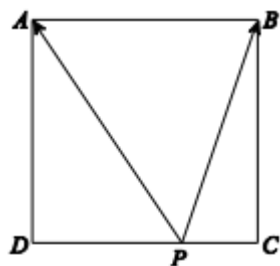


2022 北京西城高一（下）期末

数 学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

- (4 分) 在复平面内，复数 $z = i + i^2$ 对应的点在()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- (4 分) 设向量 $\vec{a} = (3, 1)$ ， $\vec{b} = (-1, 2)$ ，则 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{b} =$ ()
A. -11 B. -9 C. -7 D. -5
- (4 分) 设 m ， n 为两条直线， α ， β 为两个平面. 若 $\alpha \parallel \beta$ ， $m \parallel n$ ， $m \perp \alpha$ ，则()
A. $n \parallel \beta$ B. $n \perp \beta$
C. $m \parallel \beta$ D. 以上答案都不对
- (4 分) 若 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ，则 $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) =$ ()
A. $\frac{3}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$
- (4 分) 函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ ， $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 的最大值和最小值分别为()
A. 1，-1 B. $\frac{1}{2}$ ， $-\frac{1}{2}$ C. 1， $\frac{1}{2}$ D. 1， $-\frac{1}{2}$
- (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $a^2 + b^2 - c^2 = kab$ ，则实数 k 的取值范围是()
A. $(-2, 2)$ B. $(-1, 1)$ C. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ D. $(0, 1)$
- (4 分) 已知向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 4$ ， $|\vec{b}| = 2$ ， $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$ ，那么向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的夹角为()
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$
- (4 分) 函数 $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{\sin x}$ 的图像()
A. 关于原点对称 B. 关于 y 轴对称
C. 关于直线 $x = \pi$ 对称 D. 关于点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 对称
- (4 分) 设 $\alpha \in (-\pi, \pi)$ ，则“ $\alpha \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ ”是“ $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$ ”的()
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
- (4 分) 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 2， P 为正方形 $ABCD$ 四条边上的一个动点，则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围是()



- A. $[-1, 2]$ B. $[0, 2]$ C. $[0, 4]$ D. $[-1, 4]$

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. (5 分) 设复数 z 满足 $z \cdot i = 1 - i$ ，则 $|z| = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. (5 分) 在 $\triangle ABC$ 中， $a = 3$ ， $A = \frac{\pi}{3}$ ， $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. (5 分) 已知长、宽、高分别为 3, 4, 5 的长方体的八个顶点均在一个球的表面上，那么该球的表面积等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. (5 分) 在直角 $\triangle ABC$ 中，斜边 $AB = 4$ ，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. (5 分) 已知 a 为常数， $\theta \in [0, 2\pi)$ ，关于 θ 的方程 $\sin^2 \theta - \cos \theta + a = 0$ 有以下四个结论：

- ① 当 $a = 0$ 时，方程有 2 个实数根；
- ② 存在实数 a ，使得方程有 4 个实数根；
- ③ 使得方程有实数根的 a 的取值范围是 $[-1, 1]$ ；
- ④ 如果方程共有 n 个实数根，记 n 的取值集合为 M ，那么 $1 \in M$ ， $3 \in M$.

其中，所有正确结论的序号是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. (13 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，角 θ 以 Ox 为始边，终边经过点 $(-1, -2)$.

(I) 求 $\tan 2\theta$ 的值；

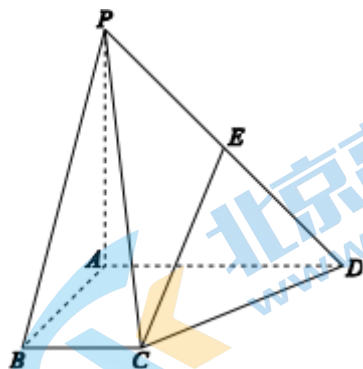
(II) 求 $\cos(\theta + \frac{\pi}{4})$ 的值.

17. (14 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AD \parallel BC$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $AD = 2BC$ ， E 为 PD 的中点.

(I) 若 $PA = AD = AB = 2$ ，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积；

(II) 求证： $BC \perp$ 平面 PAB ；

(III) 求证： $EC \parallel$ 平面 PAB .



18. (13 分) 在 $\triangle ABC$ 中， $b = 2\sqrt{7}$ ， $B = \frac{2\pi}{3}$ ，从① $c = 2a$ ；② $\sin A = \frac{\sqrt{21}}{14}$ ；③ $a = 2$ 这三个条件中任选一个作为题

目的已知条件.

(I) 求 $\sin C$ 的值;

(II) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (15 分) 已知函数 $f(x) = 2\cos x \cdot \sin(x + \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

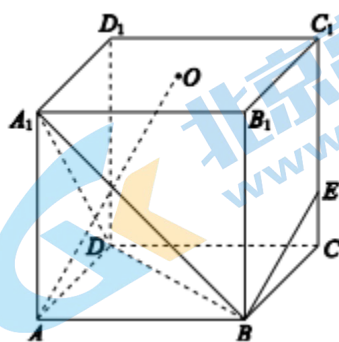
(II) 设 $a > 0$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, a)$ 上单调递增, 求 a 的最大值.

20. (15 分) 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2$, O 为上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心.

(I) 求证: $AO \perp BD$;

(II) 求点 A 到平面 A_1BD 的距离;

(III) 判断棱 CC_1 上是否存在一点 E , 使得 $AO \parallel BE$? 并说明理由.



21. (15 分) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1, a^2]$, 其中常数 $a > 1$. 若存在常数 $T > 0$, 使得对任意的 $x \in [1, a]$, 都有 $f(ax) = T \cdot f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 具有性质 P .

(I) 当 $x \in [1, 100]$ 时, 判断函数 $y = x^2$ 和 $y = \cos x$ 是否具有性质 P ? (结论不要求证明)

(II) 若 $a = 3$, 函数 $f(x)$ 具有性质 P , 且当 $x \in [1, 3]$ 时, $f(x) = \sin(\frac{\pi}{6}x)$, 求不等式 $f(x) > \sqrt{3}$ 的解集;

(III) 已知函数 $f(x)$ 具有性质 P , $f(1) = 0$, 且 $f(x)$ 的图像是轴对称图形. 若 $f(x)$ 在 $[1, a]$ 上有最大值 $A (A > 0)$, 且存在 $x_0 \in [a + \frac{1}{a} - 1, a]$ 使得 $f(x_0) = A$, 求证: 其对应的 $T = 1$.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 【分析】根据已知条件，结合复数的乘法原则和复数的几何意义，即可求解。

【解答】解： $z = i + i^2 = -1 + i$ 对应的点 $(-1, 1)$ 位于第二象限。

故选：B.

【点评】本题考查了复数的几何意义，以及复数代数形式的乘法运算，需要学生熟练掌握公式，属于基础题。

2. 【分析】利用向量坐标运算求 $\vec{a} - 2\vec{b}$ 坐标，再由数量积的坐标运算求 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{b}$.

【解答】解：由题设， $\vec{a} - 2\vec{b} = (5, -3)$,

所以 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{b} = 5 \times (-1) + (-3) \times 2 = -11$.

故选：A.

【点评】本题主要考查了平面向量数量积的坐标运算，属于基础题。

3. 【分析】由空间中的线面关系判断即可。

【解答】解： $\because m // n, m \perp \alpha, \therefore n \perp \alpha$,

又 $\alpha // \beta, \therefore n \perp \beta$.

故选：B.

【点评】本题考查了空间中的线面关系，属于基础题。

4. 【分析】由诱导公式直接求解即可。

【解答】解：因为 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, 所以 $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

故选：B.

【点评】本题考查诱导公式的应用，属基础题。

5. 【分析】由已知可得 $2x + \frac{\pi}{6}$ 的取值范围，从而由正弦函数的性质得出函数 $y = f(x)$ 的最大值和最小值。

【解答】解：因为 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

所以 $2x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$,

所以当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时， $f(x)$ 的最大值为 1,

当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$, 即 $x = \frac{\pi}{2}$ 时， $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$.

即 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 的最大值和最小值分别为 1, $-\frac{1}{2}$.

故选：D.

【点评】本题主要考查正弦函数的图象及性质，考查了函数思想，属于基础题。

6. 【分析】利用余弦定理和三角函数的取值范围即可得出 k 的取值范围。

【解答】解： $\because a^2 + b^2 - c^2 = kab$,

$$\therefore \cos A = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{kab}{2ab} = \frac{k}{2}.$$

$\because 0 < A < \pi$, $\therefore -1 < \cos A < 1$, 解得 $-2 < k < 2$.

故实数 k 的取值范围是 $(-2, 2)$.

故选: A.

【点评】本题考查了余弦定理和三角函数的取值范围, 属基础题.

7. 【分析】利用已知条件求出 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, 再利用向量的夹角公式即可求解.

【解答】解: 因为 $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$,

$$\text{所以 } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a} \cdot \vec{b} + 4 = 0,$$

$$\text{所以 } \vec{a} \cdot \vec{b} = -4,$$

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-4}{4 \times 2} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{又 } \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in [0, \pi],$$

$$\text{所以 } \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{2\pi}{3}.$$

故选: C.

【点评】本题主要考查两向量夹角的求法, 考查向量垂直的性质, 考查运算求解能力, 属于基础题.

8. 【分析】运用二倍角的余弦公式化简函数得 $f(x) = 2\sin x$, 可得函数为奇函数, 可判断 AB , 求得对称轴与对称中心可判断 CD .

$$\text{【解答】解: } f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{\sin x} = \frac{1 - (1 - 2\sin^2 x)}{\sin x} = \frac{2\sin^2 x}{\sin x} = 2\sin x,$$

$$\therefore f(-x) = 2\sin(-x) = -2\sin x = -f(x),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为奇函数, 故图象关于原点对称, 故 A 正确, B 错误,

函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, 故 C 错误;

函数 $f(x)$ 的对称中心为 $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, 故 D 错误;

故选: A.

【点评】本题考查二倍角的余弦公式, 以及函数的奇偶性, 对称轴与对称中心, 属基础题.

9. 【分析】 $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$, 结合正弦型函数的性质, 以及充分、必要条件的定义, 即可求解.

$$\text{【解答】解: } \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}),$$

当 $\alpha \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 时, 则 $\alpha + \frac{\pi}{4} \in (0, \pi)$, 此时 $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$, 充分性成立,

当 $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$, 则 $\alpha + \frac{\pi}{4} \in [2k\pi, 2k\pi + \pi]$ 且 $k \in \mathbb{Z}$, 即 $\alpha \in [2k\pi - \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3\pi}{4}]$ 且 $k \in \mathbb{Z}$,

$$\therefore \alpha \in (-\pi, \pi),$$

$\therefore \alpha \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, 必要性成立,

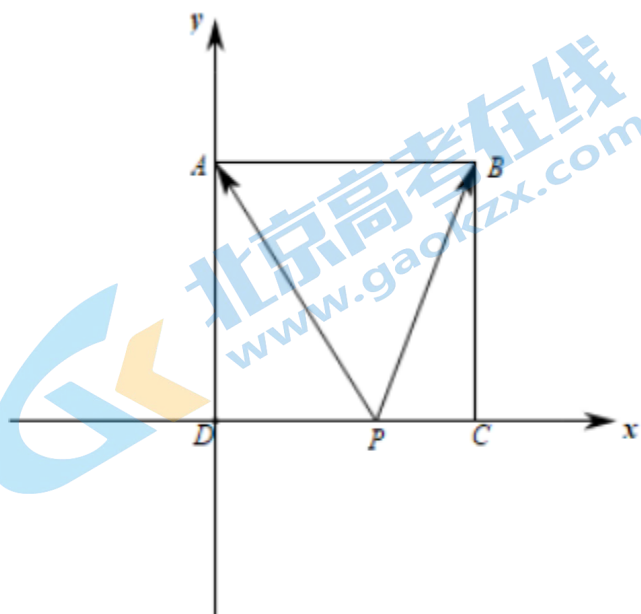
故“ $\alpha \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ ”是“ $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$ ”的充分必要条件.

故选: C.

【点评】本题主要考查正弦型函数的性质, 以及充分、必要条件的定义, 属于基础题.

10. 【分析】建立平面直角坐标系, 分点 P 在 CD 上, 点 P 在 BC 上, 点 P 在 AB 上, 点 P 在 AD 上, 利用数量积的坐标运算求解.

【解答】解: 建立如图所示平面直角坐标系:



则 $A(0, 2)$, $B(2, 2)$,

当点 P 在 CD 上时, 设 $P(x, 0)(0 \leq x \leq 2)$,

则 $\overrightarrow{PA} = (x, -2)$, $\overrightarrow{PB} = (x-2, -2)$,

所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x(x-2) + 4 = (x-1)^2 + 3 \in [3, 4]$;

当点 P 在 BC 上时, 设 $P(2, y)(0 \leq y \leq 2)$,

则 $\overrightarrow{PA} = (2, y-2)$, $\overrightarrow{PB} = (0, y-2)$,

所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (y-2)^2 \in [0, 4]$;

当点 P 在 AB 上时, 设 $P(x, 2)(0 \leq x \leq 2)$,

则 $\overrightarrow{PA} = (x, 0)$, $\overrightarrow{PB} = (x-2, 0)$,

所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x(x-2) = (x-1)^2 - 1 \in [-1, 0]$;

当点 P 在 AD 上时, 设 $P(0, y)(0 \leq y \leq 2)$,

则 $\overrightarrow{PA} = (0, y-2)$, $\overrightarrow{PB} = (-2, y-2)$,

所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (y-2)^2 \in [0, 4]$;

综上: $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围是 $[-1, 4]$.

故选：D.

【点评】本题考查了平面向量数量积的坐标运算和取值范围的问题，属于中档题.

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

11. 【分析】根据已知条件，运用复数的运算法则，以及复数模的公式，即可求解.

【解答】解： $\because z \cdot i = 1 - i$,

$$\therefore z = \frac{1-i}{i} = \frac{(1-i)i}{i^2} = -1-i,$$

$$\therefore |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

故答案为： $\sqrt{2}$.

【点评】本题主要考查复数的运算法则，以及复数模的公式，属于基础题.

12. 【分析】根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 可求 b .

【解答】解：由正弦定理得： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，得 $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$.

故答案为：2.

【点评】本题考查了正弦定理，属基础题.

13. 【分析】因为长方体的对角线为外接球的直径，由长方体的棱长可得外接球的直径，代入球的表面积公式，求出其值.

【解答】解：因为长方体的对角线为外接球的直径，设外接球的直径为 $2R$ ，则 $(2R)^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 = 50$ ，即 $4R^2 = 50$.

所以外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 50\pi$ ，

故答案为： 50π .

【点评】本题考查长方体的对角线与外接球的直径的关系，球的表面积公式的应用，属于基础题.

14. 【分析】利用相反向量和向量的加法法则即可求解.

【解答】解：因为在直角 $\triangle ABC$ 中，斜边 $AB = 4$ ，

$$\text{所以 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = 16,$$

故答案为：16.

【点评】本题考查了平面向量数量积的性质和运算，属于基础题.

15. 【分析】利用同名三角函数将题上方程转化为关于 $\cos\theta$ 且含有参数 a 的一元二次方程进行求解.

【解答】解：由于关于 θ 的方程 $\sin^2\theta - \cos\theta + a = 0$ 且 $\theta \in [0, 2\pi)$ ，

$$\text{化简为 } \cos^2\theta + \cos\theta - (a+1) = 0,$$

$$\text{令 } t = \cos\theta \in [-1, 1],$$

$$\text{则 } t^2 + t - (a+1) = 0, t_1 + t_2 = -1, t_1 \cdot t_2 = -(a+1), \text{ 且 } \Delta = 4a+5.$$

对于①：当 $a=0$ 时， $\Delta > 0$ ， $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，又 $\theta \in [0, 2\pi)$ ，故 θ 有2个值，故①正确.

对于②：当 $\Delta > 0$ 时，若 $\cos\theta \in (-1, 1)$ ， $\cos\theta$ 就有两个解，又 $\theta \in [0, 2\pi)$ ， θ 可能对应四个解，故②正确。

对于③：令 $\cos\theta = t$ ， $t \in [-1, 1]$ ，则 $f(t) = -t^2 - t + a + 1$ 要有实数根即： $\Delta \geq 0$ 、 $f(-1) \leq 0$ 且 $f(1) \leq 0$ ；即 $4a + 5 \geq 0$ 、 $a \leq -1$ ，即 $-\frac{5}{4} \leq a \leq -1$ ，故③错。

对于④：当 $\Delta < 0$ 时，无实数根；当 $\Delta = 0$ ， $\cos\theta$ 可能有一个解， θ 可能有 1 个或 2 个值；当 $\Delta > 0$ 时， $\cos\theta$ 可能有两个不同的值，则 θ 可能有 2 个或 3 个或 4 个值，故④对。

故答案为：①②④。

【点评】本题考查的知识要点：同名三角函数的转化，三角函数与一元二次方程的联系，参数和方程的根的关系，主要考查学生的运算能力和数学思维能力，属于中档题，易错题。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. 【分析】(I) 直接根据任意角三角函数的定义即可求解 $\tan\theta$ 的值，进而利用二倍角的正切公式可求 $\tan 2\theta$ 的值。

(II) 根据任意角三角函数的定义可求 $\sin\theta$ ， $\cos\theta$ 的值，进而利用两角和的余弦公式即可求解 $\cos(\theta + \frac{\pi}{4})$ 的值。

【解答】解：(I) 因为在平面直角坐标系 xOy 中，角 θ 以 Ox 为始边，终边经过点 $(-1, -2)$ ，

$$\text{所以 } \tan\theta = \frac{-2}{-1} = 2,$$

$$\text{所以 } \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2 \times 2}{1-2^2} = -\frac{4}{3};$$

$$(II) \text{ 由题意可得 } \sin\theta = \frac{-2}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = \cos\theta \cos\frac{\pi}{4} - \sin\theta \sin\frac{\pi}{4} = (-\frac{\sqrt{5}}{5}) \times \frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{2\sqrt{5}}{5}) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

【点评】本题主要考查了任意角三角函数的定义和二倍角的正切公式以及两角和的余弦公式在三角函数化简求值中的应用，考查了计算能力和转化思想，属于基础题。

17. 【分析】(I) 由题设知 $ABCD$ 为直角梯形，结合已知求其面积，根据 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，知四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 PA ，利用体积公式可求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积；

(II) 由题设得 $BC \perp AB$ ，线面垂直的性质有 $PA \perp BC$ ，根据线面垂直的判定可证结论；

(III) 取 AD 中点 N ，连结 EN ， CN ，通过证平面 $CEN \parallel$ 平面 PAB ，可证 $EC \parallel$ 平面 PAB 。

【解答】解：(I) 由 $AD \parallel BC$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，知 $ABCD$ 为直角梯形，

又 $AD = 2BC$ ， $PA = AD = AB = 2$ ，且 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，

$$\therefore BC = 1, \text{ 故 } S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times 2 \times (1+2) = 3,$$

$$\therefore \text{四棱锥 } P-ABCD \text{ 的体积为 } \frac{1}{3} \times 2 \times 3 = 2;$$

(II) 由题设知： $AD \perp AB$ ，而 $AD \parallel BC$ ，故 $BC \perp AB$ ，

又 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $BC \subset$ 平面 $ABCD$ ， $\therefore PA \perp BC$ ，

$AB \cap PA = A$ ， $AB, PA \subset$ 面 PAB ，故 $BC \perp$ 平面 PAB ；

(III) 证明：如图，取 AD 中点 N ，连结 EN ， CN ，

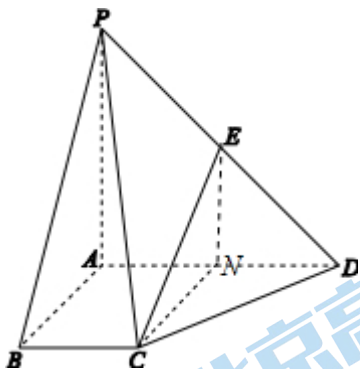
$\because E$ 为 PD 的中点， $\therefore EN \parallel AP$ ，

$\because AD = 2BC$ ， $\therefore AN = BC$ ，

$\because BC \parallel AD$ ， $\therefore$ 四边形 $ABCN$ 是平行四边形， $\therefore AB \parallel CN$ ，

$\because CN \cap NE = N$ ， $BA \cap AP = A$ ， $\therefore$ 平面 $CEN \parallel$ 平面 PAB ，

$\because CE \subset$ 平面 ENC ， $\therefore CE \parallel$ 平面 PAB 。



【点评】本题考查求空间几何体的体积，考查线面垂直，线面平行的证明，属中档题。

18. 【分析】(I) 选①，由余弦定理求出 $a = 2$ ， $c = 4$ ，再由正弦定理即可求出答案；选②由 $\sin C = \sin(A + B)$ 由两角和的正弦公式代入即可求出答案；选③，由正弦定理求出 $\sin A$ ，再由 $\sin C = \sin(A + B)$ 代入两角和的正弦公式即可求出答案；

(II) 选①或③，直接由面积公式代入即可得出答案，选②，由正弦定理求出 a ，再由面积公式即可求得答案。

【解答】解：(I) 由题知，三角形为钝角三角形，

选①，由余弦定理得： $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + 4a^2 - 28}{2a \cdot 2a} = -\frac{1}{2}$ ，解得 $a = 2$ ， $c = 4$ ，

由正弦定理得： $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$ ，所以 $\sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ ；

选②，因为 $\sin A = \frac{\sqrt{21}}{14}$ ，所以 $\cos A = \frac{5\sqrt{7}}{14}$ ，

所以 $\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{\sqrt{21}}{14} \times (-\frac{1}{2}) + \frac{5\sqrt{7}}{14} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ ；

选③由正弦定理得： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ， $\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14}$ ，

所以 $\cos A = \frac{5\sqrt{7}}{14}$ ，

所以 $\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{\sqrt{21}}{14} \times (-\frac{1}{2}) + \frac{5\sqrt{7}}{14} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ ；

(II) 选①，因为 $a = 2$ ， $c = 4$ ， $B = \frac{2\pi}{3}$ ，所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ 。

选②，由正弦定理得： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ， $a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{2\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{21}}{14}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$ ，

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{21}}{7} = 2\sqrt{3}$ 。

选③，因为 $b = 2\sqrt{7}$ ， $a = 2$ ， $\sin C = \frac{\sqrt{21}}{7}$ ，

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{21}}{7} = 2\sqrt{3}$ 。

【点评】本题考查正余弦定理在解三角形中的应用，考查了计算能力和转化思想，属中档题。

19. 【分析】(I) 由题意，利用三角恒等变换化简函数的解析式，再根据正弦函数的周期性，得出结论。

(II) 由题意，利用正弦函数的单调性，求得 a 的最大值。

【解答】解：(I) $\because$ 函数 $f(x) = 2\cos x \cdot \sin(x + \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= 2\cos x (\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2x + \sqrt{3} \times \frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \sin(2x + \frac{\pi}{3})，$$

故该函数的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 。

(II) $\because a > 0$ ，函数 $f(x)$ 在区间 $(0, a)$ 上单调递增，

则 $2x + \frac{\pi}{3} \in (\frac{\pi}{3}, 2a + \frac{\pi}{3})$ ， $\therefore \frac{\pi}{3} < 2a + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ ，求得 $0 < a \leq \frac{\pi}{12}$ ，

故 a 的最大值为 $\frac{\pi}{12}$ 。

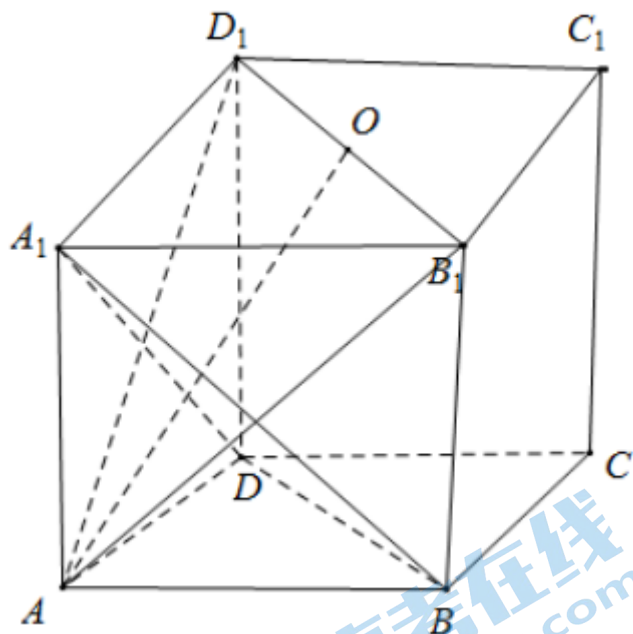
【点评】本题主要考查三角恒等变换，正弦函数的周期性和单调性，属于中档题。

20. 【分析】(I) 连接 AB_1 ， AD_1 ，三角形 AB_1D_1 是等边三角形，即可证明 $AO \perp B_1D_1$ ，进一步通过 $BD // B_1D_1$ ，所以 $AO \perp BD$ 。

(II) 设点 A 到平面 A_1BD 的距离为 d ，所以 $V_{A-A_1BD} = V_{A_1-ADB}$ ，代入即可得出答案，

(III) 画出图形，得出 AOQ_1B 是平行四边形，再证明不存在即可。

【解答】证明：(I) 连接 AB_1 ， AD_1 ，因为 $AB_1 = AD_1$ ， O 为 B_1D_1 的中点，
所以 $AO \perp B_1D_1$ ，又因为 $BD // B_1D_1$ ，所以 $AO \perp BD$ 。



解：(II) 设点 A 到平面 A_1BD 的距离为 d ，所以 $V_{A-A_1BD} = V_{A_1-ADB}$ ，

所以 $\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BD}d = \frac{1}{3}S_{\triangle ADB}AA_1$ ，则 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{4+4})^2 \cdot d = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2$ 。所以 $d = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

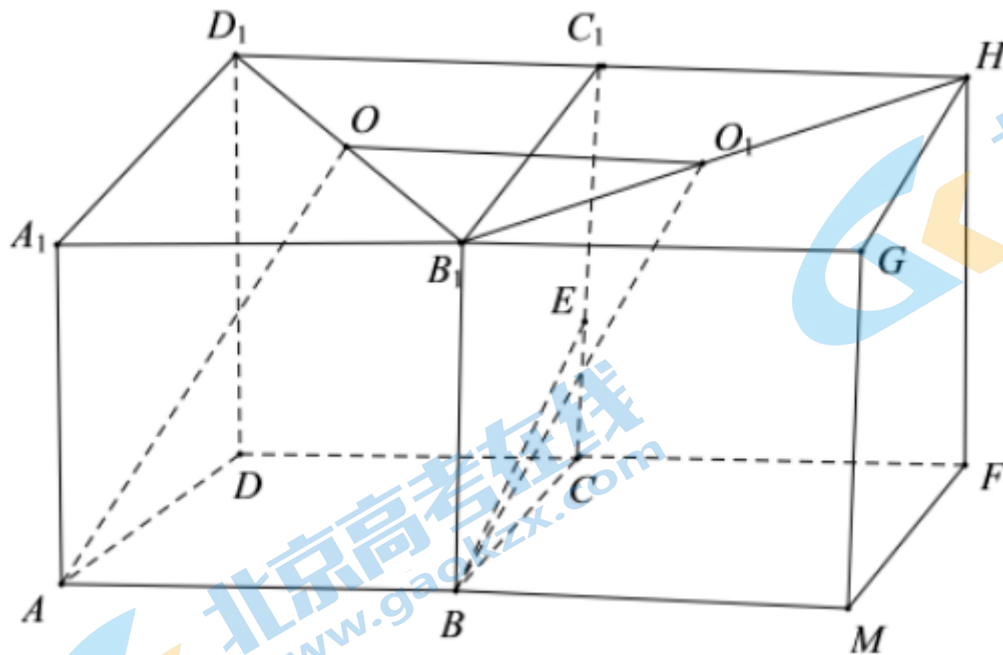
所以 A 到平面 A_1BD 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

(III) 不存在，如下图，作一个相同的正方体 $BCFM - B_1C_1GH$ ，

取 O_1 为上底面 B_1C_1GH 的中心，连接 OO_1 ， O_1B ，易知 AOO_1B 是平行四边形，

所以 $AO \parallel O_1B$ ，而 O_1B 与 BE 相交，

所以棱 CC_1 上不存在一点 E ，使得 $AO \parallel BE$ 。



【点评】本题考查点到面的距离，考查学生的空间想象能力及运算能力，属于中档题。

21. 【分析】(I) 由函数 $f(x)$ 具有性质 P 判断即可；

(II) 若 $a=3$ ，函数 $f(x)$ 具有性质 P ，当 $x \in [1, 3]$ 时， $f(x) = \sin(\frac{\pi}{6}x)$ ，可确定 T 的值，再利用性质 P 求出 $f(x)$

在 $x \in [3, 9]$ 上的解析式, 按分段函数解不等式即可;

(III) 根据函数 $f(x)$ 具有性质 P , 且函数图像是轴对称图形, 在区间 $[1, a]$ 上有最大值 $A(A > 0)$, 分别讨论 $0 < T < 1$, $T > 1$ 时, 函数的最值情况, 得出矛盾, 即可证明.

【解答】解: (I) 函数 $y = x^2$ 具有性质 P , 函数 $y = \cos x$ 不具有性质 P ;

(II) 若 $a = 3$, 函数 $f(x)$ 具有性质 P , 则存在常数 $T > 0$, 对任意 $x \in [1, 3]$, 使得 $f(3x) = T \cdot f(x)$,

又当 $x \in [1, 3]$ 时, $f(x) = \sin(\frac{\pi}{6}x)$,

故当 $x = 1$ 时, 有 $f(3) = T \cdot f(1)$, 即 $\sin(\frac{\pi}{6} \times 3) = T \cdot \sin(\frac{\pi}{6} \times 1)$, 所以 $T = 2$.

所以当 $x \in [1, 3]$ 时, $3x \in [3, 9]$, $f(3x) = 2\sin(\frac{\pi}{6}x)$,

即 $x \in [3, 9]$ 时, $f(x) = 2\sin(\frac{\pi}{18}x)$,

故当 $x \in [1, 3]$ 时, 不等式 $f(x) > \sqrt{3}$ 为 $\sin \frac{\pi}{6}x > \sqrt{3}$, 无解;

当 $x \in [3, 9]$ 时, 不等式 $f(x) > \sqrt{3}$ 为 $2\sin(\frac{\pi}{18}x) > \sqrt{3}$, 又 $\frac{\pi}{18}x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$,

故不等式解得: $6 < x \leq 9$,

即解集为: $(6, 9]$.

(III) 证明: 已知函数 $f(x)$ 具有性质 P ,

则存在常数 $T > 0$, 使得 $x \in [1, a]$, 都有 $f(ax) = T \cdot f(x)$,

所以 $f(a^2) = Tf(a) = T^2 f(1) = 0$,

所以函数 $f(x)$ 的图像端点为 $(1, 0)$ 和 $(a^2, 0)$,

由 $f(x)$ 的图像是轴对称图形, 得其对称轴为直线: $x = \frac{a^2 + 1}{2}$,

①若 $0 < T < 1$, 因为 $x \in [1, a]$ 时, $f(x) \leq A$,

所以对任意 $x \in [a, a^2]$, 有 $f(x) = Tf(\frac{x}{a}) \leq TA < A$,

由基本不等式得, $a > 1$ 有 $\frac{a^2 + 1}{2} > 1$,

所以对任意 $x \in [\frac{a^2 + 1}{2}, a^2]$, 有 $f(x) < A$,

根据图像的对称性, 得对任意 $x \in [1, a]$, 有 $f(x) < A$,

这样与存在 $f(x_0) = A$ 矛盾.

②若 $T > 1$, 由 $x_0 \in [a + \frac{1}{a} - 1, a]$, 得 $f(ax_0) = Tf(x_0) = TA > A$,

又 $ax_0 \geq a^2 + 1 - a$, 由图像的对称性知, $f(ax_0) = f(a^2 + 1 - ax_0)$,

且 $a^2 + 1 - ax_0 \in [1, a]$,

所以 $f(ax_0) = f(a^2 + 1 - ax_0) = TA > A$.

这与 $f(x)$ 在 $[1, a]$ 上有最大值 $A(A > 0)$ 矛盾.

综上: $T = 1$.

【点评】本题是函数新定义问题,考查了函数的对称性、学生的推理能力,理解概念是关键,属于难题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜



京考一点通