

2023 北京育才学校高一 10 月月考

数 学

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分。

1. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 1\}$, $B = \{x | 0 < x < 2\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $\{x | 0 \leq x < 1\}$ B. $\{x | 1 < x < 2\}$ C. $\{x | 0 < x < 1\}$ D. $\{x | -1 < x < 2\}$

2. 已知命题 $p: \forall x < -1, x^2 > 1$, 则 $\neg p$ 是 ()

- A. $\exists x \leq -1, x^2 \leq 1$ B. $\exists x < -1, x^2 \leq 1$
C. $\forall x < -1, x^2 > 1$ D. $\forall x \geq -1, x^2 > 1$

3. 已知 $a > b$, 则下列不等式一定成立的是 ()

- A. $|a| > |b|$ B. $ac^2 > bc^2$
C. $a^2 > b^2$ D. $c - a < c - b$

4. 方程组 $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 - y = 2 \end{cases}$ 解集是 ()

- A. $\{(1, -1), (-1, 1)\}$ B. $\{(1, 1), (-2, 2)\}$
C. $\{(1, -1), (-2, 2)\}$ D. $\{(2, -2), (-2, 2)\}$

5. 不等式 $x^2 + ax - 2 < 0$ 的解集为 $-1, 2$, 则实数 a 的值是 ()

- A. -1 B. 1 C. 3 D. -3

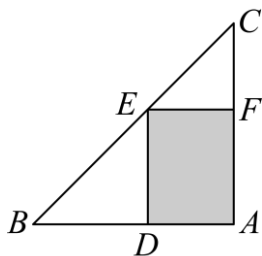
6. “ $x > 0$ ” 是 “ $|x| = x$ ” 的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} | |x+1| \leq 3\}$, $B = \{x | x - a \geq 0\}$, 若 $A \cap B$ 中恰有 3 个元素, 则 a 的取值范围为 ()

- A. $(0, 1)$ B. $[0, 1]$ C. $(-1, 0]$ D. $[-1, 0]$

8. 某市有块三角形荒地, 如图 $\triangle ABC$ 所示, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC = 200$ (单位: 米), 现市政府要在荒地中开辟一块矩形绿地 $ADEF$, 其中 D, E, F 点分别在线段 AB, BC, CA 上, 若要求绿地的面积不少于 7500 平方米, 则 AD 的长度 (单位: 米) 范围是 ()



A. $[40,160]$

B. $[50,150]$

C. $[55,145]$

D. $[60,140]$

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - x = 0\}$, $B = \{0, 1, -1\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

10. 不等式 $\frac{x+2}{x-1} > 0$ 的解集为_____.

11. 能说明“若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”为假命题的一组 a, b 的值依次为_____.

12. 某班一共有 40 名学生, 在刚结束的学校田径运动会上, 有 16 人报名参加了田赛项目, 有 20 人报名参加了径赛项目, 田赛和径赛都没参加的人数是都参加的人数的 2 倍, 则田赛和径赛都参加的人数是_____.

13. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - x - 6 \geq 0\}$, $B = \{x \mid x > c\}$, 其中 $c \in \mathbf{R}$.

①集合 $A =$ _____

②若 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $x \in A$ 或 $x \in B$, 则 c 的取值范围是_____.

14. 小华同学学完集合的基本运算后, 自己定义了如下集合运算: $A * B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, 小华列举了如下命题:

①任意集合 A , $A * A = \emptyset$

②任意集合 A, B , $A * B = B * A$

③任意集合 A, B , $A * B \subseteq A$

④若 $A \cap B = A$, 则 $A * B = \emptyset$

其中, 所有正确命题的序号是_____.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 56 分.请写出必要的文字说明.

15. 已知 $a > b > 0 > c$, 求证 $\frac{c}{a-c} > \frac{c}{b-c}$

16. 若方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两根分别是 x_1 和 x_2 , 计算:

(1) $x_1 + x_2; x_1 x_2$

(2) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2};$

(3) $x_1^2 + x_2^2$;

(4) $|x_1 - x_2|$.

17. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x | m-1 < x < 2m-3\}$.

(1) 若 $m = 4$, 求 $\complement_{\mathbf{R}} A$, $A \cap B$, $A \cup B$;

(2) 若 $B \subseteq A$, 求实数 m 的范围.

18. 求下列关于 x 的不等式的解集:

(1) $|2x-3| \geq 5$;

(2) $ax+2 > 3$ (其中 a 常数, $a \in \mathbf{R}$);

(3) $x^2 - ax - 6a^2 \leq 0$ (其中 a 常数, $a \in \mathbf{R}$).

19. 若集合 A 具有以下性质:

① $0 \in A, 1 \in A$;

② 若 $x, y \in A$, 则 $x-y \in A$, 且 $x \neq 0$ 时, $\frac{1}{x} \in A$.

则称集合 A 是“好集”.

(1) 分别判断集合 $B = \{-1, 0, 1\}$, 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是否是“好集”, 直接写出结论;

(2) 设集合 A 是“好集”, 求证: 若 $x, y \in A$, 则 $x+y \in A$;

(3) 设集合 A 是“好集”, 求证: 若 $x \in A$, 则 $x^2 \in A$;

参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分.

1. 【答案】D

【分析】由并集的定义直接求解.

【详解】集合 $A = \{x | -1 < x < 1\}$, $B = \{x | 0 < x < 2\}$, 则 $A \cup B = \{x | -1 < x < 2\}$.

故选: C

2. 【答案】B

【分析】根据全称命题的否定是特称命题, 即可得到答案.

【详解】因为全称命题的否定是特称命题,

所以命题 $p: \forall x < -1, x^2 > 1$,

则 $\neg p$ 是 $\exists x < -1, x^2 \leq 1$.

故选: B.

3. 【答案】D

【分析】取 $a = 0$, $b = -1$ 即可判断 A, C; 取 $c = 0$ 即可判断 B; 根据不等式的性质即可判断 D.

【详解】对于 A, 取 $a = 0$, $b = -1$, 此时 $|a| < |b|$, 故 A 错误;

对于 B, 取 $c = 0$, 此时 $ac^2 = bc^2$, 故 B 错误;

对于 C, 取 $a = 0$, $b = -1$, 此时 $a^2 < b^2$, 故 C 错误;

对于 D, 由 $a > b$, 则 $-a < -b$, 所以 $c - a < c - b$, 故 D 正确.

故选: D.

4. 【答案】C

【分析】解方程组, 用列举法表示解集.

【详解】方程组 $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 - y = 2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$,

所以方程组 $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 - y = 2 \end{cases}$ 解集是 $\{(1, -1), (-2, 2)\}$.

故选: C

5. 【答案】A

【分析】由一元二次方程根与系数的关系求解.

【详解】不等式 $x^2 + ax - 2 < 0$ 的解集为 $-1, 2$,

则 -1 和 2 是方程 $x^2 + ax - 2 = 0$ 的两根, 有 $-1 + 2 = -a$, 解得 $a = -1$.

故选: A

6. 【答案】A

【分析】找出 $|x|=x$ 的等价条件，结合充分条件、必要条件的定义判断可得出结论.

【详解】 $|x|=x \Leftrightarrow x \geq 0$ ，所以，“ $x > 0$ ” $\Rightarrow$ “ $x \geq 0$ ”，但“ $x > 0$ ” $\nRightarrow$ “ $x \geq 0$ ”，

所以，“ $x > 0$ ”是“ $|x|=x$ ”的充分而不必要条件.

故选：A.

7. 【答案】C

【分析】解集合A中的不等式，得到集合A，由 $A \cap B$ 中的元素，判断a的取值范围.

【详解】 $|x+1| \leq 3$ 等价于 $-3 \leq x+1 \leq 3$ ，解得 $-4 \leq x+1 \leq 2$ ，

又 $x \in \mathbb{Z}$ ， $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ ，

若 $A \cap B$ 中恰有3个元素，则 $A \cap B = \{0, 1, 2\}$ ，所以 $-1 < a \leq 0$ ，

即a的取值范围为 $(-1, 0]$.

故选：C.

8. 【答案】B

【分析】设 $AD = x$ 米，表示出绿地面积，根据不等式求AD的长度范围.

【详解】 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

设 $AD = x$ 米，则 $EF = FC = AD = x$ 米， $FA = 200 - x$ 米，

依题意有 $x(200 - x) \geq 7500$ ，解得 $50 \leq x \leq 150$.

即AD的长度（单位：米）范围是 $[50, 150]$.

故选：B.

二、填空题：本大题共6小题，每小题4分，共24分.

9. 【答案】 $\{0, 1\}$

【分析】解一元二次方程化简集合A，进而求交集即可.

【详解】由 $x^2 - x = 0$ 可得 $x = 0$ 或1，

$\therefore A = \{0, 1\}$ ，又 $B = \{0, 1, -1\}$ ，

$\therefore A \cap B = \{0, 1\}$ ，

故答案为： $\{0, 1\}$

10. 【答案】 $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

【详解】试题分析：将不等式 $\frac{x+2}{x-1} > 0$ 转化为 $(x+2)(x-1) > 0$ ，所以解集为 $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

考点：分式不等式.

11. 【答案】1 ? -1（答案不唯一）

【详解】分析：举出一个反例即可.

详解：当 $a=1>b=-1$ 时，

$$\frac{1}{a}=1<\frac{1}{b}=-1 \text{ 不成立,}$$

即可填 $1, -1$.

点睛：本题考查不等式的性质等知识，意在考查学生的数学思维能力.

12. 【答案】4

【分析】结合韦恩图进行求解.

【详解】设 40 名学生组成的集合为 U ，

参加田赛项目的 16 名学生组成的集合为 A ，

参加径赛项目的 20 名学生组成的集合为 B ，

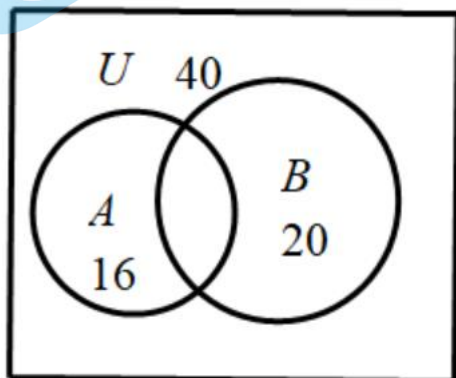
设两个项目都参加的有 x 人，则只参加田赛项目的有 $(16-x)$ 人，

只参加径赛项目的有 $(20-x)$ 人，两项都没参加的有 $(4+x)$ 人，

则依题： $4+x=2x$ ，所以 $x=4$ ，

所以该班学生中田赛和径赛都有参加的人数为 4.

故答案为：4



13. 【答案】 ①. $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$ ②. $(-\infty, -2]$

【分析】化简计算集合 A ，再根据 $A \cup B = \mathbf{R}$ 求解即可.

【详解】① $A = \{x | (x+2)(x-3) \geq 0\} = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$;

② 因为 $\forall x \in \mathbf{R}$ ，都有 $x \in A$ 或 $x \in B$ ，所以 $A \cup B = \mathbf{R}$ ，

所以 $c \leq -2$ ，

故答案为： $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$ ； $(-\infty, -2]$.

14. 【答案】①③④

【分析】由新定义的集合运算结合交集、子集等概念逐一判断每一个命题即可求解.

【详解】对于命题①，由新定义，若 $x \in A * A$ ，则当且仅当 $x \in A$ 且 $x \notin A$ ，而这显然不可能，这表明了此时 x 不存在，即 $A * A = \emptyset$ ，故命题①正确；

对于命题②,不妨设 $A=\{1,2\}, B=\{1,3\}$, 由新定义, $A*B=\{2\}, B*A=\{3\}$,

这表明了此时 $A*B \neq B*A$, 故命题②不正确;

对于命题③, 由新定义, 若 $x \in A*B$, 则一定有 $x \in A$ 且 $x \notin B$,

这表明了此时集合 $A*B$ 是集合 A 的子集, 即 $A*B \subseteq A$, 故命题③正确;

对于命题④, 若 $A \cap B = A$, 则当且仅当 $A \subseteq B$, 即若 $x \in A$, 则一定有 $x \in B$,

由新定义, 若 $x \in A*B$, 则当且仅当 $x \in A$ 且 $x \notin B$, 而这显然不可能,

这表明了此时 x 不存在, 即若 $A \cap B = A$, 则 $A*B = \emptyset$, 故命题④正确.

综上所述: 所有正确命题的序号是①③④.

故答案为: ①③④.

三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 56 分. 请写出必要的文字说明.

15. 【答案】见解析

【分析】利用分析法, 结合不等式性质即可.

【详解】要证: $\frac{c}{a-c} > \frac{c}{b-c}$, 又 $c < 0$, 即证: $\frac{1}{a-c} < \frac{1}{b-c}$

又 $a-c > 0, b-c > 0$, 即证: $b-c < a-c$,

即证: $b < a$, 此式显然成立,

故 $\frac{c}{a-c} > \frac{c}{b-c}$ 成立.

16. 【答案】(1) $x_1 + x_2 = 3, x_1 x_2 = -1$

(2) -3

(3) 11

(4) $\sqrt{13}$

【分析】(1) 由一元二次方程根与系数的关系得: $x_1 + x_2 = 3, x_1 x_2 = -1$;

(2) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$, 代入求值即可;

(3) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$, 代入求值即可;

(4) $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$, 代入求值即可.

【小问 1 详解】

方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两根分别是 x_1 和 x_2 , 由韦达定理,

得 $x_1 + x_2 = 3, x_1 x_2 = -1$.

【小问 2 详解】

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -3.$$

【小问3详解】

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 9 + 2 = 11.$$

【小问4详解】

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{13}.$$

17. 【答案】(1) $\complement_{\mathbb{R}} A = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$, $A \cap B = (3, 4]$, $A \cup B = [-1, 5]$

$$(2) \left(-\infty, \frac{7}{2}\right]$$

【分析】(1) 若 $m = 4$, 代入集合 B , 由补集交集并集的定义, 求 $\complement_{\mathbb{R}} A, A \cap B, A \cup B$;

(2) 若 $B \subseteq A$, 分 $B = \emptyset$ 和 $B \neq \emptyset$ 两种类型, 求实数 m 的取值范围.

【小问1详解】

$m = 4$ 时, $B = \{x | 3 < x < 5\}$, 又 $A = \{x | -1 \leq x \leq 4\}$,

$$\complement_{\mathbb{R}} A = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty),$$

$$A \cap B = (3, 4],$$

$$A \cup B = [-1, 5].$$

【小问2详解】

当 $B \subseteq A$ 时,

当 $B = \emptyset$ 时, 则 $m - 1 \geq 2m - 3$, 得 $m \leq 2$ 满足题意

$$\text{当 } B \neq \emptyset \text{ 时, 则 } \begin{cases} m - 1 < 2m - 3 \\ 2m - 3 \leq 4 \\ m - 1 \geq -1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } 2 < m \leq \frac{7}{2}$$

综上: 实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right]$

18. 【答案】(1) $\{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 4\}$

(2) 答案见详解 (3) 答案见详解

【分析】(1) 根据绝对值的定义去掉绝对值符号即可求解;

(2) 分 $a = 0$, $a > 0$, $a < 0$ 三种情况讨论即可求解;

(3) 将原不等式转化为 $(x - 3a)(x + 2a) \leq 0$, 再分 $a = 0$, $a > 0$, $a < 0$ 三种情况讨论即可求解.

【小问1详解】

由 $|2x-3| \geq 5$, 则 $2x-3 \leq -5$ 或 $2x-3 \geq 5$,

解得 $x \leq -1$ 或 $x \geq 4$,

所以不等式的解集为 $\{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 4\}$.

【小问 2 详解】

由 $ax+2 > 3$, 则 $ax > 1$,

当 $a=0$ 时, 解集为 $\emptyset$;

当 $a > 0$ 时, 解集为 $\left\{x | x > \frac{1}{a}\right\}$

当 $a < 0$ 时, 解集为 $\left\{x | x < \frac{1}{a}\right\}$

【小问 3 详解】

由 $x^2 - ax - 6a^2 \leq 0$, 则 $(x-3a)(x+2a) \leq 0$,

当 $a=0$ 时, 解集为 $\{0\}$;

当 $a > 0$ 时, 解集为 $[-2a, 3a]$;

当 $a < 0$ 时, 解集为 $[3a, -2a]$;

19. 【答案】(1) B 不是“好集”; Q 是“好集”

(2) 证明见解析 (3) 证明见解析

【分析】(1) 利用定义, 判断集合 B 和有理数集 Q 是否是“好集”;

(2) 由 $0 \in A$, 若 $x, y \in A$, 则 $-y \in A$, 从而得出 $x+y \in A$;

(3) 任取 $x \in A$, 若 $x=0$ 或 $x=1$ 时, 显然 $x^2 \in A$; $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$ 时, 有 $x-1, \frac{1}{x-1}, \frac{1}{x} \in A$, 则

$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \in A$, 得 $x(x-1) \in A$, 有 $x(x-1)+x \in A$, 即 $x^2 \in A$.

【小问 1 详解】

B 不是“好集”, 理由是:

$-1 \in B, 1 \in B$, 而 $-1-1=-2 \notin B, \therefore B$ 不是“好集”;

Q 是“好集”, 理由是: $0 \in Q, 1 \in Q$; 对任意 $x \in Q, y \in Q$, 有 $x-y \in Q$,

且 $x \neq 0$ 时, $\frac{1}{x} \in Q, \therefore$ 有理数集 Q 是“好集”.

【小问 2 详解】

因为集合 A 是“好集”, 所以 $0 \in A$.

若 $x, y \in A$, 则 $0-y \in A$, 即 $-y \in A$.

所以 $x-(-y) \in A$, 即 $x+y \in A$.

【小问3详解】

对任意一个“好集” A ，任取 $x \in A$ ，

若 $x=0$ 或 $x=1$ 时，显然 $x^2 \in A$ 。

$x \neq 0$ 且 $x \neq 1$ 时，由定义可知： $x-1, \frac{1}{x-1}, \frac{1}{x} \in A$ 。

所以 $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \in A$ ，即 $\frac{1}{x(x-1)} \in A$ 。

所以 $x(x-1) \in A$ 。

由(2)可得： $x(x-1) + x \in A$ ，即 $x^2 \in A$ 。