2023 北京三十五中高三 10 月月考

数　　学

2023.10

I卷（选择题 共 40 分）

一、选择题（共 10 个小题，每题 4 分，共 40 分）

1. 已知集合 $A=\{x|-1\le x\le 2\},B=\{x|x^2-3x-4<0,x\in Z\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $\{0,1\}$　　B. $\{x|-1\le x<1\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{x|-1<x\le 2\}$

2. 已知 $a=3^{-2},b=\tan 2,c=\log_2 3$，则（　）

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$

C. $b>c>a$　　D. $c>a>b$

3. 下列函数中既是奇函数，又在区间(0,1)上单调递减的是

A. $f(x)=x^3$　　B. $f(x)=\lg|x|$　　C. $f(x)=-x$　　D. $f(x)=\cos x$

4. 在 $\left(\frac{1}{x}-x^2\right)^6$ 的展开式中，常数项是（　）

A. -20　　B. -15　　C. 15　　D. 30

5. 已知函数 $f(x)=e^{|x|}-e^{-|x|}$，则函数 $f(x)$（　）

A. 是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

B. 是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

C. 是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

D. 是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

6. 若点 $M\left(\sin\frac{5\pi}{6},\cos\frac{5\pi}{6}\right)$ 在角 α 的终边上，则 $\tan 2\alpha=$（　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

7. 已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$，前 n 项和为 S_n，满足 $S_3-S_1=10$，且 a_1,a_2,a_4 成等比数列，则 $a_3=$（　）

A. 2　　B. 6　　C. 5 或 6　　D. 12

8. 已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}$，则“$a<0$”是“函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上存在零点”的

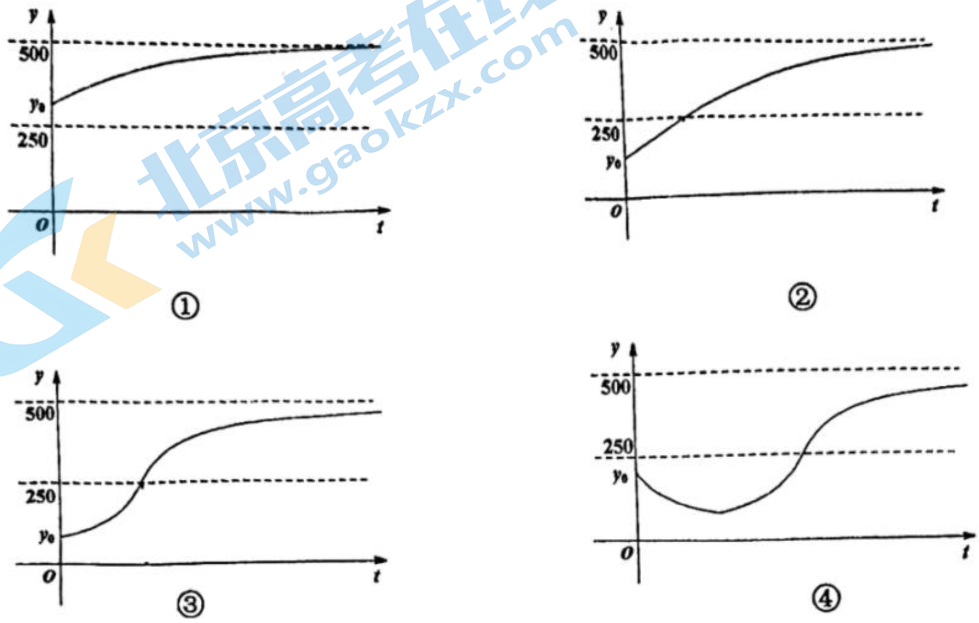
A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　　　　　　　　　　　　　D. 既不充分也不必要条件

9. 大西洋鲑鱼每年都要逆流而上，游回到自己出生的淡水流域产卵. 记鲑鱼的游速为v（单位：m/s），鲑鱼的耗氧量的单位数为Q. 科学研究发现v与$\log_3\frac{Q}{100}$成正比. 当$v=1m/s$时，鲑鱼的耗氧量的单位数为900. 当$v=2\text{m}/\text{s}$时，其耗氧量的单位数为（　）

A. 1800　　　　B. 2700　　　　C. 7290　　　　D. 8100

10. 某种新产品的社会需求量y是时间t的函数，记作：$y=f(t)$. 若$f(0)=y_0$，社会需求量y的市场饱和水平估计为 500 万件，经研究可得，$f(t)$的导函数$f'(t)$满足：$f'(t)=kf(t)(500-f(t))$（k为正的常数），则函数$f(t)$的图像可能为（　）



A. ①②　　　　B. ①③　　　　C. ②④　　　　D. ①②④

II卷（非选择题 共 110 分）

二、填空题：（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 复数$\frac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$的虚部为________.

12. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化．每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成，爻分为阳爻“————”和阴爻“——　——”，下图就是一重卦．如果某重卦中有 2 个阳爻，则它可以组成__________种重卦．（用数字作答）

13. 定义域为R 的函数$f(x)$同时满足以下两条性质：

①存在$x_0\in\mathrm{R}$，使得$f(x_0)\neq0$；

②对于任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+1)=2f(x)$.

写出满足上述性质的一个增函数 $f(x)=$________.

14. 我们称一个数列是“有趣数列”，当且仅当该数列满足以下两个条件：

①所有的奇数项满足 $a_{2n-1}<a_{2n+1}$，所有的偶数项满足 $a_{2n}<a_{2n+2}$；

②任意相邻的两项 a_{2n-1}，a_{2n} 满足 $a_{2n-1}<a_{2n}$.

根据上面的信息完成下面的问题：

（i）数列 $1,2,3,4,5,6$ __________“有趣数列”（填“是”或者“不是”）；

（ii）若 $a_n=n+(-1)^n\dfrac{2}{n}$，则数列 $\{a_n\}$ __________“有趣数列”（填“是”或者“不是”）.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}xe^x, x<a\\ -x, x\geq a\end{cases}$，下列结论正确的有________.

①对任意实数 a，$f(x)$ 不是单调函数；

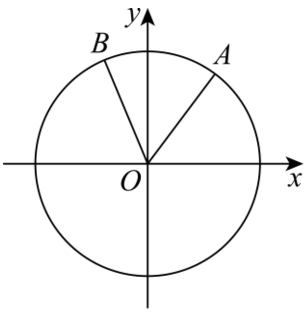
② $f(x)$ 的零点为 0；

③若存在实数 m 使 $f(x)=m$ 有三个不同的解，则实数 a 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$；

④存在实数 a，使 $f(x)$ 有 2 个极值点.

三、解答题（共 6 道题，共 85 分．每道题要写出必要的演算步骤和计算过程）

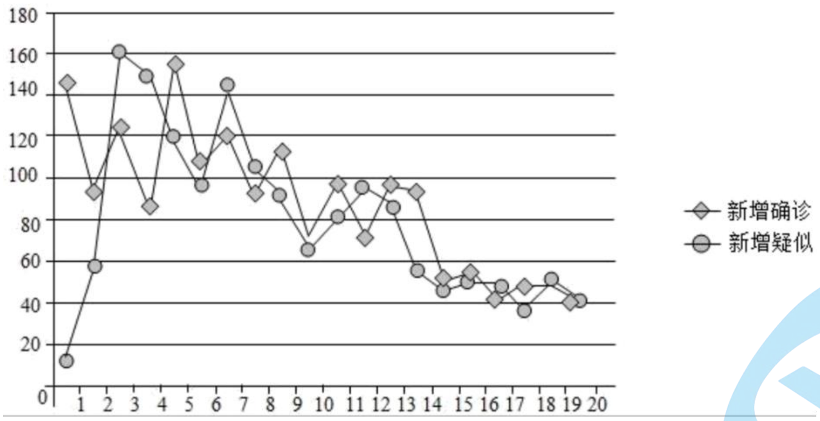
16. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，锐角 α 和钝角 β 的终边分别与单位圆交于 A,B 两点．点 A 的横坐标是 $\dfrac{3}{5}$，点 B 的纵坐标是 $\dfrac{12}{13}$.



（1）求 $\cos 2\alpha$ 的值；

（2）求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值.

17. 如图是某年 11 月 1 日到 11 月 20 日，某地区甲流疫情新增数据的走势图.



（1）从这 20 天中任选 1 天，求新增确诊和新增疑似的人数都超过 100 的概率；

（2）从新增确诊的人数超过 100 的日期中任选两天，用 X 表示新增确诊的人数超过 140 的天数，求 X 的分布列和数学期望；

（3）观察新增病例 8 日到 14 日这 7 天的折线图，指出从哪天开始连续三天新增确诊病例的方差最大（直接写出结论即可）.

18. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin x+x\left(a-\cos x\right), a\in \mathrm{R}$.

（1）若 $a=0$，判断函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,2\pi\right)$ 是否存在极值点？说明理由；

（2）若 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增，求实数 a 的取值范围.

19. 设某商品的利润只由生产成本和销售收入决定．生产成本 C（单位：万元）与生产量 x（单位：千件）间的函数关系是 C=3+x；销售收入 S（单位：万元）与生产量 x 间的函数关系是

$$S=\begin{cases}3x+\dfrac{18}{x-8}+5,0<x<6\\14,x\geq 6\end{cases}.$$

（I）把商品的利润表示为生产量 x 的函数；

（II）为使商品的利润最大化，应如何确定生产量？

20. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x+a}{\mathrm{e}^{x}}$.

（1）若曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=x+b$，求实数 a,b 的值；

（2）若 $f\left(x\right)$ 的最大值为 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，求实数 a 的值；

（3）当 $a=0$ 时，过点 $\left(0,1\right)$ 可向曲线 $y=f\left(x\right)$ 作几条切线？请给出结论并说明理由.

21. 已知项数为 $m\left(m\in N^{*}，m\geq 2\right)$ 的数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足如下条件：① $a_n\in N^{*}\left(n=1,2,\cdots,m\right)$；② $a_1<a_2<\cdots<a_m$. 若数列 $\left\{b_n\right\}$ 满足 $b_n=\dfrac{\left(a_1+a_2+\cdots+a_m\right)-a_n}{m-1}\in N^{*}$, 其中 $n=1,2,\cdots,m$ 则称 $\left\{b_n\right\}$ 为 $\left\{a_n\right\}$ 的“伴随数列”.

（I）数列1,3,5,7,9 是否存在“伴随数列”，若存在，写出其“伴随数列”；若不存在，请说明理由；

（II）若 $\{b_n\}$ 为 $\{a_n\}$ 的“伴随数列”，证明：$b_1 > b_2 > \cdots > b_m$；

（III）已知数列 $\{a_n\}$ 存在“伴随数列” $\{b_n\}$，且 $a_1 = 1$，$a_m = 2049$，求 m 的最大值.

参考答案

I卷（选择题 共40分）

一、选择题（共10个小题，每题4分，共40分）

1.【答案】C

【分析】计算 $B=\{0,1,2,3\}$，再计算交集得到答案.

【详解】$B=\{x|x^2-3x-4<0,x\in Z\}=\{x|-1<x<4,x\in Z\}=\{0,1,2,3\}$，

$A=\{x|-1\le x\le 2\}$，$A\cap B=\{0,1,2\}$.

故选：C.

2.【答案】D

【分析】确定 $a=\frac{1}{9}$，$b<0$，$c>1$，得到答案.

【详解】$a=3^{-2}=\frac{1}{9}$，$b=\tan 2<0$，$c=\log_2 3>\log_2 2=1$，故 $c>a>b$.

故选：D.

3.【答案】C

【分析】

判断四个选项中的函数的奇偶性和在 $(0,1)$ 上的单调性，得到答案.

【详解】选项A中，$f(x)=x^3$，是奇函数，但在 $(0,1)$ 上单调递增，不满足要求；

选项B中，$f(x)=\lg|x|$，是偶函数，不满足要求，

选项C中，$f(x)=-x$，是奇函数，在 $(0,1)$ 上单调递减，满足要求；

选项D中，$f(x)=\cos x$，是偶函数，不满足要求.

故选：C.

【点睛】本题考查判断函数的奇偶性和单调性，属于简单题.

4.【答案】C

【分析】

利用二项展开式的通项公式可求常数项.

【详解】$\left(\frac{1}{x}-x^2\right)^6$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r\left(\frac{1}{x}\right)^{6-r}\left(-x^2\right)^r=(-1)^r C_6^r x^{3r-6}$，

令 $3r-6=0$，则 $r=2$，故常数项为 $T_3=(-1)^2 C_6^2=15$，

故选：C.

【点睛】本题考查二项展开中的指定项，注意利用通项公式帮助计算，本题为基础题.

5.【答案】A

【分析】由偶函数的定义判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，结合指数函数的单调性判断函数 $f(x)$ 的单调性.

【详解】∵ $f(x)=e^{|x|}-e^{-|x|}$

∴ $f(-x)=e^{|-x|}-e^{-|-x|}=e^{|x|}-e^{-|x|}=f(x)$，

∴ 函数 $f(x)=e^{|x|}-e^{-|x|}$ 为偶函数，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $f(x)=e^{x}-e^{-x}=e^{x}-\dfrac{1}{e^{x}}$，

∵ 函数 $y=e^{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，函数 $y=\dfrac{1}{e^{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

∴ $f(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

即函数 $f(x)=e^{|x|}-e^{-|x|}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

故选：A.

6.【答案】C

【分析】根据三角函数定义得到 $\tan\alpha=-\sqrt{3}$，再根据二倍角公式计算得到答案.

【详解】$M\left(\sin\dfrac{5\pi}{6},\cos\dfrac{5\pi}{6}\right)$，故 $\tan\alpha=\dfrac{\cos\dfrac{5\pi}{6}}{\sin\dfrac{5\pi}{6}}=-\sqrt{3}$， $\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^{2}\alpha}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{1-3}=\sqrt{3}$.

故选：C.

7.【答案】B

【分析】

将题设条件转化为基本量的方程组，求出基本量后可求 a_3.

【详解】设等差数列的公差为 d，则 $\begin{cases}3a_1+3d-a_1=10\\(a_1+d)^2=a_1(a_1+3d)\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a_1=2\\d=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=5\\d=0\end{cases}$（舍），故 $a_3=2+2\times(3-1)=6$，

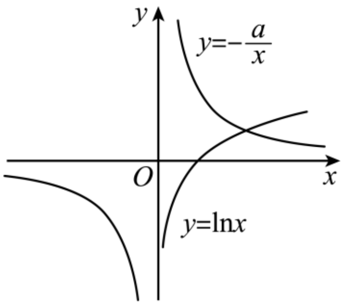
故选：B.

【点睛】等差数列或等比数列的处理有两类基本方法：（1）利用基本量即把数学问题转化为关于基本量的方程或方程组，再运用基本量解决与数列相关的问题；（2）利用数列的性质求解即通过观察下标的特征和数列和式的特征选择合适的数列性质处理数学问题.

8.【答案】C

【分析】把函数 $f(x)$ 拆解为两个函数，画出两个函数的图像，观察可得.

【详解】当 $a<0$ 时，作出 $y=\ln x, y=-\dfrac{a}{x}$ 的图像，



可以看出 $a<0$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 上存在零点，反之也成立，故选 C.

【点睛】本题主要考查以函数零点为载体的充要条件，零点个数判断一般通过拆分函数，通过两个函数的交点个数来判断零点个数.

9.【答案】D

【分析】

设 $v=k\log_3\dfrac{Q}{100}$，利用当 $v=1m/s$ 时，鲑鱼的耗氧量的单位数为 900 求出 k 后可计算 $v=2\mathrm{m/s}$ 时鲑鱼耗氧量的单位数.

【详解】设 $v=k\log_3\dfrac{Q}{100}$，因为 $v=1m/s$ 时，$Q=900$，故 $1=k\log_3\dfrac{900}{100}=2k$，

所以 $k=\dfrac{1}{2}$，故 $v=2\mathrm{m/s}$ 时，$2=\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{Q}{100}$ 即 $Q=8100$.

故选：D.

【点睛】本题考查对数函数模型在实际中的应用，解题时注意利用已知的公式来求解，本题为基础题.

10.【答案】B

【分析】由 $f'\left(t\right)=kf\left(t\right)\left(500-f\left(t\right)\right)$ 得，$f'\left(t\right)>0$，即单调递增，再结合基本不等式，即可求.

【详解】因为 $f'\left(t\right)=kf\left(t\right)\left(500-f\left(t\right)\right)$，依题知 $0<f\left(t\right)\le 500$，所以 $f'\left(t\right)>0$，

即函数 $y=f\left(t\right)$ 单调递增，④不合，

又 $f'\left(t\right)=kf\left(t\right)\left(500-f\left(t\right)\right)\le k\left(\dfrac{f\left(t\right)+\left(500-f\left(t\right)\right)}{2}\right)^2$，

当且仅当 $f\left(t\right)=\left(500-f\left(t\right)\right)$，即 $f\left(t\right)=250$ 时，等号成立，

则若 $y_0<250$，则等号可以取得，即导函数 $f'\left(t\right)$ 在 $f\left(t\right)=250$ 处取得最大值，

即在该处函数的变化最大，则③满足题意，②不合题意；

当 $y_0\ge 250$ 时，等号取不了，但 $y=f\left(t\right)$ 是单调递增的，①符合题意；

只有①③符合题意.

故选：B

II卷（非选择题 共110分）

二、填空题：（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 【答案】$-\frac{3}{2}$

【分析】计算得到 $z=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$，再确定虚部得到答案.

【详解】$z=\frac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{2-2\mathrm{i}-\mathrm{i}-1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$，故虚部为$-\frac{3}{2}$.

故答案为：$-\frac{3}{2}$.

12. 【答案】15

【分析】

根据组合的定义可得重卦的种数.

【详解】由题设，卦的种数为$C_6^2=15$，

故答案为：15.

【点睛】本题考查组合的应用，解题时注意将实际问题抽象为组合问题，本题属于基础题.

13. 【答案】2^x（答案不唯一）

【分析】取 $f(x)=2^x$，验证满足条件，得到答案.

【详解】$f(x)=2^x$，$f(1)=2\neq 0$，满足存在 $x_0\in\mathrm{R}$，使得 $f(x_0)\neq 0$；

$f(x+1)=2^{x+1}=2\times 2^x=2f(x)$，满足条件.

故答案为：2^x.

14. 【答案】 ①. 是 ②. 是

【分析】

依据定义检验可得正确的结论.

【详解】若数列为$1,2,3,4,5,6$，则该数列为递增数列，满足“有趣数列”的定义，

故$1,2,3,4,5,6$为“有趣数列”.

若$a_n=n+(-1)^n\frac{2}{n}$，则$a_{2n-1}=2n-1-\frac{2}{2n-1}, a_{2n+1}=2n+1-\frac{2}{2n+1}$，

$a_{2n}=2n+\frac{2}{2n}, a_{2n+2}=2n+2+\frac{2}{2n+2}$.

$a_{2n-1}-a_{2n+1}=-2-\frac{2}{2n-1}+\frac{2}{2n+1}=-2-\frac{4}{4n^2-1}<0$，故$a_{2n-1}<a_{2n+1}$.

$a_{2n}-a_{2n+2}=-2+\frac{4}{2n(2n+2)}=-2+\frac{1}{n(n+1)}\leq -2+\frac{1}{2}<0$，

故$a_{2n}<a_{2n+2}$.

$a_{2n-1}-a_{2n}=2n-1-\frac{2}{2n-1}-2n-\frac{2}{2n}=-1-\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n}<0$，故 $a_{2n-1}<a_{2n}$.

综上，$\{a_n\}$ 为“有趣数列”.

故答案为：是，是.

【点睛】本题以“有趣数列”为载体，考虑数列的单调性，注意根据定义检验即可，本题为中档题.

15.【答案】①②

【分析】利用导数判断单调性和求解极值的方法画出函数大致图象，分析运算即可得解.

【详解】解：设 $g(x)=xe^x$，得 $g'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$，

令 $g'(x)=0$ 可得：$x=-1$，

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，

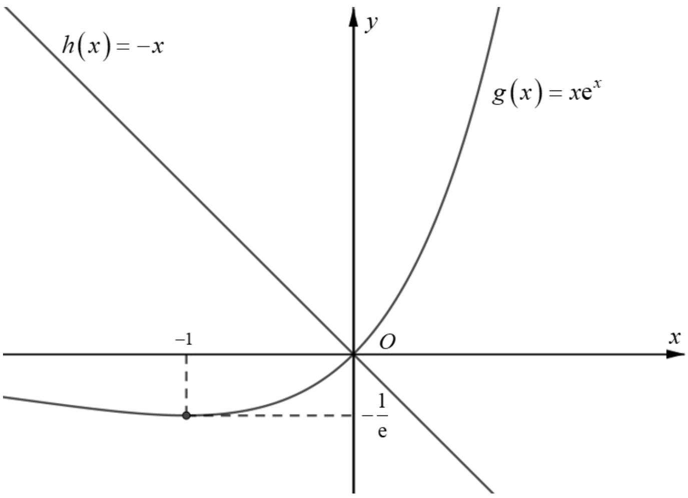
$g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上为减函数，在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数，

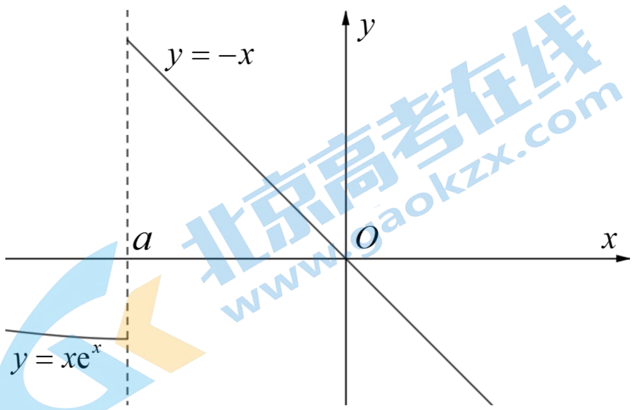
$g(x)_{\min}=g(-1)=-\frac{1}{e}$，$g(0)=0$；

当 $x<0$ 时，$-\frac{1}{e}\le g(x)<0$，当 $x>0$ 时，$g(x)>0$.

设 $h(x)=-x$，其图象为过原点、斜率为 -1 的直线.

将 $g(x)$、$h(x)$ 的大致图象画在同一直角坐标系中如图：

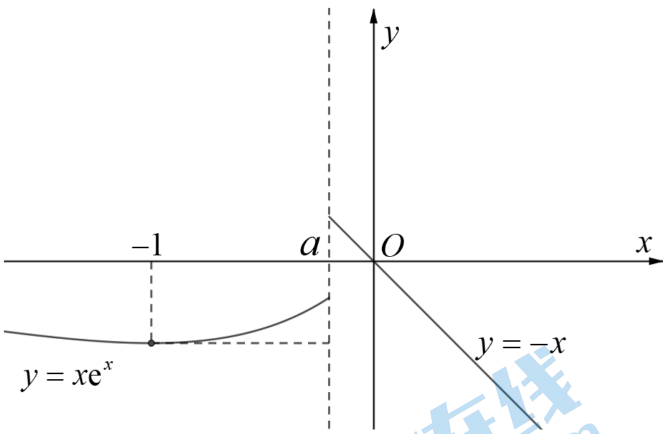




对于①，当 $a\le-1$ 时，如上图，$f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上为减函数，

在$(a,+\infty)$上为减函数，但$g(a)=ae^{a}<0$，$h(a)=-a>0$，

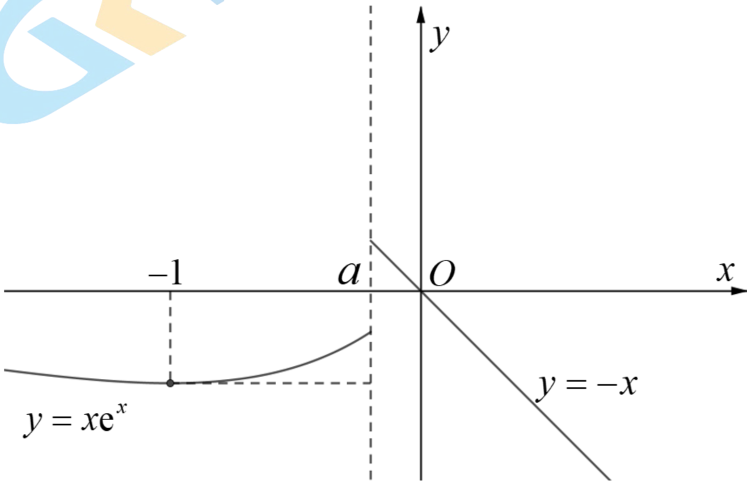
故$f(x)$不是单调函数；



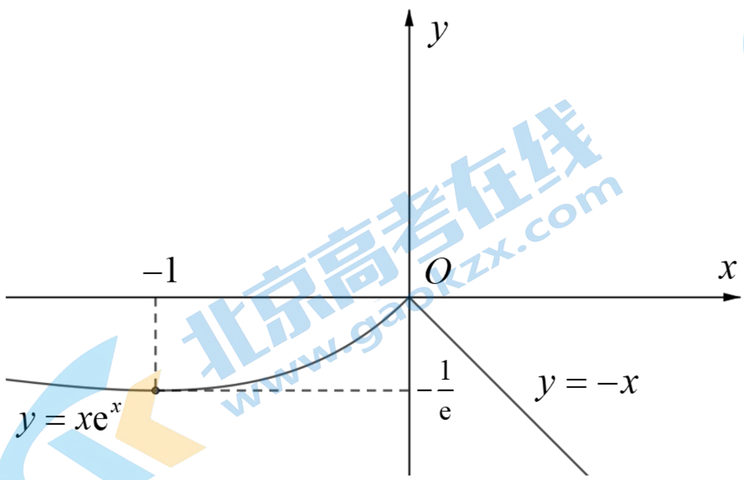
当$a>-1$时，如上图，$f(x)$在$(-\infty,-1)$上为减函数，在$(-1,a)$上为增函数，

在$(a,+\infty)$上为减函数，故$f(x)$不是单调函数；

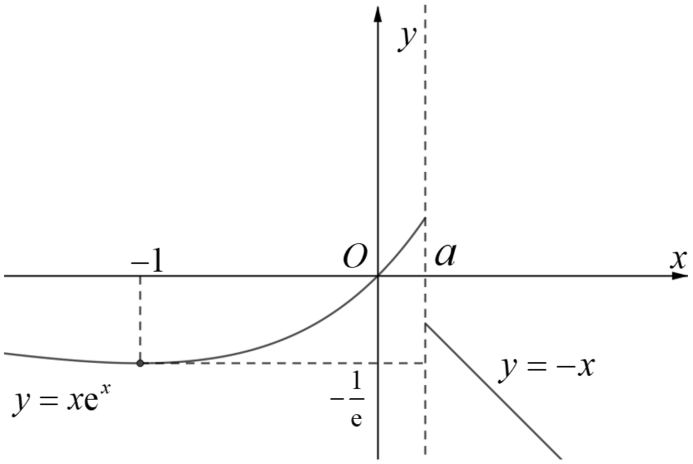
综上知，对任意实数a，$f(x)$不是单调函数，故①正确.



对于②，当$a<0$时，如上图，在$[a,+\infty)$上$f(x)=h(x)=-x$，零点为0；



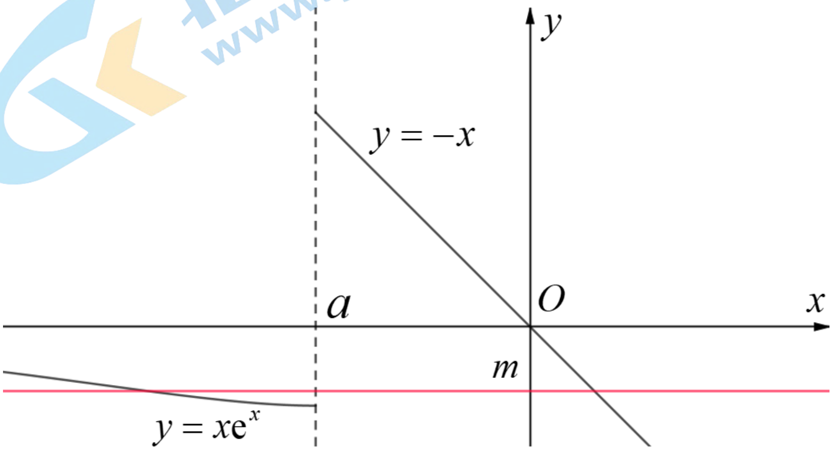
当$a=0$时，如上图，在$[0,+\infty)$上$f(x)=h(x)=-x$，零点为0；



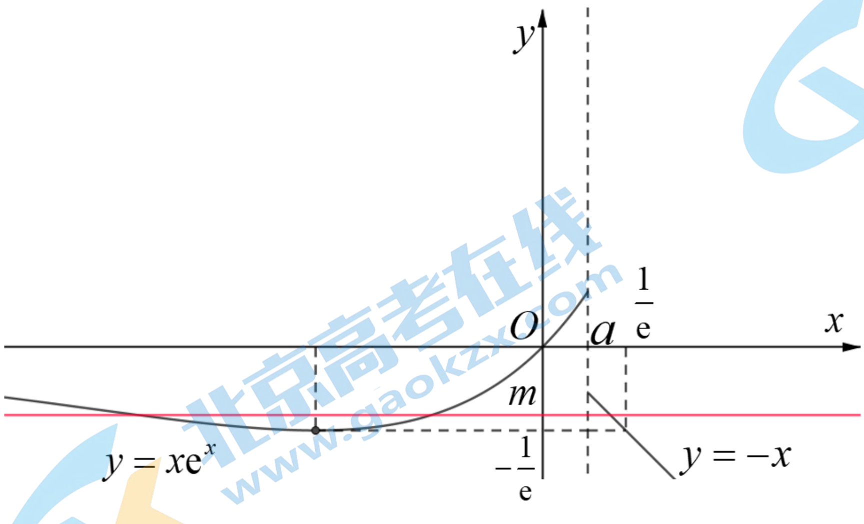
当 $a>0$ 时，如上图，在 $\left(-\infty,a\right)$ 上 $f\left(x\right)=g\left(x\right)=x\mathrm{e}^{x}$， $f\left(0\right)=g\left(0\right)=0$，零点为 0；

综上知， $f\left(x\right)$ 的零点为 0，故②正确.

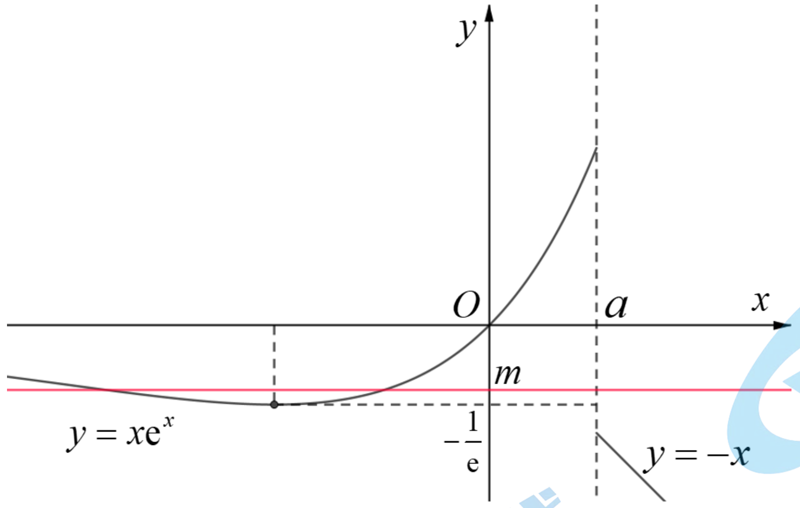
对于③，对实数 m， $f\left(x\right)=m$ 的解的情况等价于曲线 $y=f\left(x\right)$ 与直线 $y=m$ 的交点情况，则



当 $a\le -1$ 时，如上图，曲线 $y=f\left(x\right)$ 与直线 $y=m$ 至多有两个交点；



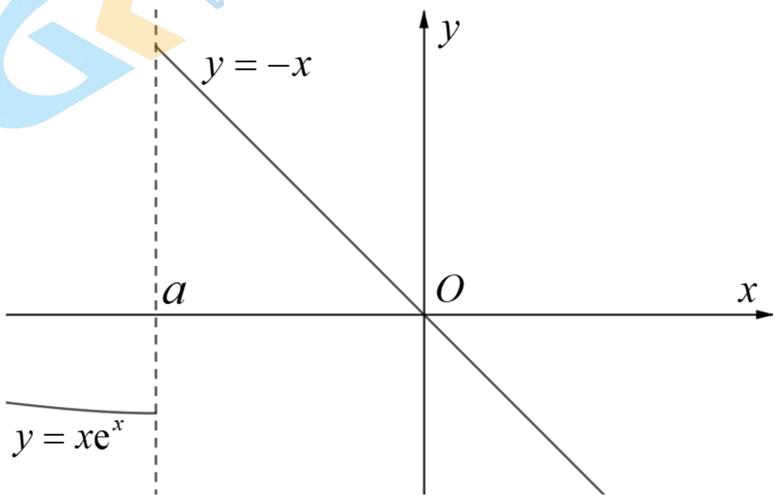
当 $-1<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，如上图，曲线 $y=f\left(x\right)$ 与直线 $y=m$ 至多有三个交点；



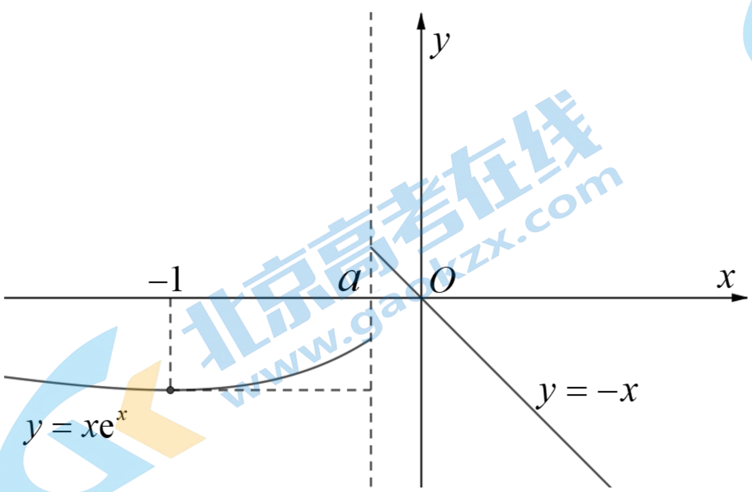
当$a\geq\frac{1}{e}$时，如上图，曲线$y=f(x)$与直线$y=m$至多有两个交点；

综上知，若存在实数m使$f(x)=m$有三个不同的解，

则实数a的取值范围为$\left(-1,\frac{1}{e}\right)$，故③错误.



对于④，当$a\leq-1$时，如上图，$f(x)$在$(-\infty,a)$和$(a,+\infty)$上没有极值点；



当$a>-1$时，如上图，$f(x)$在$(-\infty,a)$上有 1 个极值点$x=-1$，在$(a,+\infty)$上没有极值点；

综上知，不存在实数a，使$f\left(x\right)$有2个极值点，故④错误.

故答案为：①②.

【点睛】方法点睛：讨论函数零点(方程有根)问题的常用的方法：

（1）直接法：直接求解方程得到方程的根，再通过解不等式确定参数范围；

（2）分离参数法：先将参数分离，转化成求函数的值域问题加以解决；

（3）数形结合法：先对解析式变形，进而构造两个函数，然后在同一平面直角坐标系中画出函数的图象，利用数形结合的方法求解.

三、解答题（共6道题，共85分．每道题要写出必要的演算步骤和计算过程）

16.【答案】(1) $-\dfrac{7}{25}$；

(2) $\dfrac{16}{65}$.

【分析】(1) 根据题意结合任意角三角函数的定义求出$\cos\alpha$的值，然后利用二倍角公式可求得答案；

(2) 根据题意结合任意角三角函数的定义求出$\cos\alpha$，$\sin\beta$的值，再利用同角三角函数的关系求出$\sin\alpha,\cos\beta$，然后利用两角和的正弦公式可求得结果.

【小问1详解】

因为锐角α的终边与单位圆交于A两点，且点A的横坐标是$\dfrac{3}{5}$，

所以$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，

所以$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\dfrac{9}{25}-1=-\dfrac{7}{25}$；

【小问2详解】

因为在平面直角坐标系xOy中，锐角α和钝角β的终边分别与单位圆交于A,B两点，点A的横坐标是$\dfrac{3}{5}$，

点B的纵坐标是$\dfrac{12}{13}$，

所以$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{12}{13}$，

所以$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=\dfrac{4}{5}$，

$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\dfrac{144}{169}}=-\dfrac{5}{13}$，

所以$\sin\left(\alpha+\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{5}{13}\right)+\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}=\frac{16}{65}$.

17.【答案】(1) $\frac{3}{20}$

(2) 分布列见答案，$E(X)=\frac{2}{3}$

(3) 8

【分析】(1) 新增确诊和新增疑似人数超过 100 的有 3 天，得到概率.

(2) X 的所有可能值为 $0,1,2$，计算概率得到分布列，再计算数学期望得到答案.

(3) 根据图像观察数据波动情况，得到方差最大.

【小问 1 详解】

由图知在统计的这 20 天中，新增确诊和新增疑似人数超过 100 的有 3 天，

设事件 A 为“从这 20 天中任取 1 天，新增确诊和新增疑似的人数都超过 100”，

则 $P(A)=\frac{3}{20}$

【小问 2 详解】

新增确诊的日期中人数超过 100 的有 6 天，其中有 2 天人数超过 140，

所以 X 的所有可能值为 $0,1,2$，

所以 $P(X=0)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$，$P(X=1)=\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$，$P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$，

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

所以 X 的数学期望为 $E(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$.

【小问 3 详解】

根据图像知，从 8 日开始的连续三天，新增确诊病例的人数波动最大，故方差最大.

18.【答案】(1) 存在，理由见解析

(2) $[0,+\infty)$

【分析】(1) 求导得到导函数，确定函数单调区间，计算极值得到答案.

(2) 求导得到导函数，确定 $f'(x)=a+x\sin x\geq 0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 恒成立，构造新函数，求导，根据 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时有 $x<\tan x$，得到 $g(x)$ 单调递增，计算最值得到答案.

【小问 1 详解】

$f(x)=\sin x-x\cos x$， $f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x$，

当 $x\in(0,\pi)$ 时， $f'(x)>0$，函数单调递增；

当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时， $f'(x)<0$，函数单调递减；

故函数存在极大值点 $x=\pi$，无极小值点

【小问 2 详解】

$f(x)=\sin x+x(a-\cos x)$， $f'(x)=\cos x+a-\cos x+x\sin x=a+x\sin x$，

故 $f'(x)=a+x\sin x\ge 0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 恒成立，

设 $g(x)=a+x\sin x$， 则 $g'(x)=\sin x-x\cos x$，

在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时有 $x<\tan x$， 即 $x\cos x<\sin x$， 即 $g'(x)=\sin x-x\cos x\ge 0$ 恒成立，

故 $g(x)$ 单调递增， $g(x)_{\min}>g(0)=a$， 故 $a\ge 0$， 即 $a\in[0,+\infty)$.

19. 【答案】（I） $y=\begin{cases}2x+\dfrac{18}{x-8}+2,0<x<6\\11-x,x\ge 6\end{cases}$；（II）确定为 5 千件时，利润最大.

【分析】

(I)用销售收入减去生产成本即得利润；

(II)分段求出利润函数的最大值可得生产产量.

【详解】(I)设利润是 y (万元)，则 $y=S-C=\begin{cases}3x+\dfrac{18}{x-8}+5-(3+x),0<x<6\\14-(3+x),x\ge 6\end{cases}$，

$\therefore y=\begin{cases}2x+\dfrac{18}{x-8}+2,0<x<6\\11-x,x\ge 6\end{cases}$；

(II) $0<x<6$ 时， $y=2x+\dfrac{18}{x-8}+2=-2[(8-x)+\dfrac{9}{8-x}]+18$，

由“对勾函数”知，当 $8-x=\dfrac{9}{8-x}$， 即 $x=5$ 时， $y_{\max}=6$，

当 $x\ge 6$ 时， $y=11-x$ 是减函数， $x=6$ 时， $y_{\max}=5$，

$\therefore x=5$ 时， $y_{\max}=6$，

∴生产量为 5 千件时，利润最大.

【点睛】本题考查分段函数模型的应用，解题关键是列出函数解析式．属于基础题.

20. 【答案】(1) $a=0,\ b=0$；

（2） $a=0$；

（3）一条，详见解析；

【分析】（1）结合点坐标和导数求解即可；

（2）求导然后分析函数的单调性，根据最值求解；

（3）设点求切线方程，然后根据解的个数求解；

【小问 1 详解】

$f(x)=\dfrac{x+a}{e^x}$，对函数进行求导， $f'(x)=\dfrac{1-x-a}{e^x}$， $f'(0)=\dfrac{1-a}{1}=1-a$

由题意知， $f'(0)=1$，解得： $a=0,$

所以 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}, f(0)=0,$

代入直线 $y=x+b$，解得： $b=0,$

综上， $a=0, b=0$.

【小问 2 详解】

$f'(x)=\dfrac{1-a-x}{e^x}$，

当 $x\in(-\infty,1-a), f'(x)=\dfrac{1-a-x}{e^x}>0,$ 函数单调递增，

当 $x\in(1-a,+\infty), f'(x)=\dfrac{1-a-x}{e^x}<0,$ 函数单调递减，

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(1-a)$，

由题意知 $f(1-a)=\dfrac{1}{e},$ 即 $\dfrac{1}{e^{1-a}}=\dfrac{1}{e},$

解得： $a=0$.

【小问 3 详解】

$f(x)=\dfrac{x}{e^x}, f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$，

假设存在切线满足条件，设切点 $A(m,n),(m\in R)$，

则曲线 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ 在点 A 处的切线方程为 $y-n=\dfrac{1-m}{e^m}(x-m)$

又切线过 $(0,1)$，

所以有 $1-n=\dfrac{1-m}{e^m}(m-0)$

再由 $n=\dfrac{m}{e^m}$

代入得$1-\frac{m}{e^m}=\frac{1-m}{e^m}(m-0)$,

即$e^m-m^2=0$

令函数$f(m)=e^m-m^2$，$f'(m)=e^m-2m$, $f''(m)=e^m-2$,

当$m\in(-\infty,\ln 2)$, $f''(m)<0$, $f'(m)$单调递减,

$m\in(\ln 2,+\infty)$, $f''(m)>0$, $f'(m)$单调递增,

故$f'(m)$在$m=\ln 2$时取得最小值，$f'(m)_{\min}=f'(\ln 2)=2-2\ln 2>0$,

所以函数$f(m)=e^m-m^2$是定义域内的增函数,

又因为$f(-1)=e^{-1}-1<0$, $f(0)=1>0$,

所以存在唯一$m\in(-1,0)$使得$f(m)=e^m-m^2$，有唯一切点和切线与之对应,

综上，过点$(0,1)$可向曲线$y=f(x)$作1条切线.

21.【答案】(I)不存在，理由见解析;(II)详见解析;(III)33.

【分析】(I)根据"伴随数列"的定义判断出正确结论.

(II)利用差比较法判断出$\{b_n\}$的单调性，由此证得结论成立.

(III)利用累加法、放缩法求得关于a_m的不等式，由此求得m的最大值.

【详解】(I)不存在.理由如下：因为$b_4=\frac{1+3+5+7+9-7}{5-1}\notin N^*$，所以数列1,3,5,7,9不存在"伴随数列".

(II)因为$b_{n+1}-b_n=\frac{a_n-a_{n+1}}{m-1}, 1\le n\le m-1, n\in N^*$,

又因为$a_1<a_2<\cdots<a_m$，所以$a_n-a_{n+1}<0$，所以$b_{n+1}-b_n=\frac{a_n-a_{n+1}}{m-1}<0$，即$b_{n+1}<b_n$，所以

$b_1>b_2>\cdots>b_m$成立.

(III)$\forall 1\le i<j\le m$，都有$b_i-b_j=\frac{a_j-a_i}{m-1}$，因为$b_i\in N^*$，$b_1>b_2>\cdots>b_m$,

所以$b_i-b_j\in N^*$，所以$b_1-b_m=\frac{a_m-a_1}{m-1}=\frac{2048}{m-1}\in N^*$.

因为$b_{n-1}-b_n=\frac{a_n-a_{n-1}}{m-1}\in N^*$,

所以$a_n-a_{n-1}\ge m-1$.

而$a_m-a_1=(a_m-a_{m-1})+(a_{m-1}-a_{m-2})+\cdots+(a_2-a_1)\ge(m-1)+(m-1)+\cdots+(m-1)=(m-1)^2$，即

$2049-1\ge(m-1)^2$,

所以$(m-1)^2 \le 2048$，故$m \le 46$.

由于$\dfrac{2048}{m-1} \in N^*$，经验证可知$m \le 33$.所以$m$的最大值为$33$.

【点睛】本小题主要考查新定义数列的理解和运用，考查数列单调性的判断，考查累加法、放缩法，属于难题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！