-2,4)$，

则直线l的方程为$y=-\frac{1}{a}(x+2)+4$，即$x+ay+2-4a=0$.

由于直线l垂直平分弦AB，故圆心$(0,1)$必在直线l上.

所以$0+a+2-4a=0$，解得$a=\frac{2}{3}$.

由于$\frac{2}{3}\notin(\frac{2\sqrt{5}}{5},+\infty)$，

故不存在实数a，使得过点$P(-2,4)$的直线l垂直平分弦AB. ——11 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〃精益求精、专业严谨〃的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。