

2021 北京丰台高二（下）期中联考

数 学（A 卷）

考试时间：90 分钟

第 I 卷（选择题共 40 分）

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的.）

1.已知函数 $f(x) = \sin x$ ，那么函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处的导数为

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

2.某质点沿直线运动，位移 y （单位：m）与时间 t （单位：s）之间的关系为 $y(t) = 3t^2 + 4$ ，则质点在 $t = 2$ 时的瞬时速度为

- (A) 8 m/s (B) 12 m/s (C) 18 m/s (D) 24 m/s

3.甲、乙、丙、丁 4 名同学和 1 名老师站成一排合影留念，要求老师必须站在中间，则不同站法种数为

- (A) 12 (B) 24 (C) 48 (D) 120

4.在 $(3x - 2)^5$ 的展开式中，各项系数的和是

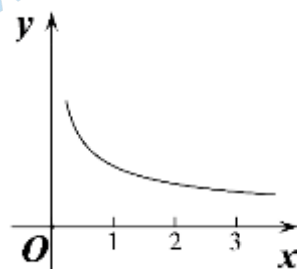
- (A) 2^5 (B) 5^5 (C) 1 (D) -1

5.将 5 封不同的信分别投入到 4 个信箱中，则不同的投送方式的种数为

- (A) 4^5 (B) 5^4 (C) 120 (D) 24

6.已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示，那么下列各式正确的是

- (A) $f'(1) < f'(2) < f'(3) < 0$
(B) $f'(1) > f'(2) > f'(3) > 0$
(C) $f'(3) < f'(2) < f'(1) < 0$
(D) $f'(3) > f'(2) > f'(1) > 0$



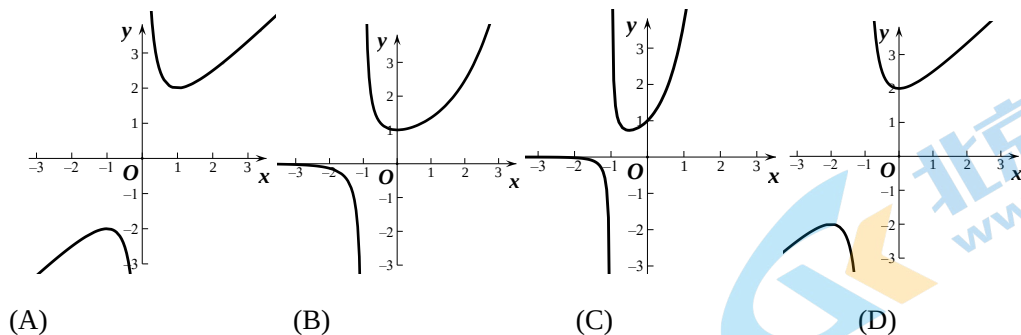
7.若从 0, 2, 4 中任取 2 个数字，从 1, 3 中任取 1 个数字，则可以组成没有重复数字的三位数的个数为

- (A) 18 (B) 24 (C) 28 (D) 32

8.将一个边长为 6（单位：m）的正方形铁片的四角截去四个边长相等的小正方形，做成一个无盖方盒，则方盒的容积最大为

- (A) $1m^3$ (B) $3m^3$ (C) $12m^3$ (D) $16m^3$

9. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ ，则该函数的大致图象是



10. 已知可导函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，且 $xf'(x) > f(x)$ ，若 $a > b > 0$ ，则

- (A) $bf(a) = af(b)$ (B) $bf(a) < af(b)$
(C) $bf(a) > af(b)$ (D) $bf(a)$ ， $af(b)$ 的大小关系不能确定

第II卷（非选择题共 60 分）

二、填空题（每小题 4 分，共 24 分。）

11. 在平面直角坐标系中，点 M 的横坐标在集合 $A = \{2, 4\}$ 内取值，纵坐标在集合 $B = \{1, 3\}$ 内取值，则不同的点 M 共有_____个。

12. 在 $(x + \frac{1}{x})^6$ 的展开式中，常数项为_____。

13. 在 $(1 + 2x)^n$ 的展开式中， x^2 的系数为 40，则 $n =$ _____。

14. 现要从抗击疫情的 5 名志愿者中选 3 名志愿者，分别承担“防疫宣传讲解”、“站岗执勤”和“发放口罩”三项工作，其中志愿者甲不能承担“防疫宣传讲解”_____工作，则不同的选法有_____种。（结果用数字作答）

15. 已知直线 $y = kx - 2$ 是曲线 $y = \ln x$ 的切线，则 k 的值为_____。

16. 已知函数 $f(x) = ax \ln x + \frac{1}{x}$ 。

- (1) 若 $a = 1$ ，则函数 $f(x)$ 的单调递减区间为_____；
(2) 若 $f(x) \geq ax$ 在区间 $(0, e)$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是_____。

三、解答题（共 36 分，解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.）

17. （本小题 9 分）

已知函数 $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 求函数 $f(x)$ 的极值.

18. （本小题 6 分）

某学校为普及 2022 年北京冬奥会知识，现从 4 名男同学和 2 名女同学中选出 3 名同学担任宣讲员.

(I) 共有多少种不同选法？（结果用数字作答）

(II) 如果至少有 1 名女同学参加，且这 3 名同学分别在周五、周六和周日进行宣讲，那么共有多少种不同选法？（结果用数字作答）

19. （本小题 9 分）

已知函数 $f(x) = ae^x + bx + 1$ 在 $x = 0$ 处有极值 2.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 证明: $f(x) > ex - x$.

20. (本小题 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} (a \in \mathbb{R})$.

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(II) 求出函数 $f(x)$ 零点的个数.



2021 北京丰台高二（下）期中联考数学（A 卷）

参考答案

第I卷（选择题，每小题 4 分，共 40 分.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	B	C	A	A	C	D	B	C

第II卷（非选择题 共 60 分）

二. 填空题（每题 4 分，共 24 分，其中第 16 题每空 2 分.）

11. 4 12. 20 13. 5 14. 48

15. e 16 (1) $(0,1)$ (2) $\left(-\infty, \frac{2}{e}\right]$

注：16 题第一空 $(0,1)$ ， $(0,1]$ 均正确.

三. 解答题（共 36 分.）

17.解：（I） $x \in \mathbf{R}$ ， $f'(x) = 3x^2 - 3$ ，1 分

则 $f'(0) = -3$ ，且 $f(0) = 1$ ，3 分

所以， $y - 1 = -3(x - 0)$ ，

即 $3x + y - 1 = 0$4 分

（II）令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x = -1$ ，或 $x = 1$ 5 分

当 x 变化时， $f'(x)$ ， $f(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增	3	单调递减	-1	单调递增

.....7 分

因此，当 $x = -1$ 时， $f(x)$ 有极大值，并且极大值为

$f(-1) = 3$ ；

当 $x = 1$ 时， $f(x)$ 有极小值，并且极小值为

$f(1) = -1$ 9 分

18.解：（I）所有不同选法种数，就是从6名同学中抽出3名的组合数，

所以选法种数为

$$C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20; \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

（II）从6名同学抽出的3名中至少有1名女同学，包括1名女同学2名男同学和2名女同学1名男同学两种情况，所以选法种数为

$$C_2^1 \times C_4^2 + C_2^2 \times C_4^1 = 12 + 4 = 16, \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

又这3名同学分别在周五、周六、周日进行宣讲，

所以选法种数为

$$(C_2^1 \times C_4^2 + C_2^2 \times C_4^1) \times A_3^3 = (12 + 4) \times 6 = 16 \times 6 = 96 \dots\dots 6 \text{ 分}$$

19.解：（I） $x \in \mathbf{R}$ ， $f'(x) = ae^x + b$ ，由已知可得， $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a + b = 0 \\ a + 1 = 2 \end{cases}, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{经检验符合题意，所以 } \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

（II）原不等式转化为 $e^x - ex + 1 > 0$ ，

设 $s(x) = e^x - ex + 1$ ，那么 $s'(x) = e^x - e$ ， $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

令 $s'(x) = 0$ ，解得 $x = 1$ 。

当 x 变化时， $s'(x)$ ， $s(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$s'(x)$	-	0	+
$s(x)$	单调递减	1	单调递增

$\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

所以，当 $x = 1$ 时， $s(x)$ 取得最小值。

所以 $s(x) \geq s(1) = 1 > 0$ ， $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

即 $e^x - ex + 1 > 0$ ，

所以 $f(x) > ex - x$9分

20.解: (I) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x > 0\}$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} = \frac{x-a}{x^2} \quad \text{.....2分}$$

①当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; ...3分

②当 $a > 0$ 时, $f'(x) = 0$, 解得 $x = a$.

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表所示:

x	$(0, a)$	a	$(a, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	$f(a) = \ln a + 1$	单调递增

所以, $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 单调递增.5分

综上: 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增.

(II) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(1) = 0$,

所以 $f(x)$ 有一个零点;

当 $a < 0$ 时, 由 (I) 知, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{且 } f(1) = a < 0, \quad f(e^{-a}) = -a + ae^a = a(e^a - 1) > 0,$$

所以存在唯一 $x_0 \in (1, e^{-a})$, 使得 $f(x_0) = 0$,

所以 $f(x)$ 有一个零点;

当 $a > 0$ 时, 由 (I) 知, $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减,

在 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $y_{\min} = f(a) = \ln a + 1$, 则

$$\text{① } \ln a + 1 > 0, \text{ 即 } a > \frac{1}{e}, \quad f(x) \geq f(a) > 0,$$

所以 $f(x)$ 没有零点;

$$\text{② } \ln a + 1 = 0, \text{ 即 } a = \frac{1}{e}, \quad y_{\min} = f(a) = \ln a + 1 = 0,$$

当 $x \in (0, a) \cup (a, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 有一个零点;

③ $\ln a + 1 < 0$ ，即 $0 < a < \frac{1}{e}$ ，此时 $y_{\min} = f(a) = \ln a + 1 < 0$ ，

一方面， $f(1) = a > 0$ ，又 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增，

所以存在唯一 $x_1 \in (a, 1)$ ，使得 $f(x_1) = 0$ ；

另一方面， $0 < a^2 < a < \frac{1}{e}$ ，取 $x_2 = a^2$ ，则 $f(a^2) = \ln a^2 + \frac{a}{a^2} = 2\ln a + \frac{1}{a}$ ，

令 $g(a) = 2\ln a + \frac{1}{a}$ ($0 < a < \frac{1}{e}$)，则 $g'(a) = \frac{2}{a} - \frac{1}{a^2} = \frac{2a-1}{a^2}$ ，

由于 $0 < a < \frac{1}{e}$ ，所以 $g'(a) < 0$ ， $g(a)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 单调递减。

所以， $g(a) > g(\frac{1}{e}) = 2\ln \frac{1}{e} + e = e - 2 > 0$ 。

由于 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减，且 $f(a) < 0$ ， $f(a^2) > 0$ ，

所以存在唯一 $x_2 \in (a^2, a)$ ，使得 $f(x_2) = 0$ ，

所以，当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个零点。

综上： $a \leq 0$ 或 $a = \frac{1}{e}$ ， $f(x)$ 有 1 个零点；

$a > \frac{1}{e}$ ， $f(x)$ 有 0 个零点；

$0 < a < \frac{1}{e}$ ， $f(x)$ 有 2 个零点。12分

(其他解法，酌情给分。)