

2024 届高三一轮复习联考(二)

数学试题

注意事项:

- 1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。
- 2.回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟,满分 150 分

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.若复数 $z = (1+i^3)(i+i^2)$, 则 $\bar{z} =$

- A. $2i$ B. $-2i$ C. $2-i$ D. $2+i$

2.已知集合 $A = \{x | x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$, 集合 $B = \{x | x = 3n, n \in \mathbb{N}\}$, 则

- A. $A \cap B = \{x | x = 6n, n \in \mathbb{N}\}$ B. $A \cap B = \{0\}$
C. $A \cup B = \{x | x = 6n, n \in \mathbb{N}\}$ D. $A \cup B = \{x | x = n, n \in \mathbb{N}\}$

3.命题“ $\exists x_0 > 1, x_0 - 2\ln x_0 \leq 1$ ”的否定为

- A. $\forall x > 1, x - 2\ln x \leq 1$ B. $\exists x_0 \leq 1, x_0 - 2\ln x_0 > 1$
C. $\forall x > 1, x - 2\ln x > 1$ D. $\exists x_0 \leq 1, x_0 - 2\ln x_0 \leq 1$

4.已知函数 $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} + a$, 若 $f(-x) = -f(x)$, 则 a 的值为

- A. -1 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

5.已知函数 $f(x) = ae^x - x^2 + b$ 是增函数, 则实数 a 的最小值是

- A. $\frac{2}{e}$ B. 1 C. $\frac{1}{e}$ D. 2

6.已知 a, b 均为正数, 不等式 $4^a + 2^b \geq 8$ 成立是不等式 $ab \geq 2$ 成立的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 已知 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3}$, 若 $a = \frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta + 1}$, $b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta$, $c = \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta$, 则 a, b, c 的大小关系是

- A. $c > a > b$ B. $b > c > a$ C. $c > b > a$ D. $b > a > c$

8. 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆面积为 4π , 三边成等比数列, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为

- A. $3\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{3}$ C. 8 D. 4

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项

符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 若 (a, b) ($a > 0, a \neq 1$) 为函数 $y = \log_2 x$ 图象上的一点, 则下列选项正确的是

A. (b, a) 为函数 $y = 2^x$ 图象上的点

B. $\left(\frac{1}{a}, b\right)$ 为函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 图象上的点

C. $(-b, a)$ 为函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 图象上的点

D. $(a, 2b)$ 为函数 $y = \log_4 x$ 图象上的点

10. 已知方程 $x^2 + m = 0$ 有两个不相等的实数根 $\sin \theta, \cos \theta$, 其中 $0 \leq \theta < 2\pi$, 则下列选项正确的是

A. $\tan \theta = 1$

B. $\sin 2\theta = 1$

C. $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

D. $m = -\frac{1}{2}$

11. 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 公差 $d > 0$, 则下列对数列 $\{b_n\}$ 的判断正确的是

A. 若 $b_n = -a_n$, 则数列 $\{b_n\}$ 是递减数列

B. 若 $b_n = a_n^2$, 则数列 $\{b_n\}$ 是递增数列

C. 若 $b_n = a_n + a_{n+1}$, 则数列 $\{b_n\}$ 是公差为 d 的等差数列

D. 若 $b_n = a_n + n$, 则数列 $\{b_n\}$ 是公差为 $d+1$ 的等差数列

12. 已知函数 $f(x) = |\ln(2-x)| + |\ln(2+x)|$, 则下列判断正确的是

A. 函数 $f(x)$ 是偶函数

B. 函数 $f(x)$ 的最小值是 $\ln 3$

C. 函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称

D. 函数 $f(x)$ 有三个极值点

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $a = (2, x)$, $b = (-2x, -2)$, 且 a 与 b 方向相同, 则 $a \cdot b =$ _____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $\cos C = \frac{b}{2a}$, $\cos B = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则角 $A =$ _____.

15. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{S_4}{S_2} = 3$, 则 $\frac{a_4}{a_2} =$ _____.

16. 平面四边形 $ABCD$ 满足 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$, 则 $\tan \angle BAD$ 的值为 _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$, a_n 是 a_{n+1} 与 -1 的等差中项.

(1) 求证：数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列；

(2) 证明： $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} < 2$.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 把函数 $y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原

来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 然后再把所得到的图象上所有点向右平行移动 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到

函数 $y = g(x)$ 的图象.

(1) 求函数 $y = g(x)$ 的解析式;

(2) 求函数 $y = f(x) + g(x)$ 在 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

19. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $A = \frac{\pi}{6}$, $\sin^2 B - \sin^2 A = \sin A \sin C$.

(1) 判断 $\triangle ABC$ 的形状, 并给出证明;

(2) 若 $c = 2$, 点 D 在边 AC 上, 且 $\triangle ABD$ 的周长为 $\frac{7+3\sqrt{3}}{3}$, 求 $\triangle BCD$ 的周长.

20.(12分)已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_2=5$,其前 n 项和为 S_n ,满足 $S_n=\frac{(3+a_n)n}{2}$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)是否存在正整数 m,n ,使得 $\frac{1}{a_n}, \frac{1}{a_m}, \frac{1}{a_{3n+1}}$ 成等差数列?若存在,求出 m,n ;若不存在,请给出证明.

21.(12分)已知函数 $f(x)=x+\ln x, g(x)=e^x \ln x+a$,且函数 $f(x)$ 的零点是函数 $g(x)$ 的零点.

(1)求实数 a 的值;

(2)证明: $y=g(x)$ 有唯一零点.

22.(12分)已知函数 $f(x)=e^x[(a-1)x+1]$.

(1)当 $a=2$ 时,求函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2)对任意 $x \leq 0$,有 $f(x) \geq ax+1$,求实数 a 的取值范围.

数学参考答案及评分意见

- 1.B 【解析】 $z=(1+i^3)(i+i^2)=(1-i)(i-1)=2i$, 所以 $\bar{z}=-2i$, 故选 B.
- 2.A 【解析】 $A=\{x|x=2n, n\in\mathbf{N}\}=\{0,2,4,6,8,10,12,\dots\}$, $B=\{x|x=3n, n\in\mathbf{N}\}=\{0,3,6,9,12,15,\dots\}$, 所以 $A\cap B=\{0,6,12,18,\dots\}=\{x|x=6n, n\in\mathbf{N}\}$, 故选 A.
- 3.C 【解析】根据特称命题: $\exists x_0\in M, p(x_0)$ 的否定形式是全称命题: $\forall x\in M, \neg p(x)$, 可知“ $\exists x_0>1, x_0-2\ln x_0\leq 1$ ”的否定为“ $\forall x>1, x-2\ln x>1$ ”, 故选 C.
- 4.C 【解析】根据题意, 函数 $f(x)=\frac{1}{e^x-1}+a$, 其定义域为 $\{x|x\neq 0\}$. 由 $f(-x)=-f(x)$, 即 $\left(\frac{1}{e^{-x}-1}+a\right)+\left(\frac{1}{e^x-1}+a\right)=-1+2a=0$, 解得 $a=\frac{1}{2}$, 故选 C.
- 5.A 【解析】 $f'(x)=ae^x-2x$, 根据 $f(x)=ae^x-x^2+b$ 是增函数, 得 $f'(x)\geq 0$, 即 $ae^x-2x\geq 0, a\geq \frac{2x}{e^x}$, 令 $g(x)=\frac{2x}{e^x}$, 则 $g'(x)=\frac{2e^x(1-x)}{(e^x)^2}=\frac{2(1-x)}{e^x}$, 当 $x<1$ 时, $g'(x)>0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 是增函数, 当 $x>1$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 是减函数, $g(x)$ 有最大值 $g(1)=\frac{2}{e}$, 因此 $a\geq \frac{2}{e}$, 实数 a 的最小值是 $\frac{2}{e}$, 故选 A.
- 6.B 【解析】若 $ab\geq 2$, 则 $4^a+2^b\geq 2\sqrt{4^a\times 2^b}=2\sqrt{2^{2a}\times 2^b}=2\sqrt{2^{2a+b}}\geq 2\sqrt{2^{2\sqrt{2ab}}}\geq 2\sqrt{2^{2\sqrt{4}}}=8$, 当 $2a=b, ab=2$, 即 $a=1, b=2$ 时, 等号成立, 因此若不等式 $ab\geq 2$ 成立, 则不等式 $4^a+2^b\geq 8$ 成立; 反过来, 若 $4^a+2^b\geq 8$ 成立, 取 $a=2, b=\frac{1}{2}$, 但是 $ab=1$, 不等式 $ab\geq 2$ 不成立, 因此不等式 $4^a+2^b\geq 8$ 成立是不等式 $ab\geq 2$ 成立的必要不充分条件, 故选 B.
- 7.C 【解析】 $a=\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+1}=\sin\theta\cdot\cos\theta, b=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2\sin^2\theta)=\sin^2\theta=\sin\theta\cdot\sin\theta$, $\sin\theta, c=\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=\sin\theta\cdot\tan\theta$, 根据 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}$, 得 $\tan\theta>1, 1>\sin\theta>\cos\theta>0$, 即 $\tan\theta>\sin\theta>\cos\theta, \sin\theta\cdot\tan\theta>\sin\theta\cdot\sin\theta>\sin\theta\cdot\cos\theta$, 即 $c>b>a$, 故选 C.
- 8.A 【解析】 $\triangle ABC$ 的外接圆面积为 4π , 所以外接圆半径为 2, 不妨设三边 a, b, c 成等比数列, 则 $b^2=ac$. 又 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}\geq \frac{2ac-ac}{2ac}=\frac{1}{2}$, 当且仅当 $a=c$ 时等号成立, 所以 $0<B\leq \frac{\pi}{3}$, 又 $\frac{b}{\sin B}=4$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}b^2\sin B=8\sin^3 B\leq 8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=3\sqrt{3}$, 故选 A.
- 9.ABC 【解析】若 (a, b) 为函数 $y=\log_2 x$ 图象上的一点, 则 $b=\log_2 a, 2^b=a$. 由 $2^b=a$, 得 (b, a) 为函数 $y=2^x$ 图象上的点, 故 A 正确; 由 $2^b=a$, 得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-b}=2^b=a$, 所以 $(-b, a)$ 为函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 图象上的点, 故 C 正确; 由 $b=\log_2 a$, 得 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{a}=\log_2 a=b$, 所以 $\left(\frac{1}{a}, b\right)$ 为函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 图象上的点, 故 B 正确; 由 $b=\log_2 a$, 得 $\log_{\frac{1}{2}} a=-b$, 所以 $\left(a, \frac{b}{2}\right)$ 为函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 图象上的点, 故 D 不正确, 故选 ABC.
- 10.CD 【解析】 $x^2+m=0$ 有两个不等的实数根 $\sin\theta, \cos\theta$, 则 $\sin^2\theta+m=0, \cos^2\theta+m=0$, 根据 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,

得 $1+2m=0$, $m=-\frac{1}{2}$, 故 D 正确; 于是 $\sin^2\theta=\frac{1}{2}$, $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$, 因为 $\sin\theta\neq\cos\theta$, 所以 $\begin{cases} \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$

$\begin{cases} \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$ 于是 $\tan\theta=-1$, 故 A 不正确; $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-1$, 故 B 不正确; $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta+\cos\theta)=0$, 故 C 正确. 故选 CD.

11. AD 【解析】数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 公差 $d>0$, 则 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d$, 若 $b_n=-a_n$, 则 $b_n=-dn-a_1+d$, $-d<0$, 所以数列 $\{b_n\}$ 是递减数列, 故 A 正确; 若 $b_n=a_n^2$, 取 $a_n=n-3$, 即 $a_1=-2, a_2=-1, a_3=0, a_4=1, a_5=2, b_1=4, b_2=1, b_3=0, b_4=1, b_5=4, b_1>b_2>b_3<b_4<b_5$, 数列 $\{b_n\}$ 不是递增数列, 故 B 不正确; 若 $b_n=a_n+a_{n+1}$, 则 $b_n=a_1+(n-1)d+a_1+nd=2a_1+(2n-1)d, b_{n+1}-b_n=2a_1+(2n+1)d-2a_1-(2n-1)d=2d$, 数列 $\{b_n\}$ 是公差为 $2d$ 的等差数列, 故 C 不正确; 若 $b_n=a_n+n$, 则 $b_n=a_1+(n-1)d+n=a_1-d+(d+1)\cdot n, b_{n+1}-b_n=a_1-d+(d+1)(n+1)-[a_1-d+(d+1)n]=d+1$, 数列 $\{b_n\}$ 是公差为 $d+1$ 的等差数列, 故 D 正确. 故选 AD.

12. ABD 【解析】由 $\begin{cases} 2-x>0, \\ 2+x>0, \end{cases}$ 得 $-2<x<2$, 所以函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-2, 2)$. $f(-x)=|\ln(2+x)|+|\ln(2-x)|=|\ln(2-x)|+|\ln(2+x)|=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 选项 A 正确; 由于函数 $f(x)$ 是偶函数, 图象关于 y 轴对称, 所以考虑 $0<x<2$, 于是 $\ln(2+x)>0$, 当 $0<x<1$ 时, $\ln(2-x)>0, f(x)=\ln(2-x)+\ln(2+x)=\ln(4-x^2)$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 是减函数, 当 $1<x<2$ 时, $\ln(2-x)<0, f(x)=-\ln(2-x)+\ln(2+x)=\ln\frac{2+x}{2-x}=\ln\left(-1+\frac{4}{2-x}\right)$, $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 是增函数, 因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 时有最小值 $f(1)=\ln 3$, 选项 B 正确; $f(2-x)=|\ln(2-(2-x))|+|\ln(2+(2-x))|=|\ln x|+|\ln(4-x)|\neq f(x)$, 函数 $y=f(x)$ 的图象不关于直线 $x=1$ 对称, 选项 C 不正确; 由于函数 $f(x)$ 是偶函数, 根据其图象关于 y 轴对称, 可得 $f(x)$ 在 $(-2, -1)$ 是减函数, 在 $(-1, 0)$ 是增函数, 在 $(0, 1)$ 是减函数, 在 $(1, 2)$ 是增函数, 所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处有极小值, 在 $x=0$ 处有极大值, 在 $x=1$ 处有极小值, 因此 $f(x)$ 有三个极值点, 选项 D 正确. 故选 ABD.

13. $6\sqrt{2}$ 【解析】由向量 $a=(2, x), b=(-2x, -2)$, 且 a 与 b 方向相同, 得 $a=\lambda b$, 且 $\lambda>0$, 则 $\begin{cases} 2=-2x\lambda, \\ x=-2\lambda, \end{cases} x=-\sqrt{2}$, 于是 $a=(2, -\sqrt{2}), b=(2\sqrt{2}, -2), a\cdot b=6\sqrt{2}$.

14. $\frac{\pi}{12}$ 【解析】根据 $\cos C=\frac{b}{2a}$, 以及正弦定理, 得 $\cos C=\frac{\sin B}{2\sin A}$, 即 $2\sin A\cos C=\sin B$, 又 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$, 所以 $2\sin A\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C, \sin A\cos C-\cos A\sin C=0, \sin(A-C)=0, A=C$, 由 $\cos B=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $B=\frac{5}{6}\pi$, 所以 $A=\frac{\pi}{12}$.

15. 2 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 显然 $q\neq 1$, $\frac{S_4}{S_2}=\frac{\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}}=\frac{1-q^4}{1-q^2}=1+q^2=3$, 所以 $q^2=2, \frac{a_4}{a_2}=\frac{a_2q^2}{a_2}=q^2=2$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！



微信搜一搜



京考一点通