

考试编号

姓名

班级

学校

题
答
要
不
内
线
封
弥

太原市2021年高三年级模拟考试(二)

数学试卷(理科)

(考试时间:下午3:00—5:00)

注意事项:

1. 本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分,第I卷1至4页,第II卷5至8页。
2. 回答第I卷前,考生务必将自己的姓名、考试编号填写在答题卡上。
3. 回答第I卷时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号,写在本试卷上无效。
4. 回答第II卷时,将答案写在答题卡相应位置上,写在本试卷上无效。
5. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第I卷

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $z(1+i)=2i$,则其共轭复数 $\bar{z} =$

~~A. $1-i$~~

B. $1+i$

C. $-1-i$

D. $-1+i$

2. 已知集合 $A = \{(x, y) | y = x^2\}$, $B = \{(x, y) | y = x\}$, 则 $A \cap B =$

A. $\{0, 1\}$

B. $\{(0, 0)\}$

C. $\{(1, 1)\}$

~~D. $\{(0, 0), (1, 1)\}$~~

高三数学(理) 第1页(共8页)

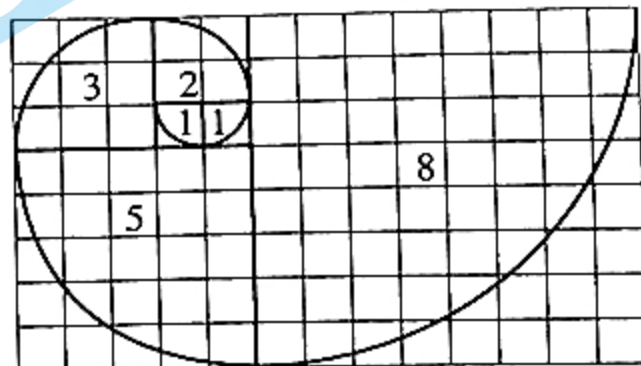
3. 已知斐波那契螺旋线被誉为自然界最完美的“黄金螺旋线”，它的画法是：以斐波那契数列（即 $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n (n \in \mathbb{N}^*)$ ）的各项为边长的正方形拼成长方形，然后在每个正方形中画一个圆心角为 90° 的圆弧，将这些圆弧依次连起来的弧线就是斐波那契螺旋线。自然界存在很多斐波那契螺旋线的图案，例如向日葵、鹦鹉螺等。下图为该螺旋线的一部分，则第七项所对应的扇形的弧长为

A. $\frac{169\pi}{4}$

B. $\frac{21\pi}{2}$

☒ C. $\frac{13\pi}{2}$

D. 4π



4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 + a_2 = -2, a_2 + a_4 = 2$ ，则 $a_5 =$

A. 3

B. 4

☒ C. 5

D. 7

5. 从 1, 2, 3, 4, 5 这 5 个数中随机抽取 2 个数，分别记为 m, n ，则 $\frac{m}{n}$ 为整数的概率为

A. $\frac{2}{5}$

☒ B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{4}{25}$

6. 已知点 $P(m, m) (m \neq 0)$ 是抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点，且点 P 到该抛物线焦点的距离为 30，则 $p =$

☒ A. 10

B. 12

C. 20

D. 30

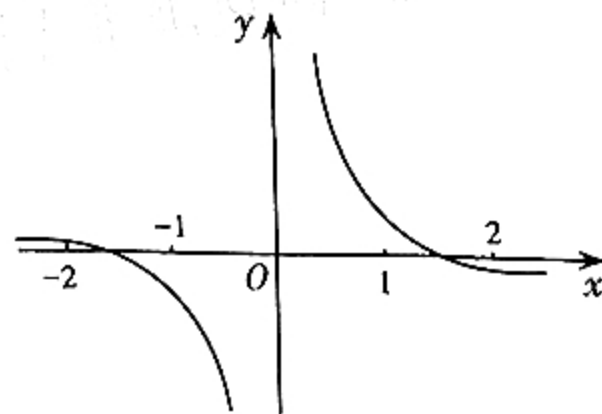
7. 已知函数 $y = f(x)$ 部分图象的大致形状如图所示，则 $y = f(x)$ 的解析式最可能是

☒ A. $f(x) = \frac{\cos x}{e^x - e^{-x}}$

B. $f(x) = \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}}$

C. $f(x) = \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}$

D. $f(x) = \frac{\sin x}{e^x + e^{-x}}$



8. 已知圆 $M: (x-a)^2 + (y-b)^2 = 3 (a, b \in \mathbb{R})$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相交于 A, B 两点, 且 $|AB| = \sqrt{3}$,

给出以下结论: ① $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 是定值; ② 四边形 $OAMB$ 的面积是定值; ③ $a + b$ 的最小值为 $-\sqrt{2}$; ④ $a \cdot b$ 的最大值为 2, 则其中正确结论的个数是

A. 0

☒ B. 1

C. 2

D. 3

9. 在钝角 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 若 $AG \perp BG$, 则 $\cos C$ 的取值范围是

A. $(0, \frac{\sqrt{6}}{3})$

☒ B. $[\frac{4}{5}, \frac{\sqrt{6}}{3})$

C. $(\frac{\sqrt{6}}{3}, 1)$

D. $[\frac{4}{5}, 1)$

10. 已知三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB = BD = DA = 2\sqrt{3}$, $DC = 2\sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{5}$, 二面角 $A-BD-C$ 的大小为 135° , 则三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为 52π

A. 64π

☒ B. 52π

C. 40π

D. 32π

11. 已知直线 $x - 2y + n = 0 (n \neq 0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线分别相交于 A, B 两点, 点 P 的坐标为 $(n, 0)$, 若 $|PA| = |PB|$, 则该双曲线的离心率是

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

☒ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

12. 已知函数 $f(x) = a^2 x^2 + x - 2\ln a (a > 1)$, $g(x) = -e^x - 2\ln x$, 若 $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象在 $[1, +\infty)$ 上恰有两对关于 x 轴对称的点, 则实数 a 的取值范围是

A. $(\frac{e}{2}, +\infty)$

B. $[\sqrt{e}, +\infty)$

C. $(\frac{e}{2}, \sqrt{e}]$

☒ D. $(1, \frac{e}{2})$

太原市2021年高三年级模拟考试(二)

数学试卷(理科)

第II卷(非选择题 共90分)

本卷包括必考题和选考题两部分,第13题~第21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22题、第23题为选考题,考生根据要求作答.

二、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知 a, b 是单位向量,且 $|a + b| = \sqrt{3}$,则向量 a 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

14. 已知 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,则 $\sin 2\alpha =$ _____.

15. 已知点 $A(0,1)$ 和 $B(m, -2)$,点 $M(x, y)$ 是函数 $y = 2^x$ 图象上的一个动点,若对于任意的点 $M(x, y)$,不等式 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM} \leq \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ (其中 O 是坐标原点)恒成立,则实数 $m =$ _____.

16. 已知矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4, AD = 3$,点 E 是边 CD 上的动点,将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折起至 $\triangle PAE$,使得平面 $PAB \perp$ 平面 ABC ,过 P 作 $PG \perp AB$,垂足为 G ,则 AG 的取值范围为_____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共60分。

17. (本小题满分12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=1, a_2=3$ ，且满足 $\frac{a_{n+1}}{n(a_{n+2}-a_{n+1})} = \frac{a_n}{(n+1)(a_{n+1}-a_n)} + \frac{1}{2n(n+1)} (n \in \mathbb{N}^*)$ 。

(I) 设 $b_n = \frac{na_n}{a_{n+1}-a_n} (n \in \mathbb{N}^*)$ ，证明： $\{b_n\}$ 是等差数列；

(II) 若 $c_n = \frac{b_n}{a_n} (n \in \mathbb{N}^*)$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

18. (本小题满分12分)

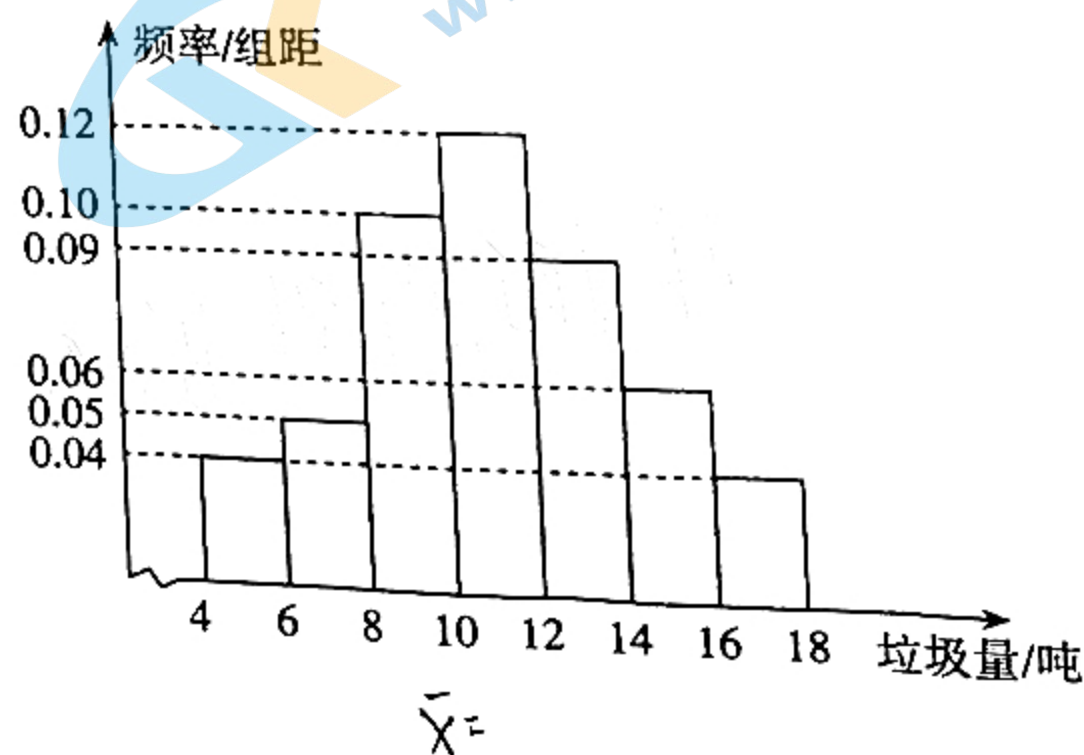
2017年国家发改委、住建部发布了《生活垃圾分类制度实施方案》，规定46个城市在2020年底实施生活垃圾强制分类，垃圾回收、利用率要达35%以上。某市在实施垃圾分类之前，对该市大型社区(即人口数量在1万左右)一天产生的垃圾量(单位：吨)进行了调查。已知该市这样的大型社区有200个，下图是某天从中随机抽取50个社区所产生的垃圾量绘制的频率分布直方图。现将垃圾量超过14吨/天的社区称为“超标”社区。

(I) 根据上述资料，估计当天这50个社区垃圾量的平均值 $\bar{x}$ (精确到整数)；

(II) 若当天该市这类大型社区的垃圾量 $X \sim N(\mu, 9)$ ，其中 μ 近似为(I)中的样本平均值 $\bar{x}$ ，请根据 X 的分布估计这200个社区中“超标”社区的个数(四舍五入精确到整数)；

(III) 市环保部门决定对样本中“超标”社区的垃圾来源进行调查，现从这些社区中随机抽取3个进行重点监控，设 Y 为其中当天垃圾量至少为16吨的社区个数，求 Y 的分布列与数学期望。

附： $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$ ； $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$ ； $P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9974$ 。

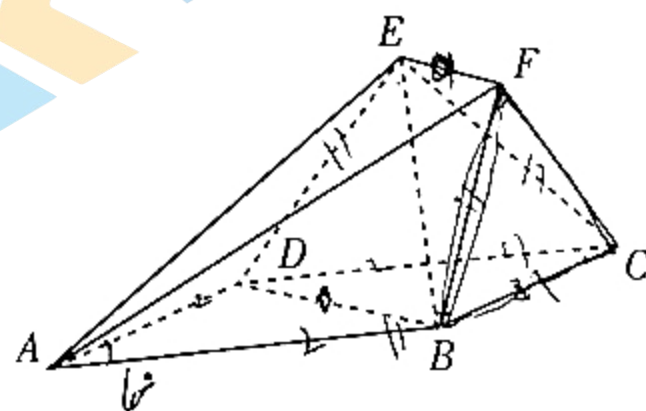


19. (本小题满分12分)

如图,在几何体 $ABCDEF$ 中,四边形 $ABCD$ 是边长为2的菱形,且 $\angle BAD = 60^\circ$, $CE = DE$, $EF \parallel DB$, $DB = 2EF$,平面 $CDE \perp$ 平面 $ABCD$.

(I) 求证:平面 $BCF \perp$ 平面 $ABCD$;

(II) 若平面 AEF 与平面 BCF 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$,求直线 BE 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.



20. (本小题满分12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别是点 A, B ,直线 $l: x = \frac{2}{3}$ 与椭圆 C 相交于 D, E 两个不同点,直线 DA 与直线 DB 的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$, $\triangle ABD$ 的面积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 若点 P 是直线 $l: x = \frac{2}{3}$ 的一个动点(不在 x 轴上),直线 AP 与椭圆 C 的另一个交点为 Q ,过 P 作 BQ 的垂线,垂足为 M ,在 x 轴上是否存在定点 N ,使得 $|MN|$ 为定值,若存在,请求出点 N 的坐标;若不存在,请说明理由.

21. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$, $g(x) = \sin x + \cos x$.

(I) 当 $x \geq -\frac{\pi}{4}$ 时,求证: $f(x) \geq g(x)$;

(II) 若不等式 $f(x) + g(x) \leq ax + 2$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立,求实数 a 的取值范围.

(二)选考题:共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.作答时请用2B铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22. (本小题满分10分)【选修4-4:坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{2\sqrt{2}t}{t^2 + 1}, \\ y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \end{cases} (t \text{ 为参数}),$$
 以坐标原点 O 为

极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(I)求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(II)已知点 A 在曲线 C 上,且点 A 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,求点 A 的直角坐标.

23. (本小题满分10分)【选修4-5:不等式选讲】

已知函数 $f(x) = |x + m^2| + |2x - m| (m > 0)$.

(I)当 $m = 1$ 时,求不等式 $f(x) \leq 6$ 的解集;

(II)若 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$,且 $a + b = m (a > 0, b > 0)$,求证: $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} \leq \sqrt{5}$.

太原市 2021 年高三年级模拟考试 (二)

数学试题 (理) 参考答案及评分标准

一. 选择题: A D C C B B A D C B C C

二. 填空题: 13. 60° 14. $\frac{7}{9}$ 15. $2\ln 2$ 16. $[\frac{9}{4}, 3)$

三. 解答题:

$$17. (I) \text{证明: } \because \frac{a_{n+1}}{n(a_{n+2}-a_{n+1})} = \frac{a_n}{(n+1)(a_{n+1}-a_n)} + \frac{1}{2n(n+1)}, \therefore \frac{(n+1)a_{n+1}}{a_{n+2}-a_{n+1}} = \frac{na_n}{a_{n+1}-a_n} + \frac{1}{2},$$

$$\therefore b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2}, \therefore b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2} \text{ 是一个与 } n \text{ 无关的常数,} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore \{b_n\} \text{ 是以首项 } b_1 = \frac{1}{2}, \text{ 公差 } d = \frac{1}{2} \text{ 的等差数列;} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(II) \text{ 由 (I) 得 } b_n = \frac{n}{2} (n \in N^*), \therefore \frac{na_n}{a_{n+1}-a_n} = \frac{n}{2}, \therefore a_{n+1} = 3a_n,$$

$$\because a_1 = 1, \therefore a_n = 3^{n-1} (n \in N^*), \therefore c_n = \frac{b_n}{a_n} = \frac{n}{2 \times 3^{n-1}} (n \in N^*), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{2} \times (1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^{n-1}}), \quad \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \times \frac{1}{3} \text{ 得 } \frac{1}{3} S_n = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n}), \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } \frac{2}{3} S_n = \frac{1}{2} \times (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{n}{3^n}),$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{8} \times (9 - \frac{2n+3}{3^{n-1}}). \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18 解: (I) 由频率分布直方图得该样本中垃圾量为 $[4,6)$, $[6,8)$, $[8,10)$, $[10,12)$, $[12,14)$, $[14,16)$, $[16,18]$ 的频率分别为 0.08, 0.1, 0.2, 0.24, 0.18, 0.12, 0.08,

$$\bar{x} = 5 \times 0.08 + 7 \times 0.10 + 9 \times 0.20 + 11 \times 0.24 + 13 \times 0.18 + 15 \times 0.12 + 17 \times 0.08 = 11.04 \approx 11,$$

所以当天这 50 个社区垃圾量的平均值为 11 吨; $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$$(II) \text{ 由 (I) 知 } \mu = 11, \therefore \sigma^2 = 9, \therefore \sigma = 3,$$

$$\therefore P(X > 14) = P(X > \mu + \sigma) = \frac{1 - 0.6827}{2} = 0.15865,$$

所以这 200 个社区中“超标”社区的个数为 $200 \times 0.15865 \approx 32$; $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

(III) 由 (I) 得样本中当天垃圾量为 $[14,16)$ 的社区有 $50 \times 0.12 = 6$ 个, 垃圾量为 $[16,18)$ 的社区有 $50 \times 0.08 = 4$ 个, 所以 Y 的可能取值为 0, 1, 2, 3, $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$P(Y=0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}, \quad P(Y=1) = \frac{C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}, \quad P(Y=2) = \frac{C_6^1 C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}, \quad P(Y=3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30},$$

$\therefore Y$ 的分布列为

Y	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$$\therefore EY = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{6}{5}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (1) 证明: 设点 G, H 分别是 CD, CB 的中点, 连结 EG, FH, GH ,
 则 $GH \parallel DB$, 且 $DB = 2GH$, $\therefore EF \parallel DB$, 且 $DB = 2EF$, $\therefore EF \parallel GH$, 且 $EF = GH$,

$\therefore EFHG$ 平行四边形, $\therefore FH \parallel EG$, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

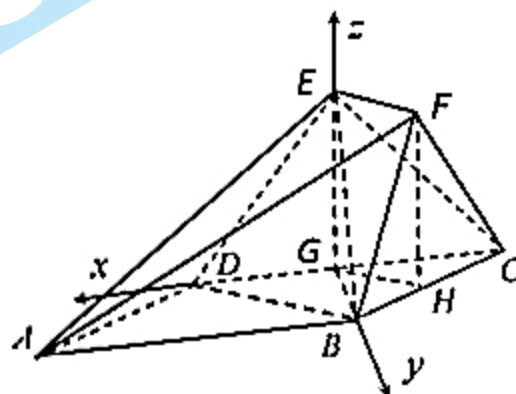
$\therefore CE = DE$, $\therefore EG \perp CD$,

$\therefore$ 平面 $CDE \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore EG \perp$ 平面 $ABCD$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$\therefore FH \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore FH \subset$ 平面 BCF ,

$\therefore$ 平面 $BCF \perp$ 平面 $ABCD$; $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$



(II) 连结 BG , 由 (I) 得 $EG \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, 且 $\angle BAD = 60^\circ$,

$\therefore \triangle BCD$ 是边长为 2 的等边三角形, $\therefore BG \perp CD$, $BG = \sqrt{3}$, $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

以 G 为坐标原点, 向量 $\overrightarrow{GD}, \overrightarrow{GB}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴的正方向, 建立如图所示的空间
 直角坐标系 $G-xyz$, 由题意得 $G(0,0,0)$, $A(2, \sqrt{3}, 0)$, $B(0, \sqrt{3}, 0)$, $C(-1, 0, 0)$,

设 $E(0,0,t)(t > 0)$, 则 $F(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, t)$,

设 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ 是平面 AEF 的一个法向量,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{EF} = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 = 0, \\ 2x_1 + \sqrt{3}y_1 - tz_1 = 0, \end{cases} \text{ 令 } y_1 = 1, \text{ 则 } \begin{cases} x_1 = \sqrt{3}, \\ z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{t}, \end{cases} \therefore \vec{m} = (\sqrt{3}, 1, \frac{3\sqrt{3}}{t}),$$

设 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$ 是平面 BCF 的一个法向量,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} x_2 + \sqrt{3}y_2 = 0, \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2 - tz_2 = 0, \end{cases} \text{ 令 } y_2 = -1, \text{ 则 } \begin{cases} x_2 = \sqrt{3}, \\ z_2 = 0, \end{cases} \therefore \vec{n} = (\sqrt{3}, -1, 0),$$

$$\therefore |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{27}{t^2}}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \therefore t = 3\sqrt{3}, \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore GE = 3\sqrt{3}, \therefore \text{直线 } BE \text{ 与平面 } ABCD \text{ 所成角的正弦值 } \frac{3\sqrt{10}}{10}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20 解: (I) 设 $D(\frac{2}{3}, y_0)$, 由题意得
$$\begin{cases} k_{DA} \cdot k_{DB} = \frac{y_0}{\frac{2}{3}+a} \cdot \frac{y_0}{\frac{2}{3}-a} = -\frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2} \times 2a \times |y_0| = \frac{4\sqrt{2}}{3}, \\ \frac{4}{9a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$\therefore \begin{cases} b^2 = 1, \\ a^2 = 4, \end{cases} \therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1; \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(II) 假设存在这样的点 N , 设直线 PM 与 x 轴相交于点 $T(x_0, 0)$, 由题意得 $TP \perp BQ$,

由 (I) 得 $B(2, 0)$, 设 $P(\frac{2}{3}, t)$, $Q(x_1, y_1)$, 由题意可设直线 AP 的方程为 $x = my - 2$,

由 $\begin{cases} x = my - 2, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$ 得 $(m^2 + 4)y^2 - 4my = 0$, $\therefore y_1 = \frac{4m}{m^2 + 4}$ 或 $y_1 = 0$ (舍去), $x_1 = \frac{2m^2 - 8}{m^2 + 4}$, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

$\therefore \frac{2}{3} = mt - 2, \therefore t = \frac{8}{3m},$

$\because TP \perp BQ, \therefore \overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{BQ} = (\frac{2}{3} - x_0)(x_1 - 2) + ty_1 = 0,$

$\therefore x_0 = \frac{2}{3} + \frac{ty_1}{x_1 - 2} = \frac{2}{3} + \frac{8}{3m} \cdot \frac{4m}{m^2 + 4} \cdot \frac{m^2 + 4}{-16} = 0, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$\therefore$ 直线 PM 过定点 $T(0, 0)$,

$\therefore$ 存在定点 $N(1, 0)$, 使得 $|MN| = 1$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

21. (I) 解: 令 $h(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x - \sin x - \cos x, x \geq -\frac{\pi}{4},$

(1) 当 $-\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{4}$ 时, 则 $h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + 1 - \cos x + \sin x,$

$\therefore h''(x) = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1})^{\frac{3}{2}}} + \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) > 0, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$\therefore h'(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增, 且 $h'(0) = 0,$

当 $-\frac{\pi}{4} \leq x < 0$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ 时, $h'(x) \geq 0,$

$\therefore h(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, 0)$ 上递减, 在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上递增, $\therefore h(x) \geq h(0) = 0, \therefore f(x) \geq g(x); \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$(2) \text{ 当 } x \geq \frac{\pi}{4} \text{ 时, 则 } h(x) = \sqrt{x^2+1} + x - \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \geq \sqrt{x^2+1} + x - \sqrt{2} \\ \geq \sqrt{(\frac{\pi}{4})^2+1} + \frac{\pi}{4} - \sqrt{2} > 1 + \frac{\pi}{4} - \sqrt{2} > 0, \therefore f(x) \geq g(x);$$

综上所述, 当 $x \geq -\frac{\pi}{4}$ 时, $f(x) \geq g(x)$;

.....5 分

$$(II) \text{ 令 } t(x) = f(x) + g(x) - ax - 2 = \sqrt{x^2+1} + x + \sin x + \cos x - ax - 2, \quad x \geq 0,$$

$$\text{则 } t'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1 + \cos x - \sin x - a,$$

由题意得 $t(x) \leq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, $\therefore t(0) = 0, \therefore t'(0) = 2 - a \leq 0, \therefore a \geq 2$;7 分

下证当 $a \geq 2$ 时, $t(x) \leq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上成立,

$$\therefore t(x) = \sqrt{x^2+1} + x + \sin x + \cos x - ax - 2 \leq \sqrt{x^2+1} + x + \sin x + \cos x - 2x - 2,$$

令 $\varphi(x) = \sqrt{x^2+1} - x + \sin x + \cos x - 2$, 只需证明 $\varphi(x) \leq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上成立,8 分

$$(1) \text{ 当 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ 时, } \varphi'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 + \cos x - \sin x,$$

$$\varphi''(x) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}), \therefore \varphi''(x) \text{ 在 } [0, \frac{\pi}{4}] \text{ 上单调递减, } \therefore \varphi''(x) \leq \varphi''(0) = 0,$$

$$\therefore \varphi'(x) \text{ 在 } [0, \frac{\pi}{4}] \text{ 上单调递减, } \therefore \varphi'(x) \leq \varphi'(0) = 0,$$

$$\therefore \varphi(x) \text{ 在 } [0, \frac{\pi}{4}] \text{ 上单调递减, } \therefore \varphi(x) \leq \varphi(0) = 0;$$

.....10 分

$$(2) \text{ 当 } x > \frac{\pi}{4} \text{ 时, } \varphi(x) = \sqrt{x^2+1} - x + \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) - 2 \leq \sqrt{x^2+1} - x + \sqrt{2} - 2$$

$$\leq \sqrt{(\frac{\pi}{4})^2+1} - \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} - 2 < 0;$$

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $[2, +\infty)$.

.....12 分

$$22 \text{ 解: (I) 将 } \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{2}t}{t^2+1} \\ y = \frac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases} \text{ 的参数 } t \text{ 消去得曲线 } C \text{ 的普通方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 (y \neq 1), \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \rho \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore \rho \cos \theta - \rho \sin \theta - 1 = 0,$$

$$\text{由 } \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \text{ 可得直线 } l \text{ 的直角坐标方程为 } x - y - 1 = 0;$$

.....5 分

(II) 由(1)得曲线C的参数方程可表示为 $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta, \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) ($\theta \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$),

设 $A(\sqrt{2} \cos \theta, \sin \theta)$, 则点A到直线l的距离 $d = \frac{|\sqrt{2} \cos \theta - \sin \theta - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,7分

$\therefore \sqrt{2} \cos \theta - \sin \theta = 0$ 或 $\sqrt{2} \cos \theta - \sin \theta = \sqrt{3} \cos(\theta + \varphi) = 2$ ($\tan \varphi = \sqrt{2}$) (舍去),

$\therefore \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, $\therefore \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$,

当 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $A(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$; 当 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $A(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3})$10分

23 解: (I) 当 $m=1$ 时, 原不等式为 $|x+1| + |2x-1| \leq 6$,

$\begin{cases} x < -1, \\ -(x+1) - (2x-1) \leq 6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ x+1 - (2x-1) \leq 6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x+1 + 2x-1 \leq 6, \end{cases}$ 3分

$\therefore -2 \leq x < -1$ 或 $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2} < x \leq 2$

$\therefore$ 原不等式 $f(x) \leq 6$ 的解集为 $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$:5分

(II) 由题意得 $f(x) = \begin{cases} -3x - m^2 + m, & x < -m^2, \\ -x + m^2 + m, & -m^2 \leq x \leq \frac{m}{2}, \\ 3x + m^2 - m, & x > \frac{m}{2}, \end{cases}$

$\therefore f(x)_{\min} = f(\frac{m}{2}) = m^2 + \frac{1}{2}m = \frac{3}{2}$, $\therefore m=1$ 或 $m=-\frac{3}{2}$ (舍去),7分

$\therefore a+b=1$, 令 $\begin{cases} a = \cos^2 \theta, \\ b = \sin^2 \theta \end{cases}$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$),

则 $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} = \cos \theta + 2\sin \theta = \sqrt{5} \sin(\theta + \varphi) \leq \sqrt{5}$,

当 $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 且 $\tan \varphi = \frac{1}{2}$) 时, 上述不等式取等号.10分

注: 以上各题其他解法, 请酌情给分.