

# 2019 北京临川高一（上）期末

## 数 学

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 60 分。

1. 设集合  $P = \{x | (x-1)^2 < 1\}$ ,  $Q = \{x | -1 < x < 1\}$ , 则  $P \cap Q =$  ( )

- A.  $(-1, 2)$       B.  $(-1, 0)$       C.  $(1, 2)$       D.  $(0, 1)$

2. 若  $\alpha$  是第四象限角, 则  $180^\circ - \alpha$  是 ( )

- A. 第一象限角      B. 第二象限角      C. 第三象限角      D. 第四象限角

3. 函数  $f(x) = \frac{\lg(x+1)}{x-1}$  的定义域是 ( )

- A.  $(-1, +\infty)$       B.  $[-1, +\infty)$       C.  $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$       D.  $[-1, 1) \cup (1, +\infty)$

4. 下列函数中, 其图像关于直线  $x = \frac{\pi}{3}$  对称的是 ( )

- A.  $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$       B.  $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$   
C.  $y = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$       D.  $y = \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$

5. 已知  $\tan \alpha + \tan \beta = 2$ ,  $\tan(\alpha + \beta) = 4$ , 则  $\tan \alpha \tan \beta$  等于 ( )

- A. 2      B. 1      C.  $\frac{1}{2}$       D. 4

6. 要得到  $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$  的图像, 只需将  $y = \sin 2x$  的图像 ( )

- A. 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位      B. 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位  
C. 向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位      D. 向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位

7. 设  $\theta$  为第四象限的角,  $\cos \theta = \frac{4}{5}$ , 则  $\sin 2\theta =$  ( )

- A.  $\frac{7}{25}$       B.  $\frac{24}{25}$       C.  $-\frac{7}{25}$       D.  $-\frac{24}{25}$

8. 计算  $\log_2 \sin \frac{\pi}{12} + \log_2 \cos \frac{\pi}{12}$  的值为 ( )

- A. -4                      B. 4                      C. 2                      D. -2

9. 已知  $\triangle ABC$  的边  $BC$  上有一点  $D$  满足  $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{DC}$ , 则  $\overrightarrow{AD}$  可表示为

- A.  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$                       B.  $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$   
C.  $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$                       D.  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$

10. 函数  $f(x) = \ln x - \frac{2}{x}$  的零点所在的大致区间是 ( )

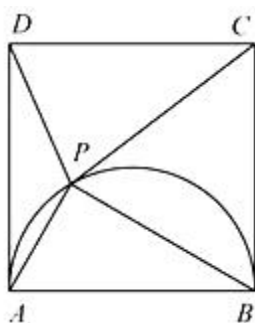
- A. (1,2)                      B. (2,3)                      C. (3,4)                      D.  $(e, +\infty)$

11. 已知  $\vec{a} = (1, 2 + \sin x)$ ,  $\vec{b} = (2, \cos x)$ ,  $\vec{c} = (-1, 2)$ ,  $(\vec{a} - \vec{c}) \parallel \vec{b}$ , 则锐角  $x$  等于 ( )

- (A)  $15^\circ$                       (B)  $30^\circ$                       (C)  $45^\circ$                       (D)  $60^\circ$

12 如图, 以  $AB$  为直径在正方形内部作半圆  $O$ ,  $P$  为半圆上与  $A, B$  不重合的一动点, 下面关于  $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}|$  的说法正确的是

- A. 无最大值, 但有最小值                      B. 既有最大值, 又有最小值  
C. 有最大值, 但无最小值                      D. 既无最大值, 又无最小值



二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分.

13. 已知角  $\alpha$  的终边过点  $P(2, -1)$ , 则  $\sin \alpha$  的值为

14. 若函数  $f(x) = a^{x-1} + 2$  (其中  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 的图象经过定点  $P(m, n)$ , 则  $m + n =$

115.  $\frac{\tan 75^\circ - \tan 15^\circ}{1 + \tan 75^\circ \cdot \tan 15^\circ} =$  \_\_\_\_\_.

16 函数  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq t \\ x, & 0 < x < t \end{cases}$  ( $t > 0$ ) 是区间  $(0, +\infty)$  上的增函数, 则  $t$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

三、解答题（本小题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。）

17.（本小题满分 10 分）

已知  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ,  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ .

(I) 求  $\tan \alpha$  的值;

(II) 求  $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha$  的值.

18. 已知  $\vec{a} = (1, 2)$ ,  $\vec{b} = (-3, 2)$ ,

(1) 求  $\vec{a} - 3\vec{b}$  的坐标;

(2) 当  $k$  为何值时?  $k\vec{a} + \vec{b}$  与  $\vec{a} - 3\vec{b}$  垂直.

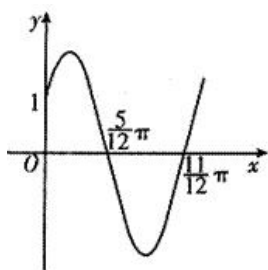
(3) 设向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为  $\theta$ , 求  $\cos 2\theta$  的值.

19 (本小题共 9 分)

已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ,  $\omega > 0$ ,  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示.

(I) 求函数  $f(x)$  的解析式;

(II) 求函数  $g(x) = f(x - \frac{\pi}{4})$  的单调递增区间.



20 (本题满分 12 分) 已知函数  $y = \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x + 1, x \in \mathbb{R}$

(I) 求函数  $f(x)$  的最小正周期;

(II) 求函数  $f(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  上的最大值和最小值。

21 (本小题 12 分)

已知二次函数  $f(x) = x^2 + bx + c$  满足  $f(1) = f(3) = -3$ .

(I) 求  $b, c$  的值;

(II) 若函数  $g(x)$  是奇函数, 当  $x \geq 0$  时,  $g(x) = f(x)$ ,

(i) 直接写出  $g(x)$  的单调递减区间;

(ii) 若  $g(a) > a$ , 求  $a$  的取值范围

22. (本题满分 12 分)

已知函数  $f(x)$  对任意实数  $x$  均有  $f(x) = k f(x+2)$ , 其中常数  $k < 0$ , 且  $f(x)$  在区间  $[0, 2]$  的表达式为  $f(x) = x(x-2)$ .

(1) 求  $f(-1)$ ,  $f(2.5)$  的值 (用  $k$  表示);

(2) 写出  $f(x)$  在区间  $[-3, 2]$  上的表达式, 并讨论  $f(x)$  在  $[-3, 2]$  上的单调性 (不要求证明);

(3) 求出  $f(x)$  在区间  $[-3, 2]$  上的最小值与最大值, 并求出相应的自变量的取值.

22. (本题满分 12 分)

解: (1) 由条件得,  $f(-1) = kf(1) = -k$  .....1 分

$f(2.5) = \frac{1}{k} f(0.5) = -\frac{3}{4}k$  .....3 分

(2) 分段考虑, 分以下情形:

情形一: 当  $-3 \leq x \leq -2$  时, 有  $1 \leq x+4 \leq 2$ ,  $\therefore f(x+4) = (x+4)(x+2)$

由  $f(x) = k f(x+2)$  得  $f(x) = k^2 f(x+4)$

$\therefore$  此时  $f(x) = k^2(x+4)(x+2)$  .....6 分

情形二: 当  $-2 < x < 0$  时, 有  $0 < x+2 < 2$ ,  $\therefore f(x+2) = (x+2)x$

∴此时  $f(x) = kx(x+2)$  .....9 分

综上,  $f(x) = \begin{cases} k^2(x+4)(x+2) & -3 \leq x \leq -2 \\ kx(x+2) & -2 < x < 0 \\ x(x-2) & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$  .....10 分

画出图象可知,  $f(x)$  在  $[-3, -1]$  和  $[1, 2]$  上是增函数, 在  $[-1, 1]$  上是减函数.

注: 不画出图象不扣分。 .....12 分

(3)  $f(x)$  在区间  $[-3, 2]$  上的最大值为  $-k$ , 此时  $x = -1$  .....13 分

当  $k < -1$  时,  $f(x)$  在区间  $[-3, 2]$  上的最小值为  $-k^2$ , 此时  $x = -3$

当  $-1 < k < 0$  时,  $f(x)$  在区间  $[-3, 2]$  上的最小值为  $-1$ , 此时  $x = 1$

当  $k = -1$  时,  $f(x)$  在区间  $[-3, 2]$  上的最小值为  $-1$ , 此时  $x = -3$  或  $x = 1$  .....16 分

# 数学试题答案

## 一、选择题

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 答案 | D | A | C | D | A | A | C | D | B | B  | C  | D  |

## 二、填空题

13.  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$     14. 4    15.  $\sqrt{2}$     16.  $k_1:k_2:k_3 = -4:2:1$

## 三、解答题

17. 解: (1)  $m=3$  时  $B = \{x | 4 \leq x \leq 5\}$ ,

$A \cap B = \{x | -2 \leq x \leq 5\} \cap \{x | 4 \leq x \leq 5\} = \{x | 4 \leq x \leq 5\}$  又  $x \in \mathbb{Z}$ , 所以  $A \cap B = \{4, 5\}$  .....4 分

(2)  $\because x \in \mathbb{R}$ , 且  $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$ ,  $B = \{x | m+1 \leq x \leq 2m-1\}$ ,

又不存在元素  $x$  使  $x \in A$  与  $x \in B$  同时成立,

$\therefore$  当  $B = \emptyset$ , 即  $m+1 > 2m-1$ , 得  $m < 2$  时, 符合题意;

当  $B \neq \emptyset$ , 即  $m+1 \leq 2m-1$ , 得  $m \geq 2$  时,

$$\begin{cases} m \geq 2, \\ m+1 > 5, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} m \geq 2, \\ 2m-1 < -2, \end{cases} \quad \text{解得 } m > 4.$$

综上, 所求  $m$  的取值范围是  $\{m | m < 2 \text{ 或 } m > 4\}$ . .....10 分

18. 解①已知向量  $\overrightarrow{OA} = (3, -4)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (6, -3)$ ,  $\overrightarrow{OC} = (5-m, -(3+m))$

若点 A、B、C 不能构成三角形, 则这三点共线,

$$\because \overrightarrow{AB} = (3, 1), \overrightarrow{AC} = (2-m, 1-m), \text{ 故知 } 3(1-m) = 2-m$$

$\therefore$  实数  $m = \frac{1}{2}$  时, 满足的条件 ..... 6 分

②若  $\triangle ABC$  为直角三角形, 且 (1)  $\angle A$  为直角, 则  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ,

$$\therefore 3(2-m) + (1-m) = 0 \text{ 解得 } m = \frac{7}{4} \text{ ..... 12 分}$$



19 解: (1)  $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\pi = 0$  ..... 4 分

(2)  $\because f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right), x \in R$

$\therefore f\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 2\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 即  $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$ . ..... 6 分

$\because \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \therefore \cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{13}}{4}$ . ..... 8 分

$\because \beta \in [0, \frac{\pi}{2}], \cos\beta = \frac{3}{5}, \therefore \sin\beta = \frac{4}{5}$ . ..... 10 分

$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$  ..... 12 分

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{3}{5} + \left(-\frac{\sqrt{13}}{4}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{3\sqrt{3} - 4\sqrt{13}}{20}$ . ..... 14 分

21. 解: (1)  $\because f(x) = a^x, f(x_0) = 2, \therefore a^{x_0} = 2$ . ..... 2 分

$\therefore f(3x_0) = a^{3x_0} = (a^{x_0})^3 = 8$  ..... 4 分

(2) 由  $f(2) = 4$  可知  $f(x) = 2^x$  ..... 6 分

$\because g(x)$  是  $f(x)$  的反函数且  $f(x) = 2^x$ ,

$\therefore g(x) = \log_2 x$  ..... 8 分

$\therefore g(x) = \log_2 x$  在  $[\frac{1}{2}, 2]$  单调递增. ..... 9 分

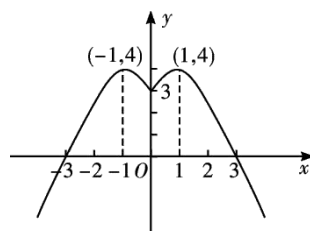
$\therefore g(x)_{\max} = g(2) = \log_2 2 = 1$ , ..... 10 分

$\therefore g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = -1$ . ..... 11 分

所以  $g(x)$  在区间  $[\frac{1}{2}, 2]$  上的值域为  $[-1, 1]$  ..... 12 分

21. 解: (1) 由题意知, 当  $x \geq 0$  时,  $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$ ;

当  $x < 0$  时,  $y = -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4$ , 函数  $f(x)$  的图象如图. .... 4 分



(2) 由图象可知, 函数  $y = -x^2 + 2|x| + 3$  在  $(-\infty, -1]$ ,  $[0, 1]$  上是增函数.

$f(x)$  的单调增区间为  $(-\infty, -1]$ ,  $[0, 1]$  .....8 分

(3)  $f(x) = a$  恰有四个不同的实数根, 由图象可知实数  $a$  的取值范围为  $(3, 4)$  .....12 分

22. 【解】(1) 因为每件商品售价为 0.05 万元, 则  $x$  千件商品销售额为  $0.05 \times 1\,000x$  万元,

依题意得:

$$\text{当 } 0 < x < 80 \text{ 时, } L(x) = (0.05 \times 1\,000x) - \frac{1}{3}x^2 - 10x - 250 = -\frac{1}{3}x^2 + 40x - 250;$$

$$\text{当 } x \geq 80 \text{ 时, } L(x) = (0.05 \times 1\,000x) - 51x - \frac{10\,000}{x} + 1\,450 - 250 = 1\,200 - \left(x + \frac{10\,000}{x}\right).$$

$$\text{所以 } L(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^2 + 40x - 250 & (0 < x < 80), \\ 1\,200 - \left(x + \frac{10\,000}{x}\right) & (x \geq 80). \end{cases} \quad \text{.....6 分}$$

$$(2) \text{ 当 } 0 < x < 80 \text{ 时, } L(x) = -\frac{1}{3}(x - 60)^2 + 950.$$

此时, 当  $x = 60$  时,  $L(x)$  取得最大值  $L(60) = 950$  万元.

当  $x \geq 80$  时,  $L(x) = 1\,200 - \left(x + \frac{10\,000}{x}\right)$  在  $80 \leq x \leq 100$  时单调递增, 在  $x \geq 100$  时单调递减

所以  $x = 100$  时  $L(x)$  取得最大值 1 000 万元.

$\because 950 < 1\,000$ , 所以当产量为 100 千件时, 该厂在这一商品中所获利润最大, 最大利润为 1 000 万元. ....12 分