2024 北京北师大附中高三（下）开学考

数　　学

2024.2

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $A=\left\{x\middle|x^2\le 4\right\}$，集合 $B=\left\{x\middle|x>0\right\}$，则 $A\cup B=$（　）

A. $(-\infty,-2]$　　B. $[-2,0)$　　C. $[-2,+\infty)$　　D. $(0,2]$

2. 若 $a>0>b$，则（　）

A. $a^3>b^3$　　B. $|a|>|b|$　　C. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　D. $\ln(a-b)>0$

3. 设 $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，若 $a_2=a_3$，则 $n=$（　）

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

4. 下列函数中，是奇函数且在定义域内单调递减的是（　）

A. $f(x)=\sin x$　　B. $f(x)=2^{|x|}$

C. $f(x)=x^3+x$　　D. $f(x)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}\right)$

5. 已知函数 $f(x)=x^3+x$，则“$x_1+x_2=0$”是“$f(x_1)+f(x_2)=0$”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 已知双曲线 C 的实轴长为 2，且与椭圆 $E:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}=1$ 的焦点相同，则双曲线 C 的渐近线方程为（　）.

A. $y=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x$　　B. $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$　　C. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}x$　　D. $y=\pm2\sqrt{2}x$

7. 已知 Q 为直线 $l:x+2y+1=0$ 上的动点，点 P 满足 $\overrightarrow{QP}=(1,-3)$，记 P 的轨迹为 E，则（　）

A. E 是一个半径为 $\sqrt{5}$ 的圆　　B. E 是一条与 l 相交的直线

C. E 上的点到 l 的距离均为 $\sqrt{5}$　　D. E 是两条平行直线

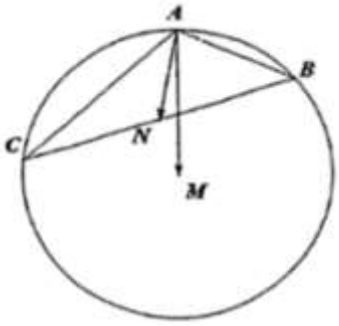
8. 声音是由于物体的振动产生的能引起听觉的波，我们听到的声音多为复合音．若一个复合音的数学模型是函数 $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x\left(x\in\mathrm{R}\right)$，则下列结论正确的是（　）

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

A. $f(x)$的一个周期为π　　B. $f(x)$的最大值为$\frac{3}{2}$

C. $f(x)$的图象关于直线$x=\pi$对称　　D. $f(x)$在区间$[0,2\pi]$上有 3 个零点

9. 如图，圆M为$\triangle ABC$的外接圆，$AB=4$，$AC=6$，N为边BC的中点，则$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AM}=$（　）



A. 10　　B. 13　　C. 18　　D. 26

10. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为 2，点P为正方形$ABCD$所在平面内一动点，给出下列三个命题：

①若点P总满足$PD_1\perp DC_1$，则动点P的轨迹是一条直线；

②若点P到直线BB_1与到平面CDD_1C_1的距离相等，则动点P的轨迹是抛物线；

③若点P到直线DD_1的距离与到点C的距离之和为 2，则动点P的轨迹是椭圆.

其中正确的命题个数是（　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 若复数$z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}$，则$|\overline{z}|=$_____.

12. 函数$f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}x, x\geq 1\\ 3^x, x<1\end{cases}$的值域为_____.

13. 经过抛物线$x^2=4y$的焦点的直线与抛物线相交于A，B两点，若$|\mathrm{AB}|=4$，则$\triangle OAB$（O为坐标原点）的面积为_____.

14. 在$\triangle ABC$中，$a=4\sqrt{2}$，$b=m$，$\sin A-\cos A=0$.

（1）若$m=8$，则$c=$_____；

（2）当$m=$_____（写出一个可能的值）时，满足条件的$\triangle ABC$有两个.

15. 项数为$k\left(k\in\mathrm{N}^*,\ k\geq 2\right)$的有限数列$\{a_n\}$的各项均为不小于$-1$的整数，满足$a_1\cdot 2^{k-1}+a_2\cdot 2^{k-2}+a_3\cdot 2^{k-3}+\ldots+a_{k-1}\cdot 2+a_k=0$，其中$a_1\neq 0$．给出下列四个结论：

①若$k=2$，则$a_2-a_1=2$；

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

②若 $k=3$，则满足条件的数列 $\{a_n\}$ 有 4 个；

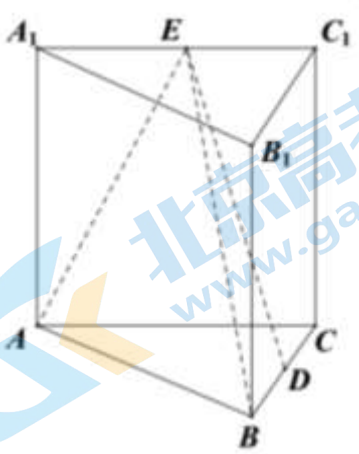
③存在 $a_1=1$ 的数列 $\{a_n\}$；

④所有满足条件的数列 $\{a_n\}$ 中，首项相同.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，侧面 AA_1C_1C 正方形，面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 ABC，D，E 分别为 BC，A_1C_1 的中点，$AB=BC=\sqrt{5}$，$AC=2$.



（1）求证：$DE//$ 平面 ABB_1A_1；

（2）求二面角 $C-AB-E$ 成角的余弦值.

17. 设函数 $f(x)=A\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x(A>0,\omega>0)$，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，使得 $f(x)$ 存在.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

条件①：$f(x)=f(-x)$；

条件②：$f(x)$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$；

条件③：$f(x)$ 的图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

注：如果选择的条件不符合要求，得 0 分；如果选择多组条件分别解答，按第一组解答计分.

18. 在测试中，客观题难度的计算公式为 $P_i=\frac{R_i}{N}$，其中 P_i 为第 i 题的难度，R_i 为答对该题的人数，N 为参加测试的总人数·现对某校高三年级 240 名学生进行一次测试，共 5 道客观题·测试前根据对学生的了解，预估了每道题的难度，如表所示：

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

题号	1	2	3	4	5
考前预估难度 P_i	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4

测试后，随机抽取了 20 名学生的答题数据进行统计，结果如下：

题号	1	2	3	4	5
实测答对人数	16	16	14	14	14

（1）根据题中数据，估计这 240 名学生中第 5 题的实测答对人数；

（2）从抽样的 20 名学生中随机抽取 2 名学生，记这 2 名学生中第 5 题答对的人数为 X ，求 X 的分布列和数学期望；

（3）试题的预估难度和实测难度之间会有偏差·设 P_i' 为第 i 题的实测难度，请用 P_i 和 P_i' 设计一个统计量，并制定一个标准来判断本次测试对难度的预估是否合理.

19. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，点 P 是椭圆与 x 轴正半轴的交点，点 Q 是椭圆与 y 轴正半轴的交点，且 $|FQ|=\sqrt{2}$，$|PF|=\sqrt{2}-1$．直线 l 过圆 $O:x^2+y^2=1$ 的圆心，并与椭圆相交于 A，B 两点，过点 A 作圆 O 的一条切线，与椭圆的另一个交点为 C，且 $S_{\triangle ABC}=\frac{4}{3}$.

（1）求椭圆的方程；

（2）求直线 AC 的斜率.

20. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-ax-1(a\in\mathrm{R})$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $f(x)>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（3）证明：若 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点 x_0，则 $x_0<a-2$.

21. 已知有穷数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_N\ (N\in\mathbf{N}^*,N\geq 3)$ 满足 $a_i\in\{-1,0,1\}(i=1,2,\cdots,N)$．给定正整数 m，若存在正整数 s，$t(s\neq t)$，使得对任意的 $k\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}$，都有 $a_{s+k}=a_{t+k}$，则称数列 A 是 $m-$ 连续等项数列.

（1）判断数列 $A:-1,1,0,1,0,1,-1$ 是否为 $3-$ 连续等项数列？是否为 $4-$ 连续等项数列？说明理由；

（2）若项数为 N 的任意数列 A 都是 $2-$ 连续等项数列，求 N 的最小值；

（3）若数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_N$ 不是 $4-$ 连续等项数列，而数列 $A_1:a_1,a_2,\cdots,a_N,-1$，数列 $A_2:a_1,a_2,\cdots,a_N,0$ 与数列 $A_3:a_1,a_2,\cdots,a_N,1$ 都是 $4-$ 连续等项数列，且 $a_3=0$，求 a_N 的值.

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

参考答案

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【答案】C

【分析】化简 $A=\{x|-2\le x\le 2\}$，再由集合并集的运算即可得解.

【详解】由题意 $A=\{x|x^2\le 4\}=\{x|-2\le x\le 2\}$，$B=\{x|x>0\}$，

所以 $A\cup B=\{x|-2\le x\le 2\}\cup\{x|x>0\}=\{x|x\ge -2\}=[-2,+\infty)$.

故选：C.

2.【答案】A

【分析】根据不等式的性质判断 A，取特殊值判断 BCD.

【详解】$\because a>0>b$，$\therefore a^3>0,b^3<0$，即 $a^3>b^3$，故 A 正确；

取 $a=1,b=-2$，则 $|a|>|b|$ 不成立，故 B 错误；

取 $a=1,b=-2$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 不成立，故 C 错误；

取 $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$，则 $\ln(a-b)=\ln 1=0$，故 D 错误.

故选：A

3.【答案】A

【分析】先求出 $(1+x)^n$ 展开式第 $r+1$ 项，再由 $a_2=a_3$ 列出方程，即可求出 n 的值.

【详解】$(1+x)^n$ 展开式第 $r+1$ 项 $T_{r+1}=C_n^r x^r$，

$\because a_2=a_3$，$\therefore C_n^2=C_n^3$，

$\therefore n=2+3=5$.

故选：A.

4.【答案】D

【分析】根据函数的奇偶性，基本初等函数的单调性，逐项判断即可.

【详解】对于 A，函数 $f(x)=\sin x$ 为奇函数，但在定义域 R 上函数不单调，故 A 不符合；

对于 B，$f(x)=2^{|x|}$ 的定义域为 R，$f(-x)=2^{|-x|}=2^{|x|}=f(x)$，则 $f(x)=2^{|x|}$ 为偶函数，故 B 不符合；

对于 C，$f(x)=x^3+x$ 的定义域为 R，$f(-x)=-x^3-x=-f(x)$，则 $f(x)=x^3+x$ 为奇函数，又函数 $y=x^3,y=x$ 在 R 上均为增函数，故 $f(x)=x^3+x$ 在 R 上为增函数，故 C 不符合；

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

对于 D，$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}\right)$的定义域为 R，$f\left(-x\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)=-f\left(x\right)$，则 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}\right)$为奇函数，又函数 $y=\mathrm{e}^{-x}$在 R 上为减函数，$y=\mathrm{e}^{x}$在 R 上为增函数，故 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}\right)$在 R 上为减函数，故 D 符合.

故选：D.

5.【答案】C

【分析】由 $f(x)$ 的奇偶性、单调性结合充分条件、必要条件的概念即可得解.

【详解】因为 $f\left(x\right)=x^{3}+x$ 定义域为 R，$f(-x)=(-x)^{3}+(-x)=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数，且 $f(x)$ 为 R 上的增函数.

当 $x_1+x_2=0$ 时，$x_2=-x_1$，所以 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=f\left(x_1\right)+f\left(-x_1\right)=0$，

即“$x_1+x_2=0$”是“$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=0$”的充分条件，

当 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=0$ 时，$f\left(x_1\right)=-f(x_2)=f(-x_2)$，由 $f(x)$ 的单调性知，

$x_1=-x_2$，即 $x_1+x_2=0$，

所以“$x_1+x_2=0$”是“$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=0$”成立的必要条件.

综上，“$x_1+x_2=0$”是“$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=0$”的充要条件.

故选：C

6.【答案】C

【分析】先根据椭圆的方程求出椭圆的焦点坐标，进而得双曲线的焦点坐标，再根据 a 的值求出 b^2，即可得到双曲线的标准方程，最后求双曲线的渐近线方程即可.

【详解】∵椭圆 $E:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}=1$ 的焦点坐标为 $(0,-3)$，$(0,3)$，

故 $c=3$，

可设双曲线 C 的方程为 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，

则 $c^2=9=a^2+b^2$.

∵双曲线 C 的实轴长为 2，

∴ $2a=2$，可得：$a=1$

∴ $b^2=8$，

∴双曲线 C 的标准方程为 $y^2-\frac{x^2}{8}=1$.

令 $y^2-\frac{x^2}{8}=0$，得 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}x$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

故双曲线C的渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}x$

故选：C.

【点睛】本题主要考查双曲线和椭圆的标准方程和几何性质，考查数学运算核心素养，解题关键是掌握双曲线的渐近线方程定义，属于基础题.

7.【答案】C

【分析】设$P(x,y)$，由$\overrightarrow{QP}=(1,-3)$可得$Q$点坐标，由$Q$在直线上，故可将点代入坐标，即可得$P$轨迹$E$，结合选项即可得出正确答案.

【详解】设$P(x,y)$，由$\overrightarrow{QP}=(1,-3)$，则$Q(x-1,y+3)$，

由Q在直线$l:x+2y+1=0$上，故$x-1+2(y+3)+1=0$，

化简得$x+2y+6=0$，即P的轨迹为E为直线且与直线l平行，

E上的点到l的距离$d=\frac{|6-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$，故A、B、D错误，C正确.

故选：C.

8.【答案】D

【分析】A.代入周期的定义，即可判断；

B.分别比较两个函数分别取得最大值的x值，即可判断；

C.代入对称性的公式，即可求解；

D.根据零点的定义，解方程，即可判断.

【详解】A. $f(x+\pi)=\sin(x+\pi)+\frac{1}{2}\sin 2(x+\pi)=-\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x\neq f(x)$，故A错误；

B. $y=\sin x$，当$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$时，取得最大值1，$y=\frac{1}{2}\sin 2x$，当$2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$时，即$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$时，取得最大值$\frac{1}{2}$，所以两个函数不可能同时取得最大值，所以$f(x)$的最大值不是$\frac{3}{2}$，故B错误；

C. $f(2\pi-x)=\sin(2\pi-x)+\frac{1}{2}\sin 2(2\pi-x)=-\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x\neq f(x)$，所以函数$f(x)$的图象不关于直线$x=\pi$对称，故C错误；

D. $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x=\sin x+\sin x\cos x=0$，即$\sin x(1+\cos x)=0$，$x\in[0,2\pi]$，

即$\sin x=0$或$\cos x=-1$，解得：$x=0,\pi,2\pi$，

所以函数$f(x)$在区间$[0,2\pi]$上有3个零点，故D正确.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

故选：D

9.【答案】B

【分析】根据三角形外接圆的性质，结合数量积的几何意义求解可得可得 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}$，再根据平面向量的运算可得出结论.

【详解】$\because N$ 是 BC 边的中点，可得 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

$\because M$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心，

$\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AM}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\angle BAM=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\frac{1}{2}\times4^2=8$，

同理可得 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=18$，

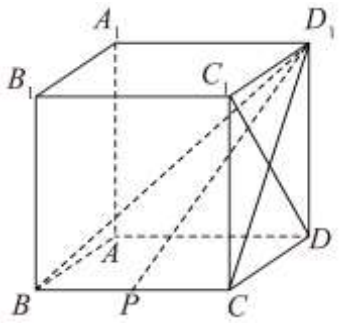
$\therefore \overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\times8+\frac{1}{2}\times18=13$.

故选：B.

10.【答案】C

【分析】根据正方体中的线面垂直以及线线垂直关系，即可确定满足满足 $PD_1\perp DC_1$ 的动点 P 的轨迹，从而可判断①；利用线线关系将点线距离转化为点点距离，结合圆锥曲线的定义即可判断动点 P 的轨迹，即可得判断②③，从而可得答案.

【详解】对于①，如图在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，连接 BD_1,CD_1，



在正方体中，因为四边形 CDD_1C_1 为正方形，所以 $DC_1\perp CD_1$，

又 $BC\perp$ 平面 CDD_1C_1，$DC_1\subset$ 平面 CDD_1C_1，所以 $BC\perp DC_1$，

又 $CD_1\cap BC=C,CD_1,BC\subset$ 平面 BCD_1，所以 $DC_1\perp$ 平面 BCD_1，

平面 $BCD_1\cap$ 平面 $ABCD=BC$，$P\in$ 平面 $ABCD$，点 P 总满足 $PD_1\perp DC_1$，

所以 $P\in$ 平面 BCD_1，所以 $P\in BC$，则动点 P 的轨迹是一条直线，故①正确；

对于②，$BB_1\cap$ 平面 $ABCD=B,P\in$ 平面 $ABCD$，则点 P 到直线 BB_1 等于 P 到 B 的距离，

又 P 到平面 CDD_1C_1 的距离等于 P 到 DC 的距离，

则 P 到 B 的距离等于 P 到 DC 的距离，由抛物线的定义可知，动点 P 的轨迹是抛物线，故②正确；

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

对于③，点 P 到直线 DD_1 的距离等于 P 到 D 的距离，所以 P 到 D 的距离与到点 C 的距离之和为 2，即 $|PD|+|PC|=2=|DC|$，则点 P 的轨迹为线段 DC，故③不正确.

所以正确的命题个数是 2.

故选：C.

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】$\sqrt{2}$

【分析】

根据 $|\overline{z}|=|z|$ 以及复数商的模等于复数的模的商，计算可得答案.

【详解】因为 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$，所以 $|\overline{z}|=|z|=\left|\dfrac{2}{1+i}\right|=\dfrac{2}{|1+i|}=\dfrac{2}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$.

故答案为：$\sqrt{2}$

【点睛】本题考查了复数模的性质，考查了复数的模长公式，属于基础题.

12.【答案】$(-\infty,3)$

【分析】利用对数函数和指数函数的图象和性质分别求 $x\geq 1$ 和 $x<1$ 的值域，再取并集即可.

【详解】因为当 $x\geq 1$ 时，$\log_{\frac{1}{3}}x\leq 0$，

当 $x<1$ 时，$3^x<3$，

所以函数 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}x, x\geq 1\\ 3^x, x<1\end{cases}$ 的值域为 $(-\infty,3)$，

故答案为：$(-\infty,3)$

13.【答案】2

【分析】求出焦点坐标，设直线 AB 方程，联立抛物线方程，韦达定理，利用弦长求出直线方程，可求得 O 点到直线 AB 距离，进一步求出三角形面积.

【详解】由题意知，抛物线 $x^2=4y$ 的焦点 $F(0,1)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 AB：$y=kx+1$，

联立方程 $\begin{cases}y=kx+1\\ x^2=4y\end{cases}$，消去 x 可得 $y^2-(2+4k^2)y+1=0$，$\Delta=(2+4k^2)^2-4=16k^4+16k^2\geq 0$，

韦达定理得 $y_1+y_2=2+4k^2, y_1y_2=1$，

因为 $|AB|=|AF|+|FB|=y_1+y_2+2=2+4k^2+2=4$，所以 $k^2=0$，即 $k=0$，

所以直线 AB：$y=1$，所以点 O 到直线 AB 的距离为 $|OF|=1$，

所以 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|OF|\cdot|AB|=\dfrac{1}{2}\times 1\times 4=2$.

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

故答案为：2

14.【答案】 ①. $4\sqrt{2}$ ②. 6（答案不唯一）

【分析】（1）求出A，再由余弦定理求解即可；

（2）根据已知两边及一边的对角求三角形解得情况，建立不等式求出 m 的范围即可得解.

【详解】（1）$\because \sin A-\cos A=0$，$\therefore \tan A=1$，

$\because 0<A<\pi$，$A=\frac{\pi}{4}$，

由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $32=64+c^2-16\times\frac{\sqrt{2}}{2}c$，

解得 $c=4\sqrt{2}$.

（2）因为 $A=\frac{\pi}{4}, a=4\sqrt{2}$，

所以当 $b\sin\frac{\pi}{4}<a<b$ 时，方程有两解，

即 $4\sqrt{2}<m<8$，

取 $m=6$ 即可满足条件（答案不唯一）

故答案为：$4\sqrt{2}$；6.

15.【答案】②④

【分析】由题意可得 $a_1\cdot 2^{k-1}\le(2^{k-2}+2^{k-3}+\ldots+2^1+1)=2^{k-1}-1$，所以 $-1\le a_1\le 1-(\frac{1}{2})^{k-1}<1$，

$a_1=-1$，从而可判断③，④；当 $k=2$ 时，得 $2a_1+a_2=0$，所以 $a_1=-1$，则 $a_2=2$，从而判断①：当 $k=3$ 时，可得 $-1\le a_2\le\frac{5}{2}$，则 a_2 的可能取值为–1，0，1，2，对应的 a_3 的取值为 6，4，2，0，从而可得数列 $\{a_n\}$，即可判断②.

【详解】因为有限数列 $\{a_n\}$ 的各项均不小于–1的整数，

所以 $a_n\ge -1$，$n\in \mathrm{N}^*$，$a_n\in \mathrm{Z}$，

又因为 $a_1\cdot 2^{k-1}+a_2\cdot 2^{k-2}+a_3\cdot 2^{k-3}+\ldots+a_{k-1}\cdot 2+a_k=0$，

所以 $a_1\cdot 2^{k-1}=-(a_2\cdot 2^{k-2}+a_3\cdot 2^{k-3}+\ldots+a_{k-1}\cdot 2+a_k)\le(2^{k-2}+2^{k-3}+\ldots+2^1+1)=2^{k-1}-1$，

所以 $-1\le a_1\le 1-(\frac{1}{2})^{k-1}<1$，且 $a_1\ne 0$，a_1 为整数，

所以 $a_1=-1$，所以③错误，④正确；

当 $k=2$ 时，得 $2a_1+a_2=0$，所以 $a_1=-1$，则 $a_2=2$，所以 $a_2-a_1=3$，故①错误；

当 $k=3$ 时，得 $4a_1+2a_2+a_3=0$，

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

又因为$a_1=-1$，

所以$2a_2+a_3=4$，则$2a_2=4-a_3\le 5$，

所以$-1\le a_2\le\frac{5}{2}$，a_2为整数，

则a_2的可能取值为-1，0，1，2，对应的a_3的取值为6，4，2，0，

故数列$\{a_n\}$可能为-1，-1，6；-1，0，4；-1，1，2；-1，2，0，共4个，故②正确.

故答案为：②④.

【点睛】思路点睛：项数为$k\left(k\in\mathrm{N}^*,k\ge 2\right)$的有限数列$\{a_n\}$的性质入手$a_n\ge -1$，$n\in\mathrm{N}^*,a_n\in\mathrm{Z}$，从各项$a_n\ge -1$，结合不等式放缩，确定$a_1$的范围，从而得$a_1$的值，逐项验证即可.

三、解答题共6小题，共85分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】（1）证明见解析

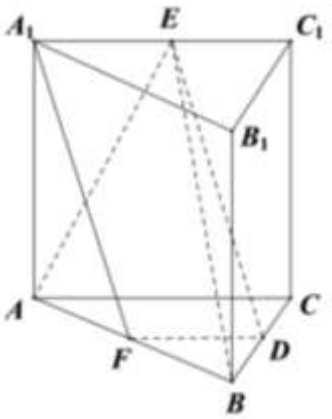
（2）$\frac{\sqrt{6}}{6}$

【分析】（1）取AB中点F，连接DF，FA_1，推导出四边形A_1FDE为平行四边形，从而$A_1F//DE$，由此能证明$DE//$平面ABB_1A_1.

（2）建立空间直角坐标系，利用向量法能求出二面角$C-AB-E$的余弦值.

【小问1详解】

证明：取AB中点F，连接DF，FA_1，



在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，

$\because A_1E=EC_1$，$A_1C_1//AC$，$\therefore A_1E//AC$，$A_1E=\frac{1}{2}AC$，

$BD=DC$，$BF=FA$，$\therefore DF//AC$，$DF=\frac{1}{2}AC$，

$\therefore DF//A_1E$，$DF=A_1E$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

$\therefore$四边形 A_1FDE 为平行四边形，

$\therefore A_1F//DE$，$A_1F\subset$面B_1BAA_1，$DE\not\subset$面B_1BAA_1，

$\therefore DE//$平面ABB_1A_1.

【小问 2 详解】

取 AC 中点为 O，连接 OE,OD，

$\because AB=BC=\sqrt{5}$，O 为 AC 中点

$\therefore OB\perp AC$，则 $OB=2$

$\because$面$AA_1C_1C\perp$平面ABC，面$AA_1C_1C\cap$平面$ABC=AC$，$OB\subset$平面ABC

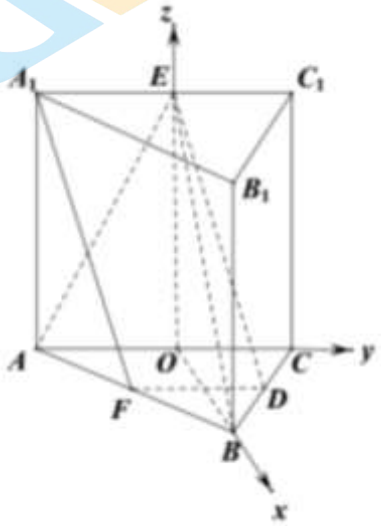
$\therefore OB\perp$面AA_1C_1C，

$\because OE\subset$面AA_1C_1C，$\therefore OB\perp OE$，

$\because$面AA_1C_1C正方形，E,O为AC,A_1C_1中点，

$\therefore OE\perp OC$，

如图，以OB所在直线为x轴，OC所在直线为y轴，OE所在直线为z轴，建立空间直角坐标系，



则 $A(0,-1,0),B(2,0,0),C(0,1,0),E(0,0,2)$，

$\because OE\perp$面ABC，$\therefore \overrightarrow{OE}=(0,0,2)$是平面$ABC$的法向量，

设面 ABE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$\because \overrightarrow{AB}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,1,2)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2x+y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=y+2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-2x\\ y=-2z\end{cases}$，取 $x=1$，得 $\vec{n}=(1,-2,1)$，

$\therefore\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{OE}\right\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{OE}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{OE}|}=\dfrac{2}{2\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

由图得，二面角 $C-AB-E$ 为锐二面角，

$\therefore$ 二面角 $C-AB-E$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

17.【答案】（1）选择条件②③，$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$

（2）最大值为 $\dfrac{3}{2}$，最小值为 0.

【分析】（1）由正弦函数和余弦函数的奇偶性可排除条件①，先利用辅助角公式化简 $f\left(x\right)$，再根据正弦函数的图象和性质即可求解；

（2）利用整体代入法，结合正弦函数的图象和性质即可求解.

【小问 1 详解】

若选择条件①，

因为 $f\left(x\right)=\dfrac{A}{2}\sin 2\omega x+\cos^2\omega x$，所以

$f\left(-x\right)=\dfrac{A}{2}\sin\left(-2\omega x\right)+\cos^2\left(-\omega x\right)=-\dfrac{A}{2}\sin 2\omega x+\cos^2\omega x$，

由 $f\left(x\right)$=$f\left(-x\right)$ 可得 $A\sin 2\omega x=0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，与 $A>0,\omega>0$ 矛盾，

所以选择条件②③，

由题意可得 $f\left(-x\right)=A\sin\left(-\omega x\right)\cos\left(-\omega x\right)+\cos^2\left(-\omega x\right)=-A\sin 2\omega x+\cos^2\omega x$，

设 $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，

由题意可得 $f\left(x\right)=\dfrac{A}{2}\sin 2\omega x+\dfrac{1}{2}\cos 2\omega x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{A^2+1}}{2}\sin\left(2\omega x+\varphi\right)+\dfrac{1}{2}$，

其中 $\cos\varphi=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+1}}$，$\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{A^2+1}}$，

因为 $f\left(x\right)$ 的最大值为 $\dfrac{3}{2}$，所以 $\dfrac{\sqrt{A^2+1}}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，解得 $A=\sqrt{3}$，

所以 $\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$，$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，

由 $f\left(x\right)$ 的图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$ 可得 $\dfrac{T}{2}=\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $T=\dfrac{2\pi}{2\omega}=\pi$ 解得 $\omega=1$，

所以 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$.

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

【小问 2 详解】

由正弦函数的图象可得当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，

所以 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 $\frac{3}{2}$，最小值为 0 .

18. 【答案】（1）48　（2）$\frac{38}{95}$

（3）合理

【分析】（1）因为 20 人中答对第 5 题的人数为 4 人，因此第 5 题的实测难度为 $\frac{4}{20}=0.2$，于是可求出 240 人中实测答对第 5 题的人数.

（2） X 的可能取值是 0,1,2，根据超几何分布即可求出概率和分布列，进而求出期望；

（3）将抽样的 20 名学生中第 i 题的实测难度，作为 240 名学生第 i 题的实测难度．定义统计量 $S=\frac{1}{n}\left[\left(P_1'-P_1\right)^2+\left(P_2'-P_2\right)^2+\ldots+\left(P_n'-P_n\right)^2\right]$，其中 P_i 为第 i 题的预估难度. 并规定：若 $S<0.05$，则称本次测试的难度预估合理，否则为不合理．计算 S 值即可判断.

【小问 1 详解】

因为 20 人中答对第 5 题的人数为 4 人，因此第 5 题的实测难度为 $\frac{4}{20}=0.2$，

所以估计 240 人中有 $240\times0.2=48$ 人实测答对第 5 题.

【小问 2 详解】

X 的可能取值是 0,1,2，

$P\left(X=0\right)=\frac{C_{16}^2}{C_{20}^2}=\frac{12}{19}$；$P\left(X=1\right)=\frac{C_{16}^1C_4^1}{C_{20}^2}=\frac{32}{95}$；$P\left(X=2\right)=\frac{C_4^2}{C_{20}^2}=\frac{3}{95}$.

X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{12}{19}$	$\frac{32}{95}$	$\frac{3}{95}$

$EX=0\times\frac{12}{19}+1\times\frac{32}{95}+2\times\frac{3}{95}=\frac{38}{95}$.

【小问 3 详解】

将抽样的 20 名学生中第 i 题的实测难度，作为 240 名学生第 i 题的实测难度.

定义统计量 $S=\frac{1}{n}\left[\left(P_1'-P_1\right)^2+\left(P_2'-P_2\right)^2+\ldots+\left(P_n'-P_n\right)^2\right]$，

其中 P_i 为第 i 题的预估难度.

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

并规定：若$S<0.05$，则称本次测试的难度预估合理，否则为不合理.

$S=\frac{1}{5}\left[(0.8-0.9)^2+(0.8-0.8)^2+(0.7-0.7)^2+(0.7-0.6)^2+(0.2-0.4)^2\right]=0.012$.

因为$S=0.012<0.05$，

所以该次测试的难度预估是合理的.

19.【答案】（1）$\frac{x^2}{2}+y^2=1$

（2）1 或−1

【分析】（1）由椭圆的性质得出即可；

（2）当直线 AC 的斜率不存在时不符合题意；存在时设 $y=kx+m$，由直线 AC 与圆 O 相切得到 $m^2=k^2+1$，然后直曲联立，写出韦达定理，用斜率和 m 表示的弦长公式写出三角形面积，解出方程组的解即可.

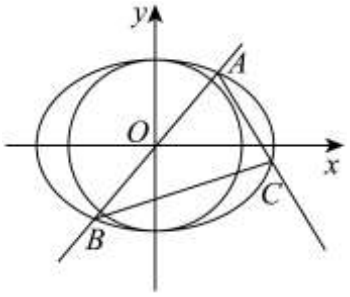
【小问 1 详解】

由题意可得 $a=\sqrt{2}$，$a-c=\sqrt{2}-1$，

$\therefore c=1$，$\therefore b=1$，

$\therefore$椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

【小问 2 详解】



若圆 O 的切线 $AC\perp x$ 轴，则 $|AC|=\sqrt{2}$，$S_{\triangle ABC}=\sqrt{2}$，不满足题意.

设直线 AC 的方程为 $y=kx+m$，

$\because$直线 AC 与圆 O 相切，$\therefore\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，$\therefore m^2=k^2+1$，

联立 $y=kx+m$ 与 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，

消 y 得 $\left(1+2k^2\right)x^2+4kmx+2m^2-2=0$.

$\Delta=16k^2m^2-4\left(1+2k^2\right)\left(2m^2-2\right)=16k^2-8m^2+8>0$，

设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$C\left(x_2,y_2\right)$，则 $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-2}{1+2k^2}$.

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

$\because O$ 到直线 AC 的距离为 1，则 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AOC}=2\times\frac{1}{2}|AC|\times1$

$=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{4km}{1+2k^2}\right)^2-4\cdot\frac{2m^2-2}{1+2k^2}}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2k^2-m^2+1}}{1+2k^2}=\frac{4}{3}$，

将 $m^2=k^2+1$ 代入消 m 可得 $\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\,|k|}{1+2k^2}=\frac{4}{3}$，

化简可得 $k^4+k^2-2=0$，解得 $k^2=1$（负值舍去），

$\therefore k=\pm1$，故直线 AC 的斜率为 1 或 −1.

20.【答案】（1）答案见解析

（2）$a\le2$

（3）证明见解析

【分析】（1）讨论 $a\le0$、$a>0$，结合导数的符号确定单调区间；

（2）由 $f'(x)=2e^{2x}-a$，讨论 $a\le2$、$a>2$ 研究导数符号判断 $f(x)$ 单调性，进而判断题设不等式是否恒成立，即可得参数范围；

（3）根据（2）结论及零点存在性确定 $a>2$ 时 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2},+\infty)$ 上存在唯一零点，由零点性质及区间单调性，应用分析法将问题转化为证 $f(a-2)>0$ 在 $a>2$ 上恒成立，即可证结论.

【小问 1 详解】

由题设 $f'(x)=2e^{2x}-a$，

当 $a\le0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 R 上递增；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}$，

若 $x<\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})$ 上递减；

若 $x>\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2},+\infty)$ 上递增；

综上，$a\le0$ 时 $f(x)$ 的递增区间为 R，无递减区间；

$a>0$ 时 $f(x)$ 的递减区间为 $(-\infty,\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})$，递增区间为 $(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2},+\infty)$.

【小问 2 详解】

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

由 $f'(x)=2e^{2x}-a$，

当 $a\le 2$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，则 $f(x)>f(0)=0$，满足要求；

当 $a>2$ 时，由（1）知：$f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})$ 上递减，在 $(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2},+\infty)$ 上递增，而 $\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})$ 上递减，在 $(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2},+\infty)$ 上递增，要使 $f(x)>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

所以，只需 $f(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})=\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}-1>0$，

令 $g(x)=x-x\ln x-1$ 且 $x>1$，则 $g'(x)=-\ln x<0$，即 $g(x)$ 递减，

所以 $g(x)<g(1)=0$，故在 $x\in(0,+\infty)$ 上 $f(x)>0$ 不存在 $a>2$；

综上，$a\le 2$

【小问 3 详解】

由（2）知：$a\le 2$ 时，在 $(0,+\infty)$ 恒有 $f(x)>0$，故不可能有零点；

$a>2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})$ 上递减，在 $(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2},+\infty)$ 上递增，且 $f(0)=0$，

所以 $(0,\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})$ 上 $f(x)<0$，无零点，即 $f(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})<0$，且 x 趋向于正无穷时 $f(x)$ 趋向正无穷，

所以，在 $(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2},+\infty)$ 上存在唯一 x_0，使 $f(x_0)=e^{2x_0}-ax_0-1=0$，

要证 $x_0<a-2$，只需 $f(a-2)=e^{2(a-2)}-a(a-2)-1>0$ 在 $a>2$ 上恒成立即可，

令 $t=a-2>0$，若 $h(t)=e^{2t}-t(t+2)-1$，则 $h'(t)=2(e^{2t}-t-1)$，

令 $p(t)=e^{2t}-t-1$，则 $p'(t)=2e^{2t}-1>0$，即 $p(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，故 $p(t)>p(0)=0$，

所以 $h'(t)>0$，即 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，故 $h(t)>h(0)=0$，

所以 $f(a-2)=e^{2(a-2)}-a(a-2)-1>0$ 在 $a>2$ 上恒成立，得证；

故 $x_0<a-2$，得证.

【点睛】关键点点睛：第三问，通过讨论确定 $f(x)$ 在某一单调区间上存在唯一零点的 a 的范围后，应用分析法证 $f(a-2)>0$ 恒成立即可.

21.【答案】（1）数列 A 是 $3-$ 连续等项数列，不是 $4-$ 连续等项数列，理由见解析；

（2）11　（3）0

【分析】（1）根据新定义直接验证数列 $A:-1$，1，0，1，0，1，-1，可得结论；

（2）先根据新定义证明 $N\ge 11$ 时，数列 A 一定是 $2-$ 连续等项数列，再验证 $n\le 10$ 时，A 不是 $2-$ 连续等项数列即可；

（3）由 A_1,A_2A_3 都是 $4-$ 连续等项数列可得 $a_i=a_{N-2},a_{i+1}=a_{N-1},a_{i+2}=a_N,a_{i+3}=-1$，

$a_j=a_{N-2},a_{j+1}=a_{N-1},a_{j+2}=a_N,a_{j+3}=0$，$a_k=a_{N-2},a_{k+1}=a_{N-1},a_{k+2}=a_N,a_{k+3}=1$，再由反证法证得

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

$\min\{i,j,k\}=1$，即可得出 a_N 的值.

【小问 1 详解】

数列 A 是 $3-$ 连续等项数列，不是 $4-$ 连续等项数列，理由如下:

因为 $a_{2+k}=a_{4+k}(k=0,1,2)$，所以 A 是 $3-$ 连续等项数列.

因为 a_1,a_2,a_3,a_4 为 $-1,1,0,1$；

a_2,a_3,a_4,a_5 为 $1,0,1,0$；

a_3,a_4,a_5,a_6 为 $0,1,0,1$;

a_4,a_5,a_6,a_7 为 $1,0,1,-1$，

所以不存在正整数 $s,t(s\neq t)$，使得 $a_{s+k}=a_{t+k}(k=0,1,2,3)$.

所以 A 不是 $4-$ 连续等项数列.

【小问 2 详解】

设集合 $S=\{(x,y)\mid x\in\{-1,0,1\},y\in\{-1,0,1\}\}$，则 S 中的元素个数为 $3^2=9$.

因为在数列 A 中 $a_i\in\{-1,0,1\}(i=1,2,\cdots,N)$，所以 $(a_i,a_{i+1})\in S(i=1,2,\cdots,N-1)$.

若 $N\geq 11$，则 $N-1\geq 10>9$.

所以在 $(a_1,a_2),(a_2,a_3),(a_3,a_4),\cdots,(a_{N-1},a_N)$ 这 $N-1$ 个有序数对中，

至少有两个有序数对相同，

即存在正整数 $s,t(s\neq t)$，使得 $a_s=a_t,a_{s+1}=a_{t+1}$.

所以当项数 $N\geq 11$ 时，数列 A 一定是 $2-$ 连续等项数列.

若 $N=3$，数列 $0,0,1$ 不是 $2-$ 连续等项数列.

若 $N=4$，数列 $0,0,1,1$ 不是 $2-$ 连续等项数列.

若 $N=5$，数列 $0,0,1,1,0$ 不是 $2-$ 连续等项数列.

若 $N=6$，数列 $0,0,1,1,0,-1$ 不是 $2-$ 连续等项数列.

若 $N=7$，数列 $0,0,1,1,0,-1,1$ 不是 $2-$ 连续等项数列.

若 $N=8$，数列 $0,0,1,1,0,-1,1,-1$ 不是 $2-$ 连续等项数列.

若 $N=9$，数列 $0,0,1,1,0,-1,1,-1,-1$ 不是 $2-$ 连续等项数列.

若 $N=10$,数列 $0,0,1,1,0,-1,1,-1,-1,0$ 不是 $2-$ 连续等项数列.

所以 N 的最小值为 11.

【小问 3 详解】

因为 A_1,A_2 与 A_3 都是 $4-$ 连续等项数列，

所以存在两两不等的正整数 $i,j,k(i,j,k<N-2)$，

使得 $a_i=a_{N-2},a_{i+1}=a_{N-1},a_{i+2}=a_N,a_{i+3}=-1$，

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

$a_j=a_{N-2},a_{j+1}=a_{N-1},a_{j+2}=a_N,a_{j+3}=0,$

$a_k=a_{N-2},a_{k+1}=a_{N-1},a_{k+2}=a_N,a_{k+3}=1.$

下面用反证法证明 $\min\{i,j,k\}=1.$

假设 $\min\{i,j,k\}>1$，

因为 $a_{i-1},a_{j-1},a_{k-1},a_{N-3}\in\{-1,0,1\}$，

所以 $a_{i-1},a_{j-1},a_{k-1},a_{N-3}$ 中至少有两个数相等.

不妨设 $a_{i-1}=a_{j-1}$，则 $a_{i-1}=a_{j-1},a_i=a_j,a_{i+1}=a_{j+1},a_{i+2}=a_{j+2}$，

所以 A 是 $4-$ 连续等项数列，与题设矛盾.

所以 $\min\{i,j,k\}=1.$

所以 $a_N=a_{i+2}=a_{j+2}=a_{k+2}=a_3=0$.

【点睛】方法点睛：对于新定义问题，一般先要读懂定义内容，第一问一般是给具体的函数或数列验证是否满足所给定义，只需要结合新定义，验证即可，在验证过程中进一步加强对新定义的理解，第二步一般在第一步强化理解的基础上，所给函数或数列更加一般或复杂，进一步利用新定义处理，本题第三问根据 A_1,A_2 与 A_3 都是 $4-$ 连续等项数列得出 $a_i=a_{N-2},a_{i+1}=a_{N-1},a_{i+2}=a_N,a_{i+3}=-1$，

$a_j=a_{N-2},a_{j+1}=a_{N-1},a_{j+2}=a_N,a_{j+3}=0,$ $a_k=a_{N-2},a_{k+1}=a_{N-1},a_{k+2}=a_N,a_{k+3}=1$，利用反证法求 $\min\{i,j,k\}=1$ 是关键点.

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！