

2022 北京西城高三（上）期末

数 学

2022.1

本试卷共6页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{x | -3 < x \leq 2\}$, $B = \{x | -2 < x \leq 3\}$, 则 $A \cup B =$

- (A) $(-3, 3]$ (B) $(-3, 3)$
(C) $(-3, 2]$ (D) $(-2, 2]$

(2) 在复平面内，复数 $z = (1 + 2i)i$ 对应的点位于

- (A) 第一象限 (B) 第二象限
(C) 第三象限 (D) 第四象限

(3) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $a = 2$, $b = 3$, $\cos(A + B) = \frac{1}{3}$, 则 $c =$

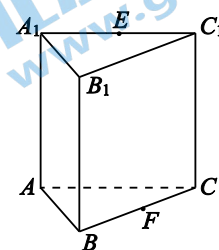
- (A) $\sqrt{17}$ (B) 4
(C) $\sqrt{15}$ (D) 3

(4) 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$, 则双曲线 C 的离心率为

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2

(5) 如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，点 E, F 分别是棱 A_1C_1, BC 的中点，则下列结论中不正确的是

- (A) $CC_1 \parallel$ 平面 A_1ABB_1
(B) $AF \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$
(C) $EF \parallel$ 平面 A_1ABB_1
(D) $AE \parallel$ 平面 B_1BCC_1



(6) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ 2^x - a, & x \geq 0 \end{cases}$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是

- (A) $a < 0$ (B) $a > 0$
(C) $a \leq 1$ (D) $a \geq 1$

(7) 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, S_n 为其前 n 项和, 若 $S_2 = 3a_1$, $a_2^2 = a_3$, 则 $S_4 =$

- (A) 7 (B) 8
(C) 15 (D) 31

(8) 已知函数 $f(x)$ 的图象在区间 $[0, 2]$ 上连续不断, 则“ $f(0)+f(1)+f(2)=0$ ”是“ $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上存在零点”的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

(9) 按照“碳达峰”、“碳中和”的实现路径, 2030 年为碳达峰时期, 2060 年实现碳中和, 到 2060 年, 纯电动汽车在整体汽车中的渗透率有望超过 70%, 新型动力电池迎来了蓬勃发展的风口. Peukert 于 1898 年提出蓄电池的容量 C

(单位: Ah), 放电时间 t (单位: h) 与放电电流 I (单位: A) 之间关系的经验公式: $C = I^n \cdot t$, 其中 n 为 Peukert 常数. 为了测算某蓄电池的 Peukert 常数 n , 在电池容量不变的条件下, 当放电电流 $I = 20\text{A}$ 时, 放电时间 $t = 20\text{h}$; 当放电电流 $I = 30\text{A}$ 时, 放电时间 $t = 10\text{h}$. 则该蓄电池的 Peukert 常数 n 大约为

(参考数据: $\lg 2 \approx 0.30, \lg 3 \approx 0.48$)

(A) $\frac{4}{3}$

(B) $\frac{5}{3}$

(C) $\frac{8}{3}$

(D) 2

(10) 设集合 A 的最大元素为 M , 最小元素为 m , 记 A 的特征值为 $X_A = M - m$, 若集合中只有一个元素, 规定其特征值为 0. 已知 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 是集合 $\mathbf{N}^*$ 的元素个数均不相同的非空真子集, 且

$X_{A_1} + X_{A_2} + X_{A_3} + \dots + X_{A_n} = 120$, 则 n 的最大值为

(A) 14

(B) 15

(C) 16

(D) 18

第二部分 (非选择题共110分)

二、填空题共5小题, 每小题5分, 共25分。

(11) 在 $(\sqrt{x} - \frac{2}{x})^6$ 的展开式中, 常数项为_____. (用数字作答)

(12) 已知点 $A(2, 4)$ 在抛物线 $C: y^2 = 2px$ 上, F 为抛物线 C 的焦点, O 为坐标原点. 则抛物线 C 的方程为_____; $\triangle AOF$ 的面积为_____.

(13) 在长方形 $ABCD$ 中, $|\overline{AB}| = 1$, $\overline{BE} = \frac{1}{3}\overline{BC}$, 且 $\overline{AB} \cdot \overline{AE} = \overline{AD} \cdot \overline{AE}$, 则 $|\overline{AD}| =$ _____, $\overline{AE} \cdot \overline{AC} =$ _____.

(14) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \cos(x + \theta), & x \geq 0, \\ \sin x, & x < 0 \end{cases}$ 是偶函数, 则 θ 的一个取值为_____.

(15) 在棱长为1的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 过点 A 的平面 α 分别与棱 BB_1, CC_1, DD_1 交于点 E, F, G , 记四边形 $AEFG$ 在平面 BCC_1B_1 上的正投影的面积为 S_1 , 四边形 $AEFG$ 在平面 ABB_1A_1 上的正投影的面积为 S_2 .

给出下面有四个结论:

① 四边形 $AEFG$ 是平行四边形;

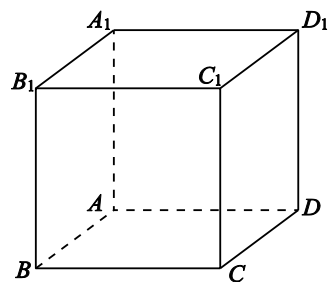
② $S_1 + S_2$ 的最大值为 2;

③ $S_1 S_2$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$;

④ 四边形 $AEFG$ 可以是菱形, 且菱形面积的最大值

为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

则其中所有正确结论的序号是_____.



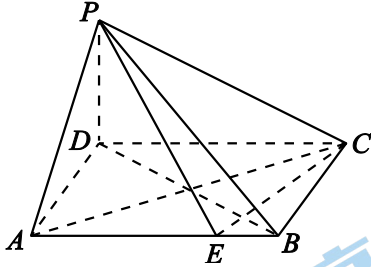
三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 13 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PD = AD = 2$ ， $AB = 4$ ，点 E 在线段 AB 上，且 $AE = \frac{3}{4}AB$ 。

(I) 求证： $CE \perp$ 平面 PBD ；

(II) 求二面角 $P-CE-A$ 的余弦值。



(17) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的部分图象如图所示，在条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知。

(I) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

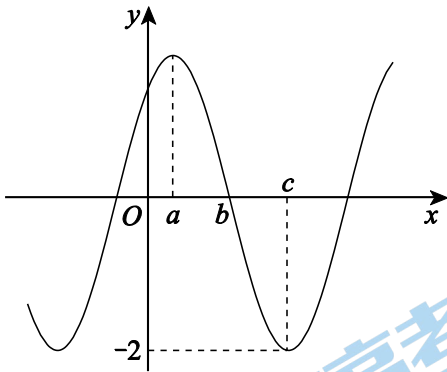
(II) 设函数 $g(x) = f(x) \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ ，若 $g(x)$ 在区间 $[0, m]$ 上单调递减，求 m 的最大值。

条件①： $c - a = \frac{\pi}{2}$ ；

条件②： $b = \frac{\pi}{3}$ ；

条件③： $c = \frac{7\pi}{12}$ 。

注：如果选择多个条件组合分别解答，则按第一个解答计分。



(18) (本小题 14 分)

2021 年 7 月 11 日 18 时, 中央气象台发布暴雨橙色预警, 这是中央气象台 2021 年首次发布暴雨橙色预警. 中央气象台预计, 7 月 11 日至 13 日, 华北地区将出现 2021 年以来的最强降雨.

下表是中央气象台 7 月 13 日 2:00 统计的 24 小时全国降雨量排在前十的区域.

北京密云	山东乐陵	河北迁西	山东庆云	北京怀柔	河北海兴	河北唐山	天津渤海 A 平台	河北丰南	山东长清
180 毫米	175 毫米	144 毫米	144 毫米	143 毫米	140 毫米	130 毫米	127 毫米	126 毫米	126 毫米

(I) 从这 10 个区域中随机选出 1 个区域, 求这个区域的降雨量超过 135 毫米的概率;

(II) 从这 10 个区域中随机选出 3 个区域, 设随机变量 X 表示选出的区域为北京区域的数量, 求 X 的分布列和期望;

(III) 在 7 月 13 日 2:00 统计的 24 小时全国降雨量排在前十的区域中, 设降雨量超过 140 毫米的区域降雨量的方差为 s_1^2 , 降雨量在 140 毫米或 140 毫米以下的区域降雨量的方差为 s_2^2 , 全部十个区域降雨量的方差为 s_3^2 . 试判断 s_1^2 , s_2^2 , s_3^2 的大小关系. (结论不要求证明)

(19) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = e^x(x^2 + ax + 1)$.

(I) 若 $a = 0$, 求 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 若 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上恰有一个极小值点, 求实数 a 的取值范围;

(III) 若对于任意 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) > e^x(x^2 \cos x + 1)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(20) (本小题 15 分)

已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦点为 $F(2, 0)$, 长轴长与短轴长的比值为 $\sqrt{2}$.

(I) 求椭圆 M 的方程;

(II) 过点 F 的直线 l 与椭圆 M 交于 A, B 两点, $BC \perp x$ 轴于点 C , $AD \perp x$ 轴于点 D , 直线 BD 交直线 $x = 4$ 于点 E , 求 $\triangle ECD$ 与 $\triangle EAB$ 的面积之比.

(21) (本小题 15 分)

已知数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_N$ ($N \geq 4$), 其中 $a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbf{Z}$, 且 $a_1 < a_2 < \dots < a_N$.

若数列 $\tilde{A}: \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_N$ 满足 $\tilde{a}_1 = a_1, \tilde{a}_N = a_N$, 当 $i = 2, 3, \dots, N-1$ 时, $\tilde{a}_i = a_{i-1} + 1$ 或 $a_{i+1} - 1$, 则称 $\tilde{A}: \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_N$ 为数列 A 的“紧数列”.

例如, 数列 $A: 2, 4, 6, 8$ 的所有“紧数列”为 $2, 3, 5, 8$; $2, 3, 7, 8$; $2, 5, 5, 8$; $2, 5, 7, 8$.

(I) 直接写出数列 $A: 1, 3, 6, 7, 8$ 的所有“紧数列” $\tilde{A}$;

(II) 已知数列 A 满足: $a_1 = 1, a_N = 2N$, 若数列 A 的所有“紧数列” $\tilde{A}$ 均为递增数列, 求证: 所有符合条件的数列 A 的个数为 $N+1$;

(III) 已知数列 A 满足: $a_1 = 0, a_2 = 2$, 对于数列 A 的一个“紧数列” $\tilde{A}$, 定义集合 $S(\tilde{A}) = \{a_i - \tilde{a}_i \mid i = 2, 3, \dots, N-1\}$, 如果对任意 $x \in S(\tilde{A})$, 都有 $-x \notin S(\tilde{A})$, 那么称 $\tilde{A}$ 为数列 A 的“强紧数列”. 若数列 A 存在“强紧数列”, 求 a_N 的最小值.
(用关于 N 的代数式表示)

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

- (1) A (2) B (3) A (4) C (5) D
 (6) D (7) C (8) A (9) B (10) C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

- (11) 60 (12) $y^2 = 8x$ (13) $\sqrt{3} 2$

- (14) $\frac{\pi}{2}$ （答案不唯一） (15) ①③④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

(16)（共 13 分）

解：(I) 因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $CE \subset$ 平面 $ABCD$ ，
 所以 $PD \perp CE$ 。

因为 $AB = 4$ ， $AE = \frac{3}{4}AB$ ，

所以 $AE = 3$ ， $BE = 1$ 。

所以 $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{BE} = 2$ 。

所以 $\text{Rt}\triangle CBE \sim \text{Rt}\triangle BAD$ ，

所以 $BD \perp CE$ 。

又因为 $PD \perp CE$ ， $PD \cap BD = D$ ，

所以 $CE \perp$ 平面 PBD 。

.....5 分

(II) 因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AD \subset$ 平面 $ABCD$ ， $CD \subset$ 平面 $ABCD$ ，
 所以 $PD \perp AD$ ， $PD \perp CD$ 。

又因为 $ABCD$ 是矩形， $AD \perp CD$ ，

所以 AD, CD, PD 两两垂直，如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$ ，

则 $C(0, 4, 0)$ ， $P(0, 0, 2)$ ， $E(2, 3, 0)$ ，

所以 $\overrightarrow{PC} = (0, 4, -2)$ ， $\overrightarrow{CE} = (2, -1, 0)$ 。

设平面 PCE 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ，则

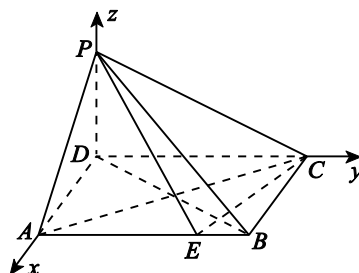
$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CE} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2x - y = 0, \\ 4y - 2z = 0. \end{cases}$$

令 $x = 1$ ，则 $y = 2$ ， $z = 4$ 。

于是 $\mathbf{n} = (1, 2, 4)$ 。

因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ，

取平面 ACE 的法向量为 $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$ 。



$$\text{则 } \cos\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{4}{1 \cdot \sqrt{1+4+16}} = \frac{4\sqrt{21}}{21}.$$

由图可知二面角 $P-CE-A$ 为锐角,

所以二面角 $P-CE-A$ 的余弦值是 $\frac{4\sqrt{21}}{21}$.

.....13分

(17) (共13分)

解: (I) 选条件①②:

因为 $c-a = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$, 即 $T = \pi$, 则 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$.

由题意可知 $A = 2$, 则 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$.

因为 $b = \frac{\pi}{3}$, $f(b) = 2\sin(\frac{2\pi}{3} + \varphi) = 0$,

所以 $\frac{2\pi}{3} + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi = -\frac{2\pi}{3} + k\pi$.

因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}, k = 1$.

所以 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$.

.....6分

选条件①③:

因为 $c-a = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$, 即 $T = \pi$, 则 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$.

由题意可知 $A = 2$, 则 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$.

因为 $c = \frac{7\pi}{12}$, $f(c) = 2\sin(\frac{7\pi}{6} + \varphi) = -2$,

所以 $\frac{7\pi}{6} + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}, k = 0$.

所以 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$.

.....6分

选条件②③:

因为 $b = \frac{\pi}{3}, c = \frac{7\pi}{12}$, 所以 $c-b = \frac{\pi}{4} = \frac{T}{4}$, 即 $T = \pi$, 则 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$.

由题意可知 $A = 2$, 则 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$.

因为 $c = \frac{7\pi}{12}$, $f(c) = 2\sin(\frac{7\pi}{6} + \varphi) = -2$,

所以 $\frac{7\pi}{6} + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}, k = 0$.

所以 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$6 分

(II) 由题意得 $g(x) = \sin(4x + \frac{2\pi}{3})$.

函数 $y = \sin x$ 的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi] (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{由 } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 4x + \frac{2\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\text{得 } -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}.$$

因为函数 $y = g(x)$ 在区间 $[0, m]$ 上单调递减, 且 $0 \in [-\frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}]$, 此时 $k = 0$.

所以 $m \leq \frac{5\pi}{24}$, 所以 m 的最大值是 $\frac{5\pi}{24}$13 分

(18) (共 14 分)

解: (I) 设这个区域降雨量在 135 毫米以上为事件 A,

区域降雨量在 135 毫米以上的区域共有 6 个, 所以 $P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

答: 这个区域降雨量在 135 毫米以上的概率为 $\frac{3}{5}$4 分

(II) 由题意分析可知 $X = 0, 1, 2$,

$$P(X = 0) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15},$$

$$P(X = 1) = \frac{C_8^2 C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15},$$

$$P(X = 2) = \frac{C_8^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}.$$

随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

所以随机变量 X 的数学期望为:

$$E(X) = 0 \times \frac{7}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{3}{5}. \text{11 分}$$

(III) $s_2^2 < s_1^2 < s_3^2$14 分

(19) (共 15 分)

解: (I) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = e^x(x^2 + 1)$, $f'(x) = e^x(x^2 + 2x + 1)$,

所以 $f'(0) = 1$, $f(0) = 1$,

所以切线方程为 $y = x + 1$4 分

(II) 由 $f(x) = e^x(x^2 + ax + 1)$, 得 $f'(x) = e^x[x^2 + (a+2)x + a + 1]$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -a-1$, $x_2 = -1$.

①若 $x_1 \leq x_2$, 则 $a \geq 0$, $f'(x) \geq 0$ 在 $(-1, 1)$ 上恒成立,

因此, $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增, 无极值, 不符合题意.

②若 $x_1 > x_2$, 则 $a < 0$, $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的情况如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, -a-1)$	$-a-1$	$(-a-1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

因此, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(-a-1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, -a-1)$ 上单调递减.

若 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上有且只有一个极小值点, 则需 $-1 < -a-1 < 1$,

所以 $-2 < a < 0$.

综上, a 的取值范围是 $(-2, 0)$9 分

(III) 因为 $e^x > 0$,

所以 $f(x) = e^x(x^2 + ax + 1) > e^x(x^2 \cos x + 1)$, 即 $x^2 + ax > x^2 \cos x$.

又因为 $x > 0$,

所以 $x^2 + ax > x^2 \cos x$, 即 $a > x \cos x - x$.

令 $g(x) = x \cos x - x$, 所以 $g'(x) = \cos x - x \sin x - 1 = (\cos x - 1) - x \sin x$.

因为 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, 所以 $\cos x - 1 < 0$,

又 $x \sin x > 0$, 所以 $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 为 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上减函数, 所以 $g(x) < g(0) = 0$, 所以 $a \geq 0$

综上, 实数 a 的取值范围为 $[0, +\infty)$15 分

(20) (共 15 分)

解: (I) 由题设, $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, 所以 $a^2 = 2b^2$.

又因为 $c = 2$, $a^2 = b^2 + c^2$, 所以 $2b^2 = b^2 + 4$.

解得 $b^2 = 4$, $a^2 = 8$.

所以椭圆 M 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$5 分

(II) 由题意可知, 直线 l 斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y = k(x-2)$.

由 $\begin{cases} y = k(x-2) \\ x^2 + 2y^2 = 8 \end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2 - 8k^2x + (8k^2-8) = 0$.

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{1+2k^2}$, $x_1x_2 = \frac{8k^2-8}{1+2k^2}$.

因为 $AD \perp x$ 轴, 所以 $D(x_1, 0)$.

直线 BD 方程为 $y = \frac{y_2}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, 所以 $E\left(4, \frac{y_2(4 - x_1)}{x_2 - x_1}\right)$.

因为 $BC \perp x$ 轴, 所以 $C(x_2, 0)$.

因为 $k_{AC} = \frac{y_1}{x_1 - x_2}$, $k_{EC} = \frac{y_2(4 - x_1)}{(x_2 - x_1)(4 - x_2)}$.

所以 $k_{EC} - k_{AC} = \frac{y_2(4 - x_1)}{(x_2 - x_1)(4 - x_2)} - \frac{y_1}{x_1 - x_2}$

$$= \frac{y_2(4 - x_1) + y_1(4 - x_2)}{(x_2 - x_1)(4 - x_2)}$$

$$= \frac{k(x_2 - 2)(4 - x_1) + k(x_1 - 2)(4 - x_2)}{(x_2 - x_1)(4 - x_2)}$$

$$= \frac{k}{(x_2 - x_1)(4 - x_2)} \cdot [6(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 - 16]$$

$$= \frac{2k}{(x_2 - x_1)(4 - x_2)} \cdot \left[\frac{24k^2}{1 + 2k^2} - \frac{8k^2 - 8}{1 + 2k^2} - 8\right]$$

$$= \frac{16k}{(x_2 - x_1)(4 - x_2)} \cdot \frac{3k^2 - k^2 + 1 - 1 - 2k^2}{1 + 2k^2}$$

$$= 0.$$

所以 C, A, E 三点共线.

因为 $BC \parallel AD$, 所以 $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABD}$,

所以 $S_{\triangle ECD} = S_{\triangle EAB}$,

所以 $S_{\triangle ECD} : S_{\triangle EAB} = 1 : 1$.

.....15 分

(21) (共 15 分)

解: (I) $\tilde{A}_1: 1, 2, 4, 7, 8$; $\tilde{A}_2: 1, 2, 6, 7, 8$; $\tilde{A}_3: 1, 5, 4, 7, 8$; $\tilde{A}_4: 1, 5, 6, 7, 8$.

.....5 分

(II) 依题意, 对任意 $i = 2, 3, \dots, N - 2$, 有 $\tilde{a}_i = a_{i-1} + 1$ 或 $a_{i+1} - 1$, $\tilde{a}_{i+1} = a_i + 1$ 或 $a_{i+2} - 1$,

因为 $\tilde{A}$ 均为递增数列, 所以有 $\tilde{a}_i < \tilde{a}_{i+1}$, 即同时满足:

$$a_{i-1} + 1 < a_i + 1 \text{ ①}, \quad a_{i+1} - 1 < a_{i+2} - 1 \text{ ②}, \quad a_{i-1} + 1 < a_{i+2} - 1 \text{ ③}, \quad a_{i+1} - 1 < a_i + 1 \text{ ④}.$$

因为 A 为递增数列, 因此①和②恒成立.

又因为 A 为整数数列, 对于③, $a_{i-1} + 1 \leq a_i < a_{i+1} \leq a_{i+2} - 1$ 也恒成立.

对于④, 一方面, 由 $a_{i+1} - 1 < a_i + 1$, 得 $a_{i+1} < a_i + 2$, 即 $a_{i+1} \leq a_i + 1$.

另一方面, $a_{i+1} \geq a_i + 1$,

所以 $a_{i+1} = a_i + 1 (i = 2, 3, \dots, N - 2)$,

即 A 从第 2 项到第 $N - 1$ 项是连续的正整数,

所以 $a_2 \geq a_1 + 1 = 2$, $a_{N-1} = a_2 + N - 3 \leq a_N - 1 = 2N - 1$, 因此 $2 \leq a_2 \leq N + 2$,

故 a_2 共有 $N + 1$ 种不同取值, 即所有符合条件的数列 A 共有 $N + 1$ 个.....10 分

(III) 记 $b_n = a_n - a_{n-1}$, 依题意, $b_n \in \mathbf{N}^* (n=2,3,\cdots,N)$.

对任意 $i=2,3,\cdots,N-1$, 有 $a_i - \tilde{a}_i = b_i - 1$ 或 $-b_{i+1} + 1$,

注意到 $0 \notin S(\tilde{A})$, 即对任意 $i \in \{2,3,\cdots,N-1\}$, 有 $a_i - \tilde{a}_i \neq 0$,

若 $a_i - \tilde{a}_i = b_i - 1 \neq 0$, 则 $b_i \neq 1$, 即 $b_i \geq 2$;

若 $a_i - \tilde{a}_i = -b_{i+1} + 1 \neq 0$, 则 $b_{i+1} \neq 1$, 即 $b_{i+1} \geq 2$,

即对任意 $i=2,3,\cdots,N-1$, 或者 $b_i \geq 2$, 或者 $b_{i+1} \geq 2$.

所以 $b_i + b_{i+1} \geq 3$, 所以 $b_i - 1 = -b_{i+1} + 1$ 不能成立.

记 $T_1 = \{i \mid a_i - \tilde{a}_i = b_i - 1, i=2,3,\cdots,N-1\}$,

$T_2 = \{i \mid a_i - \tilde{a}_i = -b_{i+1} + 1, i=2,3,\cdots,N-1\}$,

则 $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, 且 $T_1 \cup T_2 = \{2,3,\cdots,N-1\}$.

注意到: 若存在 $j \in T_2$ 且 $2 \leq j \leq N-2$, 即 $a_j - \tilde{a}_j = -b_{j+1} + 1$, 则 $j+1 \in T_2$.

否则, 若 $j+1 \in T_1$, 则 $a_{j+1} - \tilde{a}_{j+1} = b_{j+1} - 1 = -(-b_{j+1} + 1) = -(a_j - \tilde{a}_j)$, 不合题意.

因此集合 T_1, T_2 有以下三种情形:

① $T_1 = \{2,3,\cdots,N-1\}$, $T_2 = \emptyset$.

对任意 $i \in \{2,3,\cdots,N-1\}$, 有 $b_i \geq 2$, 则

$$a_N = a_1 + (b_2 + b_3 + \cdots + b_{N-1}) + b_N \geq 0 + (N-2) \cdot 2 + 1 = 2N-3,$$

当且仅当: $b_2 = b_3 = \cdots = b_{N-1} = 2$, $b_N = 1$,

即 $A: 0, 2, 4, \cdots, 2N-4, 2N-3$ 时, 等号成立,

此时存在“强紧数列” $\tilde{A}: 0, 1, 3, \cdots, 2N-3$,

故此情形下, a_N 的最小值为 $2N-3$;

② $T_1 = \{2,3,\cdots,k\}$, $T_2 = \{k+1, k+2, \cdots, N-1\}$, 其中 $k=2,3,\cdots,N-2$.

对任意 $i \in T_1$, 有 $b_i \geq 2$, 对任意 $j \in T_2$, 有 $b_{j+1} \geq 2$.

$$a_N = a_1 + (b_2 + b_3 + \cdots + b_k) + b_{k+1} + (b_{k+2} + b_{k+3} + \cdots + b_N) \geq 0 + (k-1) \cdot 2 + 1 + (N-k-1) \cdot 2 = 2N-3.$$

故此情形下, a_N 的最小值不小于 $2N-3$;

③ $T_1 = \emptyset$, $T_2 = \{2,3,\cdots,N-1\}$.

对任意 $i \in \{2,3,\cdots,N-1\}$, 有 $b_{i+1} \geq 2$,

$$a_N = a_1 + b_2 + (b_3 + b_4 + \cdots + b_N) \geq 0 + 2 + (N-2) \cdot 2 = 2N-2 > 2N-3.$$

故此情形下, a_N 的最小值不小于 $2N-3$.

综上, a_N 的最小值为 $2N-3$.

.....15分

北京高一高二高三期末试题下载

北京高考资讯整理了【2022年1月北京各区各年级期末试题&答案汇总】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【北京高考资讯】公众号，对话框回复【期末】或者底部栏目<试题下载→期末试题>，进入汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

