

NCS20210607 项目第三次模拟测试卷

理科数学

本试卷共 4 页，23 小题，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填涂在答题卡上，并在相应位置贴好条形码。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案信息涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案。
3. 非选择题必须用黑色水笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来答案，然后再写上新答案，不准使用铅笔和涂改液，不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡整洁，考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集为 R ，已知集合 $A = \{x | \ln x < 0\}$ ， $B = \{x | e^x < e\}$ ，则 $A \cup (C_R B) =$
A. R B. $[1, +\infty)$ C. $[0, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$
2. 若复数 z 满足 $(1+i)(z-2) = 2i$ ，则 $\bar{z} =$
A. $3+i$ B. $3-i$ C. $-3+i$ D. $-3-i$
3. 已知自由落体运动的速度 $v = gt$ ，则自由落体运动从 $t = 0s$ 到 $t = 2s$ 所走过的路程为
A. g B. $2g$ C. $4g$ D. $8g$
4. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0 \\ 4\sin x, & x \leq 0 \end{cases}$ ，则 $f(f(-\frac{5\pi}{4})) =$
A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$
5. 已知公差为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_5^2 + a_6^2 = a_7^2 + a_8^2$ ，则
A. $a_6 = 0$ B. $a_7 = 0$ C. $S_{12} = 0$ D. $S_{11} = 0$
6. 若变量 x, y 满足 $\begin{cases} x+y-2 \geq 0 \\ x-y+2 \leq 0 \\ y \leq 4 \end{cases}$ ，则目标函数 $z = |x| - 2y$ 的最小值为
A. -8 B. -6 C. -10 D. -4
7. 随机变量 X 服从正态分布，有下列四个命题：
① $P(X \geq k) = 0.5$ ； ② $P(X < k) = 0.5$ ；
③ $P(X > k+1) < P(X < k-2)$ ； ④ $P(k-1 < X < k) > P(k+1 < X < k+2)$ 。
若只有一个假命题，则该假命题是
A. ① B. ② C. ③ D. ④
8. 将方程 $f(x) = f'(x)$ 的实数根称为函数 $f(x)$ 的“新驻点”。记函数 $f(x) = e^x - x$ ， $g(x) = \ln x$ ， $h(x) = \sin x$ ， $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 的“新驻点”分别为 a, b, c ，则
A. $c < a < b$ B. $c < b < a$ C. $a < c < b$ D. $a < b < c$

9. 平安夜苹果创意礼品盒，如图1所示，它的形状可视为一个十面体，其中上下底面为全等的正方形，八个侧面是全等的等腰三角形，如图2，底面正方形 $ABCD$ 的边长为2，上底面 $EFGH$ 与下底面 $ABCD$ 之间的距离为 $\sqrt{2}+1$ ，则该几何体的侧面积为



图1

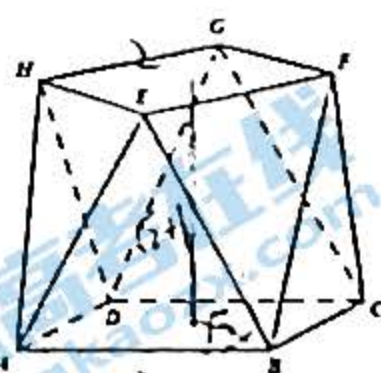
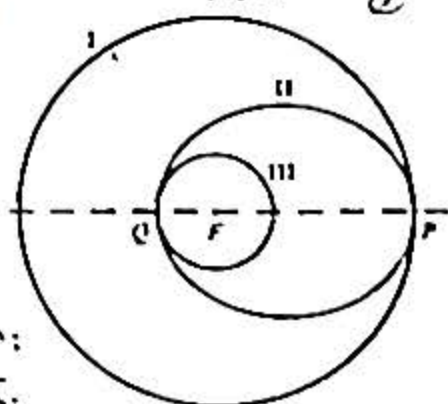


图2

- A. $6\sqrt{6}$ B. $8\sqrt{6}$
C. $16\sqrt{2}$ D. $12\sqrt{2}$

10. 如图所示，“嫦娥五号”月球探测器飞行到月球附近时，首先在以月球球心 F 为圆心的圆形轨道 I 上绕月球飞行，然后在 P 点处变轨进入以 F 为一个焦点的椭圆轨道 II 绕月球飞行，最后在 Q 点处变轨进入以 F 为圆心的圆形轨道 III 绕月球飞行，设圆形轨道 I 的半径为 R ，圆形轨道 III 的半径为 r ，则下列结论中正确的序号为



- ①轨道 II 的焦距为 $R-r$ ；②若 R 不变， r 越大，轨道 II 的短轴长越小；
③轨道 II 的长轴长为 $R+r$ ；④若 r 不变， R 越大，轨道 II 的离心率越大。

- A. ①②③ B. ①②④ C. ①③④ D. ②③④

11. 已知函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 与直线 $y = a (0 < a < 2)$ 在第一象限的交点横坐标从小到大依次分别为 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ，则 $f(x_1 - 2x_2 - 3x_3) =$

- A. -1 B. 0 C. 1 D. $\sqrt{3}$

12. 已知直线 $l: x - y + 4 = 0$ 与 x 轴相交于点 A ，过直线 l 上的动点 P 作圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的两条切线，切点分别为 C, D 两点，记 M 是 CD 的中点，则 $|AM|$ 的最小值为

- A. $2\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $\sqrt{17}$ D. 3

二. 填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

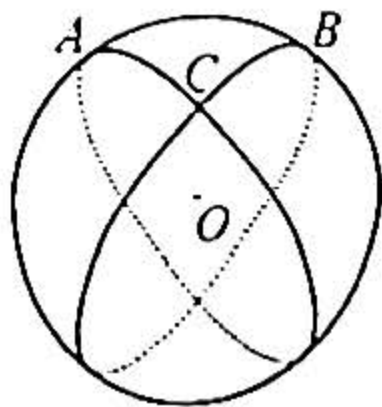
13. 已知单位向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ，若 $|\vec{e}_1 + \vec{e}_2| = 1$ ，则 $|\vec{e}_1 - \vec{e}_2| =$ _____。

14. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_6 = 9S_3$ ， $-S_3 = \lambda a_3$ ，则 $\lambda =$ _____。

15. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ ，圆 $(x-c)^2 + y^2 = 4c^2$ 与双曲线 C 在第一象限的交点为 A ，若 AF_1 与双曲线 C 的一条渐近线 l 垂直，

则 l 的方程为 _____。

16. 球面几何学是几何学的一个重要分支，在航海、航空、卫星定位等方面都有广泛的应用，如图， A, B, C 是球面上不同的大圆（大圆是过球心的平面与球面的交线）上的三点，经过这三个点中任意两点的大圆的劣弧分别为 $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ ，由这三条劣弧围成的图形称为球面 $\triangle ABC$ 。已知地球半径为 R ，北极为点 N ， P, Q 是地球表面上的两点，若 P, Q 在赤道上，且 $|PQ| = \sqrt{2}R$ ，则球面 $\triangle NPQ$ 的面积为 _____；



若 $NP = PQ = QN = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$ ，则球面 $\triangle NPQ$ 的面积为 _____。

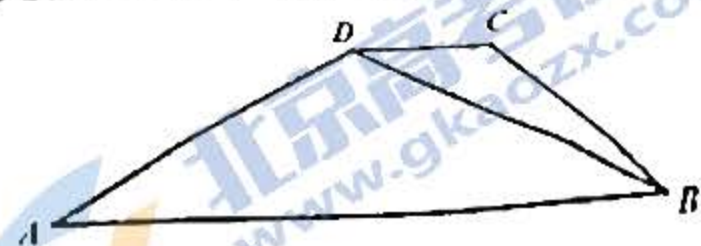
三. 解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17-21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答; 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle BCD = 135^\circ$, $BD = \sqrt{5}CD = \sqrt{10}$.

(I) 求 $\sin \angle CBD$ 的值; $\frac{\sqrt{10}}{10}$

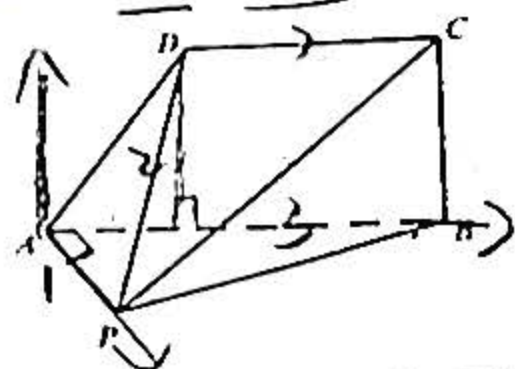
(II) 若 $\triangle ABD$ 的面积为 4, 求 AD 的长. $\sqrt{10}$



18. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $BC \perp$ 平面 PAB , $AB \parallel CD$. 若 $DC = DP = 2$, $BC = \sqrt{2}$, $AP = 1$, $AB = 3$.

(I) 求证: $AP \perp AB$;

(II) 求直线 PC 与平面 ADP 所成的角的正弦值.



19. (12 分) 已知抛物线 $C: x^2 = 4y$, 过点 $P(1, -2)$ 作斜率为 k ($k > 0$) 的直线 l 与抛物线 C 相交于 A, B 两点.

(I) 求 k 的取值范围;

(II) 记 P 点关于 x 轴的对称点为 Q 点, 若 $\triangle QAB$ 的面积为 16, 求直线 l 的方程.

20. (12 分) 高尔顿板是英国生物统计学家高尔顿设计用来研究随机现象的模型, 在一块木板上钉着若干排相互平行但相互错开的圆柱形小木块, 小木块之间留有适当的空隙作为通道, 前面挡有一块玻璃, 让一个小球从高尔顿板上方的通道口落下, 小球在下落的过程中与每层小木块碰撞, 且等可能向左或向右滚下, 最后掉入高尔顿板下方的某一个球槽内, 如图 1 所示的高尔顿板有 7 层小木块, 小球从通道口落下, 第一次与第 2 层中间的小木块碰撞, 以 0.5 的概率向左或向右滚下, 依次经过六次与小木块碰撞, 最后掉入编号为 1, 2, 3, ..., 7 的球槽内. 例如小球要掉入 3 号球槽内, 则在 6 次碰撞中有 2 次向右 4 次向左滚下.

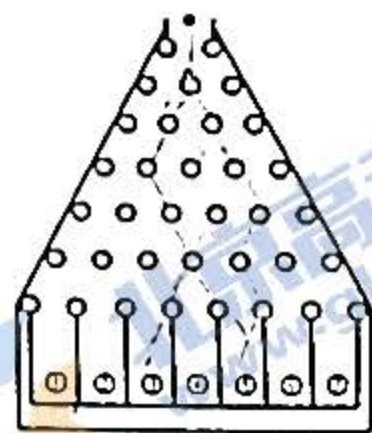


图 1

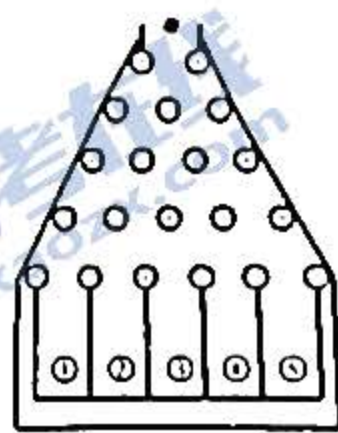


图 2

(I) 如图 1, 进行一次高尔顿板试验, 求小球落入 5 号球槽内的概率;

(II) 小红、小明同学在研究了高尔顿板后, 利用高尔顿板来到社团文化节上进行盈利性“抽奖”活动, 小红使用图 1 所示的高尔顿板, 付费 6 元可以玩一次游戏, 小球掉入 m 号球槽得到的奖金为 X 元, 其中 $X = |16 - 4m|$. 小明改进了高尔顿板, 如图 2, 首先将小木块减少成 5 层, 然后使小球在下落的过程中与小木块碰撞时, 有 $\frac{1}{3}$ 的概率向左滚下, 有 $\frac{2}{3}$ 的概率向右滚下, 最后掉入编号为 1, 2, 3, 4, 5 的球槽内. 改进高尔顿板只需要付费 4 元就可以玩一次游戏, 小球掉入 n 号球槽得到的奖金为 Y 元, 其中 $Y = (n - 4)^2$. 两位同学的高尔顿板游戏火热进行, 很多同学参加了游戏, 你觉得小红和小明同学谁的盈利多? 请说明理由.

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯 (ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息.

21. (12分) 已知定义在实数集 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 的最小值为 3, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 3e^x + a$, 其中 e 是自然对数的底数.

(I) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(II) 求最大的整数 $m(m > 1)$, 使得存在 $t \in \mathbb{R}$, 只要 $x \in [1, m]$, 就有 $f(x+t) \leq 3ex$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (10分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为: $\begin{cases} x = 1 + 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点为

极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为: $\theta = \theta_0$ ($\theta_0 \in [0, \pi)$, $\rho \in \mathbb{R}$).

(I) 求曲线 C_1 的极坐标方程;

(II) 设 A, B 是曲线 C_1, C_2 的公共点, 若 $\frac{1}{|OA|} + \frac{1}{|OB|} = \frac{4}{3}$, 求曲线 C_2 的直角坐标方程.

23. (10分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x-3| + 2|x-1|$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小值 m ;

(II) 已知 $a > 0, b \geq 0$, 若 $a + 2b = m$ 时, 正常数 t 使得 $ta + ab$ 的最大值为 2, 求 t 的值.

理科数学参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	B	D	C	A	C	A	B	C	D	A

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分。

13. $\sqrt{3}$

14. $\frac{7}{4}$

15. $4x+3y=0$

16. $\frac{1}{2}\pi R^2; \pi R^2$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17 题-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22 题、23 题为选考题，考生根据要求作答。

17. 【解析】(I) 在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理知， $\frac{BD}{\sin \angle BCD} = \frac{CD}{\sin \angle CBD}$ ，.....2 分

所以 $BD \cdot \sin \angle CBD = CD \cdot \sin \angle BCD$ ，

因为 $\angle BCD = \frac{3\pi}{4}$ ， $BD = \sqrt{5}CD = \sqrt{10}$ 3 分

即 $\sin \angle CBD = \frac{\sqrt{10}}{10}$ 5 分

(II) 因为 $\sin \angle CBD = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，所以 $\cos \angle CBD = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ ，6 分

所以 $\sin \angle ABD = \sin(\frac{\pi}{4} - \angle CBD) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，8 分

所以 $\cos \angle ABD = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，9 分

因为 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin \angle ABD = 4$ ，所以 $AB = 4\sqrt{2}$ ，10 分

所以 $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos \angle ABD = 10$ ，所以 $AD = \sqrt{10}$ 12 分

18. 【解析】(I) 如图，过点 D 作 AB 的垂线，垂足为 E ，
因为 $BC \perp$ 平面 PAB ，所以 $BC \perp AB$ ， $BC \perp AP$ ，2 分

所以 $BC \parallel DE$ ，因为 $BC = \sqrt{2}$ ， $DC = 2$ ， $AB = 3$ ，

— 高三理科数学（模拟三）答案 第1页 —

所以 $DE = \sqrt{2}$ ， $AE = 1$ ，则 $AD = \sqrt{3}$ ，

因为 $AP = 1$ ， $DP = 2$ ，所以 $AD^2 + AP^2 = DP^2$ ，4 分

即 $AP \perp AD$ ，因为 BC 与 AD 相交，

所以 $AP \perp$ 平面 $ABCD$ ，所以 $AP \perp AB$ ；6 分

(II) 如图，建立空间直角坐标系，

则 $A(0,0,0)$ ， $P(1,0,0)$ ， $D(0,1,\sqrt{2})$ ， $C(0,3,\sqrt{2})$ ，

所以 $\overrightarrow{AP} = (1,0,0)$ ， $\overrightarrow{AD} = (0,1,\sqrt{2})$ ， $\overrightarrow{PC} = (-1,3,\sqrt{2})$ ，

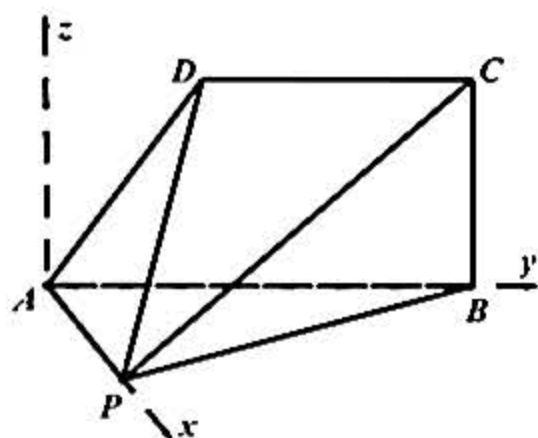
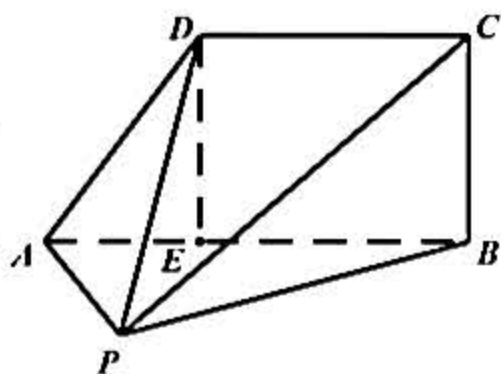
设平面 ADP 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$ ，

则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{cases}$ ，所以 $\begin{cases} x = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$ ，

令 $z = \sqrt{2}$ ，则 $\vec{n} = (0,-2,\sqrt{2})$ ，

所以 $\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{PC} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{PC}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{PC}|} = \frac{-4}{\sqrt{6} \times 2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ ，

所以直线 PC 与平面 ADP 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 。12 分



所以 $DE = \sqrt{2}$, $AE = 1$, 则 $AD = \sqrt{3}$.

因为 $AP = 1$, $DP = 2$, 所以 $AD^2 + AP^2 = DP^2$,4分

即 $AP \perp AD$, 因为 BC 与 AD 相交,

所以 $AP \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $AP \perp AB$:6分

(II) 如图, 建立空间直角坐标系,

则 $A(0,0,0)$, $P(1,0,0)$, $D(0,1,\sqrt{2})$, $C(0,3,\sqrt{2})$,

所以 $\overrightarrow{AP} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{AD} = (0,1,\sqrt{2})$, $\overrightarrow{PC} = (-1,3,\sqrt{2})$,

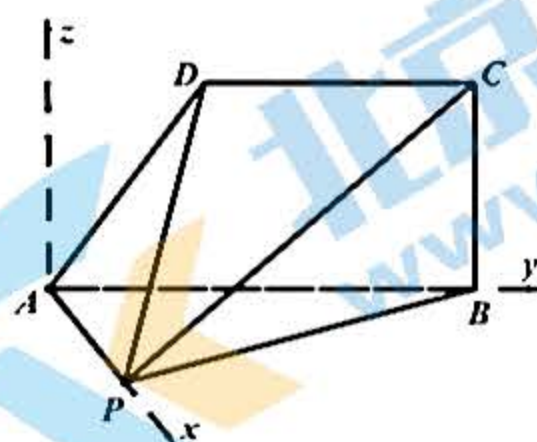
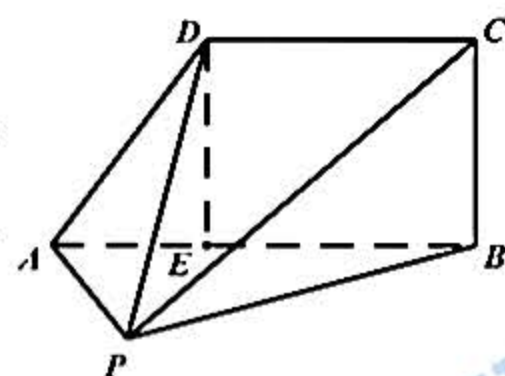
设平面 ADP 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} x = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases},$$

令 $z = \sqrt{2}$, 则 $\vec{n} = (0, -2, \sqrt{2})$,

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{PC} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{PC}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{PC}|} = \frac{-4}{\sqrt{6} \times 2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{3},$$

所以直线 PC 与平面 ADP 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$12分



19. 【解析】(I) 由题意设直线 l 的方程为 $y + 2 = k(x - 1)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y + 2 = k(x - 1) \\ x^2 = 4y \end{cases}, \text{ 得到: } x^2 - 4kx + 4k + 8 = 0 \quad \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

由题意知 $\Delta > 0$, 所以 $k^2 - k - 2 > 0$, 即 $k < -1$ 或 $k > 2$,4分

因为 $k > 0$, 所以 k 的取值范围为 $(2, +\infty)$5分

(II) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 (I) 知 $x_1 + x_2 = 4k$, $x_1 x_2 = 4k + 8$,6分

$$\text{因为 } S_{\triangle QAB} = |S_{\triangle QOA} - S_{\triangle QOB}| = \frac{1}{2} |PQ| |x_1 - x_2| = 2\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}, \quad \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\text{所以 } 2\sqrt{16k^2 - 4(4k + 8)} = 8\sqrt{k^2 - k - 2} = 16, \text{ 即 } k^2 - k - 6 = 0,$$

所以 $k = 3$ 或 $k = -2$, 因为 $k > 2$, 所以 $k = 3$,

则直线 l 的方程为 $3x - y - 5 = 0$12分

20. 【解析】(I) 设这个小球掉入5号球槽为事件 A . 掉入5号球槽, 需要向右4次向左2次, 所以

$$P(A) = C_6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{64}. \text{ 所以这个小球掉入5号球槽的概率为 } \frac{15}{64}. \quad \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

(II) 小红的收益计算如下: 每一次游戏中, X 的可能取值为0, 4, 8, 12.

$$P(X = 0) = P(m = 4) = C_6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16},$$

$$P(X = 4) = P(m = 3) + P(m = 5) = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_6^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{15}{32},$$

— 高三理科数学 (模拟三) 答案 第2页 —

$$P(X = 8) = P(m = 2) + P(m = 6) = C_6^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_6^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{16},$$

$$P(X = 12) = P(m = 1) + P(m = 7) = C_6^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + C_6^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}.$$

X	0	4	8	12
P	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{32}$

$$\text{一次游戏付出的奖金 } EX = 0 \times \frac{5}{16} + 4 \times \frac{15}{32} + 8 \times \frac{3}{16} + 12 \times \frac{1}{32} = \frac{15}{4},$$

$$\text{则小红的收益为 } 6 - \frac{15}{4} = \frac{9}{4}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

小明的收益计算如下: 每一次游戏中, Y 的可能取值为0, 1, 4, 9.

$$P(Y = 0) = P(n = 4) = C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81},$$

$$P(Y = 1) = P(n = 3) + P(n = 5) = C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + C_4^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{40}{81},$$

$$P(Y = 4) = P(n = 2) = C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{81},$$

$$P(Y = 9) = P(n = 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}.$$

Y	0	1	4	9
P	$\frac{32}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

则小红的收益为 $6 - \frac{15}{4} = \frac{9}{4}$8分

小明的收益计算如下：每一次游戏中， Y 的可能取值为0, 1, 4, 9.

$$P(Y=0) = P(n=4) = C_4^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{81},$$

$$P(Y=1) = P(n=3) + P(n=5) = C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + C_4^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{40}{81},$$

$$P(Y=4) = P(n=2) = C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{81},$$

$$P(Y=9) = P(n=1) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}.$$

Y	0	1	4	9
P	$\frac{32}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

一次游戏付出的奖金 $EY = 0 \times \frac{32}{81} + 1 \times \frac{40}{81} + 4 \times \frac{8}{81} + 9 \times \frac{1}{81} = 1$, 则小明的收益为 $4 - 1 = 3$,

因为 $3 > \frac{9}{4}$, 所以小明的盈利多.12分

21. 【解析】(1) 因为 $y = e^x$ 是增函数, 所以当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 也是增函数,

又因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(x)_{\min} = f(0) = 3 + a = 3$, 即 $a = 0$,2分

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $-x > 0$, 所以 $f(x) = f(-x) = 3e^{-x}$,

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} 3e^x, & x \geq 0 \\ 3e^{-x}, & x < 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

(II) 因为 $x \in [1, m]$, 都有 $f(x+t) \leq 3ex$, 所以 $f(1+t) \leq 3e$,

当 $1+t \geq 0$ 时, $3e^{1+t} \leq 3e$, 则 $0 \leq 1+t \leq 1$, 即 $-1 \leq t \leq 0$,

当 $1+t < 0$ 时, 同理可得 $-2 \leq t < -1$,

所以 $-2 \leq t \leq 0$7分

同样地, 由 $f(m+t) \leq 3em$ 及 $m \geq 2$, 得到 $e^t \leq \frac{em}{e^m}$,

— 高三理科数学(模拟三)答案 第3页 —

当 $-2 \leq t \leq 0$, e^t 存在的最小值为 e^{-2} ,

由题意知, $e^{-2} \leq \frac{em}{e^m}$, 即 $e^m - e^3 m \leq 0$,9分

令 $g(m) = e^m - e^3 m, m \in [2, +\infty)$, 则 $g'(m) = e^m - e^3$,

当 $m \in [2, 3)$ 时, $g'(m) < 0$, 所以 $g(m)$ 在 $[2, 3)$ 上单调递减,

当 $m \in (3, +\infty)$ 时, $g'(m) > 0$, 所以 $g(m)$ 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增,

因为 $g(2) = e^2(1-2e) < 0$, $g(4) = e^3(e-4) < 0$, $g(5) = e^3(e^2-5) > 0$,

所以存在 $m_0 \in (4, 5)$, 使得 $g(m_0) = 0$, 所以 $e^m - e^3 m \leq 0$ 的解集为 $m \leq m_0$,

所以 m 的最大正整数为4.12分

22. 【解析】(1) 曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$,2分

所以曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 3 = 0$4分

(II) 因为曲线 C_2 的极坐标方程为 $\theta = \theta_0$, 由 $\begin{cases} \rho^2 - 2\rho \cos \theta - 3 = 0 \\ \theta = \theta_0 \end{cases}$,

得到 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta_0 - 3 = 0$,6分

设 $|OA| = |\rho_A|$, $|OB| = |\rho_B|$, 则 $\rho_A + \rho_B = 2\cos \theta_0$, $\rho_A \cdot \rho_B = -3$,

则 ρ_A, ρ_B 异号, 不妨设 $\rho_A > 0, \rho_B < 0$,

则 $|OA| + |OB| = |\rho_A - \rho_B| = \sqrt{(\rho_A + \rho_B)^2 - 4\rho_A \rho_B} = \sqrt{4\cos^2 \theta_0 + 12}$,8分

$$\text{所以 } \frac{1}{|OA|} + \frac{1}{|OB|} = \frac{|OA| + |OB|}{|OA||OB|} = \frac{\sqrt{4\cos^2 \theta_0 + 12}}{|\rho_A \rho_B|} = \frac{\sqrt{4\cos^2 \theta_0 + 12}}{3} = \frac{4}{3},$$

则 $\cos \theta_0 = \pm 1$, 因为 $\theta_0 \in [0, \pi)$, 所以 $\theta_0 = 0$,

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $y = 0$10分

23. 【解析】(1) 因为 $f(x) = |x-3| + 2|x-1| = \begin{cases} 5-3x & x < 1 \\ x+1 & 1 \leq x \leq 3 \\ 3x-5 & x > 3 \end{cases}$,3分

所以当 $x=1$ 时, $f(x)_{\min} = m = 2$,5分

(II) 因为 $m=2$, 所以 $a+2b=2$, 则 $a+2(b+t)=2t+2$,6分

又因为 $a+2(b+t) \geq 2\sqrt{2a(b+t)}$, 所以 $2t+2 \geq 2\sqrt{2a(b+t)}$,

则 $at+ab = a(b+t) \leq \frac{(t+1)^2}{2}$, 所以 $\frac{(t+1)^2}{2} = 2$, 则 $t=1$ 或 $t=-3$ (舍),

当且仅当 $a=2(b+1)$, 即 $a=2, b=0$ 时, 等号成立.10分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯