高 2023 届高三第二学期开学检测数学试题

2023.02.12

本试卷共 6 页，共 150 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效．

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，共 40 分）

1．已知集合 $A=\{x|x^2-x>0\}$，$B=\{x||x|>1\}$，则（　　）

A．$A\cup B=R$　　B．$A\cap B=\varnothing$　　C．$B\subseteq A$　　D．$A\subseteq B$

2．已知复数 z_1，z_2 满足：z_1 在复平面中对应的点为 $(-1,2)$，且 $|z_1\cdot z_2|=\sqrt{5}$，则 z_2 不可能是下列的（　　）

A．1　　B．$1+i$　　C．i　　D．$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

3．已知抛物线 C：$x^2=16y$，则 C 的焦点坐标为（　　）

A．(4，0)　　B．(0，4)　　C．(2，0)　　D．(0，2)

4．某人周一至周五每天 6:30 至 6:50 出发去上班，其中在 6:30 至 6:40 出发的概率为 0.4，在该时间段出发上班迟到的概率为 0.1；在 6:40 至 6:50 出发的概率为 0.6，在该时间段出发上班迟到的概率为 0.2，则小王某天在 6:30 至 6:50 出发上班迟到的概率为（　　）

A．0.3　　B．0.17　　C．0.16　　D．0.13

5．已知 α，β 为不重合的两个平面，直线 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，那么“$m\perp n$”是“$\alpha\perp\beta$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．在 ΔABC 中，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}^2=0$，则 ΔABC 的形状一定是（　　）

A．等边三角形　　B．直角三角形

C．等腰三角形　　D．等腰直角三角形

7．将函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 的图象沿 x 轴向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后，得到一个偶函数的图象，则 φ 的一个可能取值为（　　）

A．$-\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{3\pi}{8}$　　D．$\frac{3\pi}{4}$

8．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x<0\\ -\sqrt{x}, & x\geqslant 0\end{cases}$，若对任意的 $x\leqslant 1$ 有 $f(x+2m)+f(x)>0$ 恒成立，则实数的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-1)$　　B．$(-\infty,-1]$　　C．$(-\infty,-2)$　　D．$(-\infty,-2]$

9. 已知圆 C：$(x-6)^2+(y-8)^2=1$ 和两点 $A(0,-m)$，$B(0,m)$ （$m>0$）. 若圆 C 上存在点 P，使得 $\angle APB=90°$，则 m 的最大值为 （　　）

A. 12　　B. 11　　C. 10　　D. 9

10. 若函数 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$ $(|\varphi|<\pi)$ 在 $[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}]$ 上单调递增，则 φ 的取值范围为 （　　）

A. $[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}]$　　B. $[\pi,\frac{5\pi}{3}]$　　C. $[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}]$　　D. $(0,\frac{8\pi}{3})$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

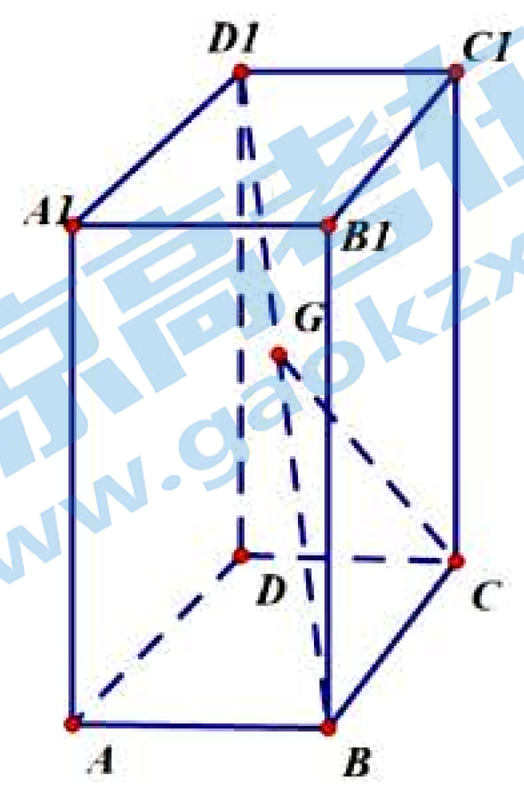
11. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，则该双曲线两条渐近线的夹角为____.

12. 已知 $a>1$，则当 $a=$______时 $a+\frac{4}{a-1}$ 取得最小值.

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)e^x, x<0,\\ e^x-2x^2, x\geq 0,\end{cases}$ 则函数 $f(x)$ 的零点个数为________.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 是满足 $a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n$，且 $a_2+a_5=12$，$a_3=5$，数列 $a_n=|b_n|$，且对任意 $i\in N^*$，$b_i\cdot b_{i+1}<0$，$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n$，则 T_{2023} 的值是________.

15. 在长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=\frac{1}{2}BC$，线段 BD_1 有一动点 G，过 CG 作平行于 DD_1 的平面交 BD 与点 F.



(1)当 G 是 BD 的中点时，直线 BD 与平面 CGF 所成角的余弦值为__________；

(2) 当直线 BD 与平面 CGF 所成角最大时，此时 $\frac{D_1G}{D_1B}=$______.

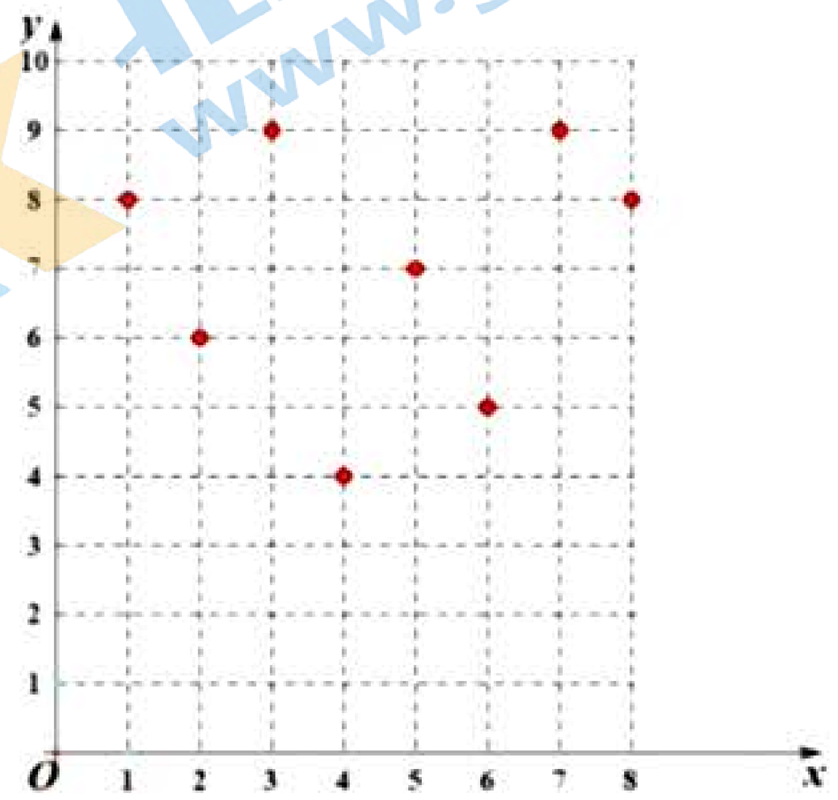
三、解答题共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. (本小题 13 分)设函数 $f(x)=m\sin 2x+2\cos^2 x-1$ $(m>0)$，$f(x)$ 的最小值为 -2，

(1)求 m；

(2)若函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6},a]$ 上的值域为 $[-1,2]$，求实数 a 的取值范围.

17．(本小题 14 分)为了解高三学生身体素质情况，对高一年级的(1)班～(8)班进行了抽测，采取如下方式抽样：每班随机各抽 10 名学生进行身体素质监测.经统计，每班 10 名学生中身体素质监测成绩达到优秀的人数散点图如下(x 轴表示对应的班号， y 轴表示对应的优秀人数)：



(1)若用散点图预测高一年级学生身体素质情况，从高三年级学生中任意抽测 1 人，求该生身体素质监测成绩达到优秀的概率；

(2)若从以上统计的高一（3）班的 10 名学生中抽出 2 人，设 X 表示 2 人中身体素质监测成绩达到优秀的人数，求 X 的分布列及其数学期望；

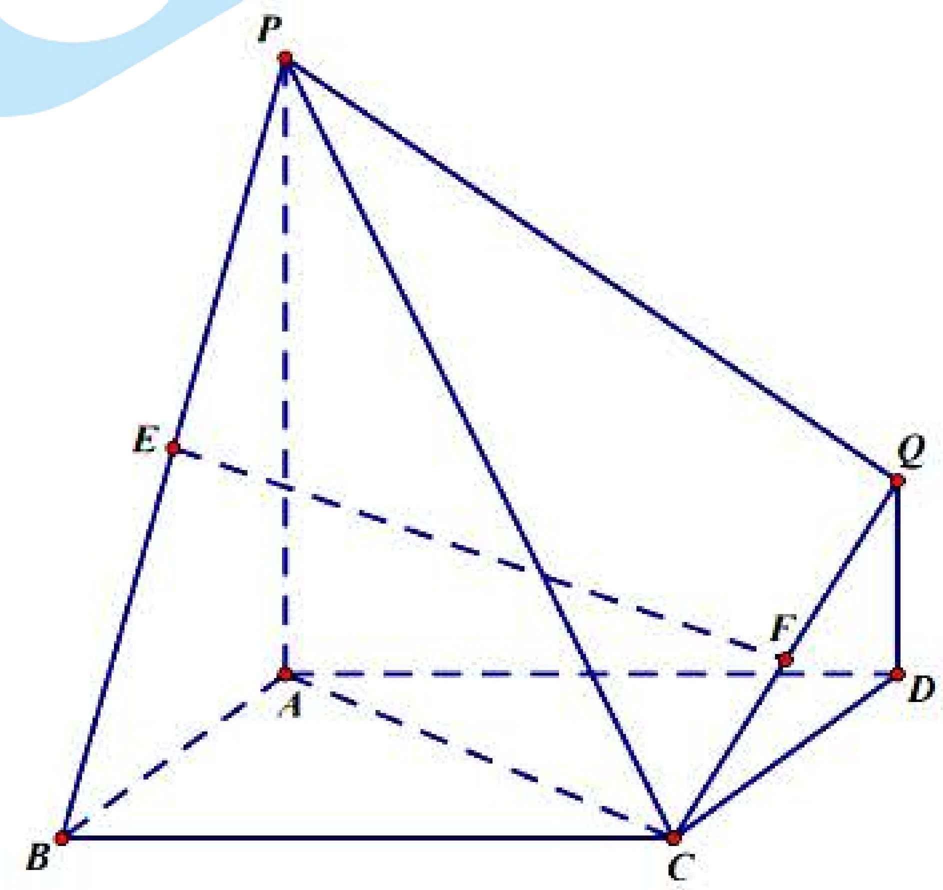
(3)假设每个班学生身体素质优秀的概率与该班随机抽到的 10 名学生的身体素质优秀率相等.现在从每班中分别随机抽取 1 名同学，用“$\xi_k=1$”表示第 k 班抽到的这名同学身体素质优秀，“$\xi_k=0$”表示第 k 班抽到的这名同学身体素质不是优秀(k=1，2，…，8)．写出方差 $D\xi_1$， $D\xi_2$， $D\xi_3$， $D\xi_4$ 的大小关系并说明理由.

18．(本小题 14 分) 已知底面 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$， $PA // DQ$，$PA=AD=3DQ=3$，$AB=2$，点 E、F 分别为线段 PB、CQ 的中点.

求证：(1) $EF //$ 面 $PADQ$；

(2)求二面角 $P—CQ—D$ 的余弦值；

(3)设点 M 是线段 AC 上一个动点，试确定 M 的位置，使得 $DM //$ 平面 PCQ，说明确定的理由.



19. (本小题 14 分)已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,1)$，且点 A 到椭圆两焦点距离之和为 $2\sqrt{2}$.

（I）求椭圆 E 的方程：

（II）过点 $P(-1,1)$ 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B、C，直线 AB、AC 分别与 x 轴交于点 M、N，当 $|MN|=2\sqrt{10}$ 时，求 k 的值.

20. (本小题 15 分)已知函数 $f(x)=\frac{x\ln x}{e^x}$， $g(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数.

(1)求 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程;

(2)求函数 $g(x)$ 的零点个数;

(3)若函数 $f(x)$ 在区间 $(e^{-a},+\infty)$ 上有最小值，其中 a 为正整数，求 a 的最小值.

21. (本小题 15 分)已知数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_N\ (N\geqslant 4)$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_N\in\mathbf{Z}$，且 $a_1<a_2<\cdots<a_N$.

若数列 $\tilde{A}:\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_N$ 满足 $\tilde{a}_1=a_1,\tilde{a}_N=a_N$，当 $i=2,3,\cdots,N-1$ 时， $\tilde{a}_i=a_{i-1}+1$ 或 $a_{i+1}-1$，则称 $\tilde{A}:\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_N$ 为数列 A 的“紧数列”.

例如，数列 A：2，4，6，8 的所有“紧数列”为：

2，3，5，8；　　2，3，7，8；　　2，5，5，8；　　2，5，7，8.

（I）直接写出数列 A：1，3，6，7，8 的所有“紧数列” $\tilde{A}$；

（II）已知数列 A 满足： $a_1=1$， $a_N=2N$，若数列 A 的所有“紧数列” $\tilde{A}$ 均为递增数列，

求证：所有符合条件的数列 A 的个数为 $N+1$；

（III）已知数列 A 满足： $a_1=0$， $a_2=2$，对于数列 A 的一个“紧数列” $\tilde{A}$，

定义集合 $S(\tilde{A})=\{a_i-\tilde{a}_i\mid i=2,3,\cdots,N-1\}$，如果对任意 $x\in S(\tilde{A})$，都有 $-x\notin S(\tilde{A})$，那么称 $\tilde{A}$ 为数列 A 的“强紧数列”. 若数列 A 存在“强紧数列”，求 a_N 的最小值(用关于 N 的代数式表示).

高 2023 届高三第二学期开学检测数学试题答案

1—10 CBBCD　BA(D)ABA

11．60°；12．3；13．3；14．±2023；15．$\frac{3}{5}$，$\frac{1}{5}$．

解析：（1）由题意 $f(x)=m\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{m^2+1}\sin(2x+\varphi)$，

因为 $x\in R$，所以 $\sqrt{m^2+1}=2$，且 $m>0$，所以 $m=\sqrt{3}$；　…………6 分

(2)由(1)知，$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，　…………7 分

若 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6},a]$ 上的值域为 $[-1,2]$，则 $\sin(2x+\frac{\pi}{6})\in[-\frac{1}{2},1]$　………8 分

因为 $x\in[-\frac{\pi}{6},a]$，所以 $2x+\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},2a+\frac{\pi}{6}]$．　………9 分

又因为 $\sin(-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$，$\sin\frac{\pi}{2}=1$，$\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2}$，

且 $y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 单调递增，在 $[\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6}]$ 上单调递减，　………11 分

当 $\sin(2x+\frac{\pi}{6})\in[-\frac{1}{2},1]$ 时，所以 $\frac{\pi}{2}\le 2a+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{6}$，即 $\frac{\pi}{6}\le a\le\frac{\pi}{2}$．

即实数 m 的取值范围是 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$．　…………13 分

17．解：（1）从高三年级(1)班～(8)班学生中抽测了 80 人，其中身体素质检测成绩优秀的人数有 $8+6+9+4+7+5+9+8=56$ 人，所以，优秀的概率是 $\frac{7}{10}$；　………………3 分

因为是随机抽样，所以用样本估计总体，可知从高一年级学生中任意抽测一人，该生身体素质检测成绩达到优秀的概率 $\frac{7}{10}$；　………………4 分

（2）因为高三(3)班抽出的 10 名同学中，身体素质监测成绩达到优秀的人数有 9 人，不优秀的有 1 人，所以从中抽出 2 人，X 的可能取值为 $1,2$　………………6 分

$X=1$ 表示抽出的 2 人中优秀的人数为 1 个，$P(X=1)=\frac{C_9^1C_1^1}{C_{10}^2}=\frac{1}{5}$，

$X=2$ 表示抽出的 2 人中优秀的人数为 2 个，$P(X=2)=\frac{C_9^2}{C_{10}^2}=\frac{4}{5}$，　……………9 分

所以 X 的分布列为

X	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$

数学期望 $EX=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$　………………11 分

（3）$D\xi_4=D\xi_2>D\xi_1>D\xi_3$

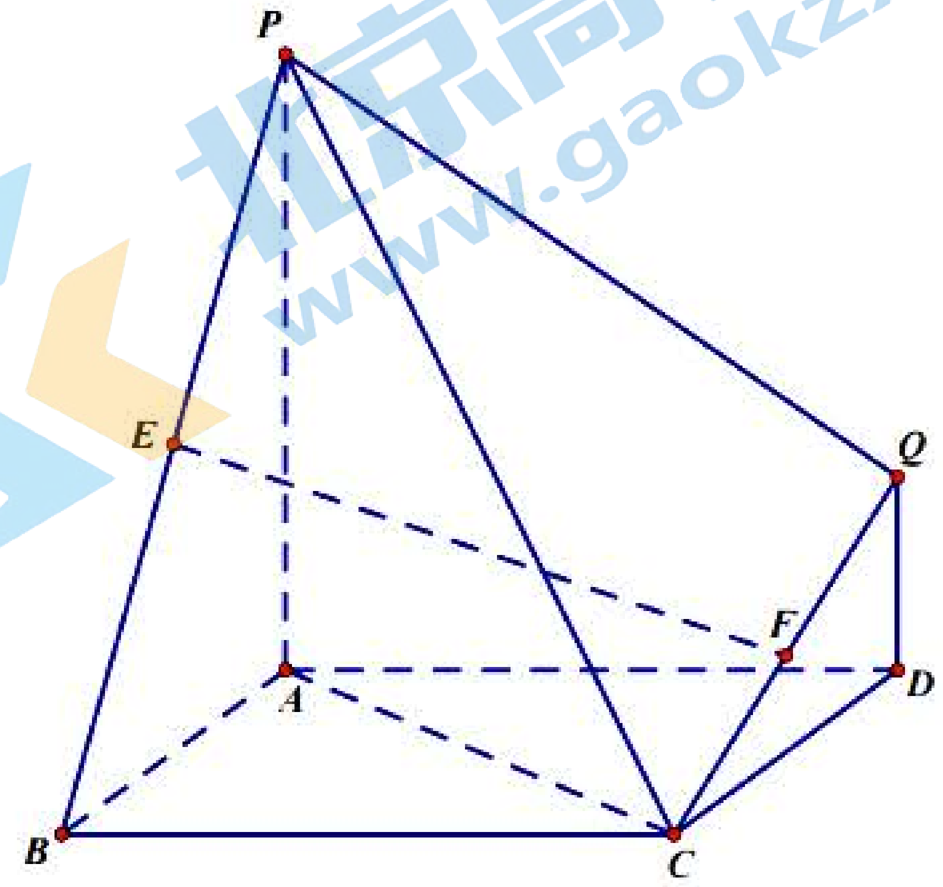
$D\xi=P(1-P)$，由二次函数性质，结合函数单调性和对称性，

$P_1=0.8,P_2=0.6,P_3=0.9,P_4=0.4$，　………………14 分

18．解析：(1)证明：取 PA、DQ 的中点为 M、N，连接 ME、MN、NF，

∵在△PAB 中，ME 为中位线，　　∴$ME \parallel AB$，$ME=\frac{1}{2}AB$，

同理：$NF \parallel CD$，　$NF=\frac{1}{2}CD$，



又∵在矩形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$AB=CD$，

∴$ME \parallel NF$，　$ME=NF$，

∴四边形 $MEFN$ 为平行四边形

∴$EF \parallel MN$，

又∵$EF \not\subset$ 平面 $PADQ$，$MN \subset$ 平面 $PADQ$，

∴$EF \parallel$ 平面 $PADQ$；　　…………………4 分

(2) ∵$PA\perp$ 平面 $ABCD$，AB、$AD \subset$ 平面 $ABCD$，

∴$PA\perp AB$，$PA\perp AD$，

在矩形 $ABCD$ 中，$AB\perp CD$，如图，建立空间直角坐标系 A—xyz，

$A(0,0,0)$，$P(0,0,3)$，$B(2,0,0)$，$C(2,3,0)$，$D(0,3,0)$，$Q(0,3,1)$，

$\overrightarrow{CQ}=(-2,0,1)$，$\overrightarrow{PQ}=(0,3,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,3,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,3,0)$

设面 PCQ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

$$\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{CQ}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{PQ}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CQ}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+z=0\\ 3y-2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}z\\ y=\dfrac{2}{3}z\end{cases}$$

令 $z=6$，则 $\vec{n}=(3,4,6)$，

∵$PA \parallel DQ$，$AB \parallel CD$，　$PA\cap AB=A$，$DQ\cap CD=D$，　　∴平面 $PAB \parallel$ 平面 CDQ，

∴平面 CDQ 的法向量为 $\vec{m}=(0,1,0)$

$$\therefore\cos(\vec{n},\vec{m})=\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\frac{4}{\sqrt{61}\times 1}=\frac{4\sqrt{61}}{61}$$

∴二面角 P—CQ—D 的余弦值为 $-\dfrac{4\sqrt{61}}{61}$；　　…………………10 分

(3)设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC}=(2\lambda,3\lambda,0)$，则 $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}=(-2\lambda,3-3\lambda,0)$，

∵$DM \parallel$ 平面 PCQ，∴ $\overrightarrow{DM}\perp\vec{n}$，

$\therefore\overrightarrow{DM}\cdot\vec{n}=-6\lambda+4(3-3\lambda)=0$，$\therefore\lambda=\dfrac{2}{3}$，

∴M 是线段 AC 的三等分点，靠近点 C．　　…………………14 分

19．解析：（1）由已知 $b=1, 2a=2\sqrt{2}, \therefore a=\sqrt{2}$，$E:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$；　　…………………5 分

(2)设直线 $y=k(x+1)+1$，$B=(x_1,y_1)$　$C:(x_2,y_2)$

联立 $\begin{cases}y=k(x+1)+1\\ x^2+2y^2=2\end{cases}\Rightarrow(2k^2+1)x^2+(4k^2+4k)x+(2k^2+4k)=0$

由 $\Delta=8k^2-16k>0$ 得 $k<0$ 或 $k>2$，

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{4k^2+4k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2+4k}{2k^2+1}$

由 ABM 共线得 $M:(\dfrac{x_1}{1-y_1},0),N:(\dfrac{x_2}{1-y_2},0)$

由 $|MN|=2\sqrt{10}$ 得 $\left|\left(\dfrac{x_1}{1-y_1}-\dfrac{x_2}{1-y_2}\right)\right|=2\sqrt{10}$

即 $\left|\dfrac{x_1-x_2}{k(x_1+x_2)+kx_1x_2+k}\right|=2\sqrt{10}$，即 $\left|\dfrac{\sqrt{8k^2-16k}}{k}\right|=2\sqrt{10}$，解得 $k=-\dfrac{1}{2}$，符合 $\Delta>0$，

所以 k 的值为 $-\dfrac{1}{2}$． ……………………14 分

20．解析：（1）解：$f(1)=0$，$f'(x)=\dfrac{(\ln x+1)\cdot e^x-x\ln x\cdot e^x}{e^{2x}}=\dfrac{\ln x+1-x\ln x}{e^x}$，$f'(1)=\dfrac{1}{e}$，

$f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为：$y=\dfrac{1}{e}(x-1)$； ……………………4 分

(2) $g(x)=f'(x)=\dfrac{(\ln x+1)\cdot e^x-x\ln x\cdot e^x}{e^{2x}}=\dfrac{\ln x+1-x\ln x}{e^x}$

设 $h(x)=\ln x(1-x)+1$，则 $h(x)$ 与 $g(x)$ 正负相同，

$h'(x)=\dfrac{1}{x}-1-\ln x=\dfrac{1-x}{x}-\ln x$

$x>1$ 时 $\dfrac{1-x}{x}<0,\ln x>0\ \therefore h'(x)<0$，$0<x<1$ 时 $\dfrac{1-x}{x}>0,\ln x<0\ \therefore h'(x)>0$，

则 $h(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,\ \infty)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	↑	极大值	↓

又 $h(1)=1>0$，$h\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=-2\left(1-\dfrac{1}{e^2}\right)+1=\dfrac{2}{e^2}-1<0$，$h(e)=2-e<0$

由零点存在定理知 $h(x)$ 有两个两个零点，即函数 $g(x)$ 的有两个零点；……………10 分

(3)由（2）可知 $g(x)$ 有两个零点，设为 x_1,x_2，有 $\dfrac{1}{e^2}<x_1<1<x_2<e$，结合 $g(x)$ 的单调性有

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↓	极小值	↑	极大值	↓

又 $f(1)=0,\therefore f(x_1)<0$，又 $x>1$ 时，$f(x)>0$，得函数 $f(x)$ 在区间 $\left(e^{-a},+\infty\right)$ 上有最小值等价于 $e^{-a}<x_1$，$g\left(\dfrac{1}{e}\right)>0$ 知 $\dfrac{1}{e^2}<x_1<\dfrac{1}{e}$，即 $e^{-2}<x_1<e^{-1}$，故 $-a\le-2$，即 $a\ge2$． ………15 分

21．解析：（I）$\tilde{A}_1:1,2,4,7,8$；$\tilde{A}_2:1,2,6,7,8$；$\tilde{A}_3:1,5,4,7,8$；$\tilde{A}_4:1,5,6,7,8$． ………………4 分

（II）依题意，对任意 $i=2,3,\cdots,N-2$，有 $\tilde{a}_i=a_{i-1}+1$ 或 $a_{i+1}-1$，$\tilde{a}_{i+1}=a_i+1$ 或 $a_{i+2}-1$，

因为 $\tilde{A}$ 均为递增数列，所以有 $\tilde{a}_i<\tilde{a}_{i+1}$，即同时满足：

$a_{i-1}+1<a_i+1$①，$a_{i+1}-1<a_{i+2}-1$②，$a_{i-1}+1<a_{i+2}-1$③，$a_{i+1}-1<a_i+1$④.

因为 A 为递增数列，因此①和②恒成立.

又因为 A 为整数数列，对于③，$a_{i-1}+1\leqslant a_i<a_{i+1}\leqslant a_{i+2}-1$ 也恒成立.

对于④，一方面，由 $a_{i+1}-1<a_i+1$，得 $a_{i+1}<a_i+2$，即 $a_{i+1}\leqslant a_i+1$.

另一方面，$a_{i+1}\geqslant a_i+1$， 所以 $a_{i+1}=a_i+1\,(i=2,3,\cdots,N-2)$，

即 A 从第 2 项到第 $N-1$ 项是连续的正整数，

所以 $a_2\geqslant a_1+1=2$，$a_{N-1}=a_2+N-3\leqslant a_N-1=2N-1$，因此 $2\leqslant a_2\leqslant N+2$，

故 a_2 共有 $N+1$ 种不同取值，即所有符合条件的数列 A 共有 $N+1$ 个. ………………9 分

（III）记 $b_n=a_n-a_{n-1}$，依题意，$b_n\in\mathbf{N}^*\ (n=2,3,\cdots,N)$.

对任意 $i=2,3,\cdots,N-1$，有 $a_i-\tilde{a}_i=b_i-1$ 或 $-b_{i+1}+1$，

注意到 $0\notin S(\tilde{A})$，即对任意 $i\in\{2,3,\cdots,N-1\}$，有 $a_i-\tilde{a}_i\neq 0$，

若 $a_i-\tilde{a}_i=b_i-1\neq 0$，则 $b_i\neq 1$，即 $b_i\geqslant 2$；

若 $a_i-\tilde{a}_i=-b_{i+1}+1\neq 0$，则 $b_{i+1}\neq 1$，即 $b_{i+1}\geqslant 2$，

即对任意 $i=2,3,\cdots,N-1$，或者 $b_i\geqslant 2$，或者 $b_{i+1}\geqslant 2$.

所以 $b_i+b_{i+1}\geqslant 3$，所以 $b_i-1=-b_{i+1}+1$ 不能成立.

记 $T_1=\{i\,|\,a_i-\tilde{a}_i=b_i-1, i=2,3,\cdots,N-1\}$，$T_2=\{i\,|\,a_i-\tilde{a}_i=-b_{i+1}+1, i=2,3,\cdots,N-1\}$，

则 $T_1\cap T_2=\varnothing$，且 $T_1\cup T_2=\{2,3,\cdots,N-1\}$.

注意到：若存在 $j\in T_2$ 且 $2\leqslant j\leqslant N-2$，即 $a_j-\tilde{a}_j=-b_{j+1}+1$，则 $j+1\in T_2$.

否则，若 $j+1\in T_1$，则 $a_{j+1}-\tilde{a}_{j+1}=b_{j+1}-1=-(-b_{j+1}+1)=-(a_j-\tilde{a}_j)$，不合题意.

因此集合 T_1,T_2 有以下三种情形:

① $T_1=\{2,3,\cdots,N-1\}$，$T_2=\varnothing$.

对任意 $i\in\{2,3,\cdots,N-1\}$，有 $b_i\geqslant 2$，

则 $a_N=a_1+(b_2+b_3+\cdots+b_{N-1})+b_N\geqslant 0+(N-2)\cdot 2+1=2N-3$，

当且仅当：$b_2=b_3=\cdots=b_{N-1}=2$，$b_N=1$，即 $A:0,2,4,\cdots,2N-4,2N-3$ 时，等号成立，

此时存在“强紧数列” $\tilde{A}:0,1,3,\cdots,2N-3$，故此情形下，$a_N$ 的最小值为 $2N-3$；

② $T_1=\{2,3,\cdots,k\}$，$T_2=\{k+1,k+2,\cdots,N-1\}$，其中 $k=2,3,\cdots,N-2$.

对任意 $i\in T_1$，有 $b_i\geqslant 2$，对任意 $j\in T_2$，有 $b_{j+1}\geqslant 2$.

$a_N=a_1+(b_2+b_3+\cdots+b_k)+b_{k+1}+(b_{k+2}+b_{k+3}\cdots+b_N)\quad\geqslant 0+(k-1)\cdot 2+1+(N-k-1)\cdot 2=2N-3$.

故此情形下，a_N 的最小值不小于 $2N-3$；

③ $T_1=\varnothing$，$T_2=\{2,3,\cdots,N-1\}$.

对任意 $i\in\{2,3,\cdots,N-1\}$，有 $b_{i+1}\geqslant 2$，

$a_N=a_1+b_2+(b_3+b_4\cdots+b_N)\geqslant 0+2+(N-2)\cdot 2=2N-2>2N-3$.

故此情形下，a_N 的最小值不小于 $2N-3$.

综上，a_N 的最小值为 $2N-3$. ………………15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。