2022 北京北师大实验中学高一（上）期中

数　　学

班级________　姓名________　学号________　成绩

考生须知	1．本试卷共 6 页，共五道大题，24 道小题；答题纸共 4 页。满分 150 分。考试时间 120 分钟。 2．在试卷和答题卡上准确填写班级、姓名、学号。 3．试卷答案一律填写在答题卡上，在试卷上作答无效。 4．在答题卡上，选择题须用 2B 铅笔将选中项涂黑涂满，其他试题用黑色字迹签字笔作答。

第 I 卷(共 100 分)

一、单项选择题(本题共 8 小题，在每小题给出的四个选项中，只有一项最符合题意。每小题 5 分，共 40 分)

1．若集合 $A=\{x\mid 0\le x\le 2\}$，$B=\left\{x\mid x^2>1\right\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{x\mid 1<x\le 2\}$　　B．$\{x\mid 0\le x\le 1\}$

C．$\{x\mid 0<x\le 2\}$　　D．$\{x\mid x>0或x<-1\}$

2．命题“$\exists x_0\in(0,+\infty)$，$2x_0<x_0^2$”的否定为

A．$\forall x\in(0,+\infty)$，$2x<x^2$　　B．$\forall x\in(0,+\infty)$，$2x>x^2$

C．$\forall x\in(0,+\infty)$，$2x\ge x^2$　　D．$\exists x\in(0,+\infty)$，$2x\ge x^2$

3．下列命题是真命题的是

A．若 $a>b>0$，则 $ac^2>bc^2$　　B．若 $a>b$，则 $a^2>b^2$

C．若 $a<b<0$，则 $a^2<ab<b^2$　　D．若 $a<b<0$，则 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$

4．设 $x\in\mathbf{R}$，则“$\dfrac{x+1}{x-5}<0$”是“$|x-1|<1$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．已知函数 $y=f(x)$ 的图像是连续不断的，有如下的对应值表：

x	1	2	3	4	5	6
y	123.56	21.45	-7.82	11.45	-53.76	-128.88

则函数 $y=f(x)$ 在区间 $[1,6]$ 上的零点至少有

A．2 个　　B．3 个　　C．4 个　　D．5 个

6．下列函数中，在定义域内既是奇函数又是增函数的是

A． $y=x+1$　　　B． $y=-x^2$　　　C． $y=x^3$　　　D． $y=-\dfrac{1}{x}$

7．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x-1, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{x}, & x<0,\end{cases}$ 若 $f(a)=a$，则实数 a 的值为

A． ± 1　　　B． -1　　　C． -2 或 -1　　　D． ± 1 或 -2

8．已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$．关于 $f(x)$ 的性质，有以下四个结论：

① $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$；② $f(x)$ 是奇函数；

③ $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增；④ $f(x)$ 的值域是 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

其中正确结论的个数是

A．1　　　B．2　　　C．3　　　D．4

二、填空题(本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

9．函数 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}+\sqrt{2-x}$ 的定义域为__________.

10．已知函数 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$，则 $f(-1)=$__________.

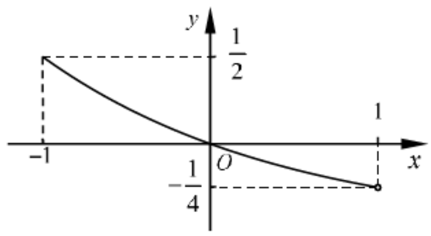
11. 欲用一段长为 20 米的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园，墙长 18 米，则这个菜园的最大面积为________平方米。

12. 已知关于 x 的方程 $x^2+2(a+2)x+a^2-1=0$ 有一个正根和一个负根，则实数 a 的取值范围为_______.

13. 已知偶函数 $f(x)=x^2+(b+1)x+c$，写出一组使得 $f(x)\geq 2$ 恒成立的实数 b,c 的取值：$b=$_______，$c=$_______.

14．函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1)$，其图像如图所示。函数 $g(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，满足 $g(x+2)=g(x)$，且当 $x\in[-1,0]$ 时，$g(x)=f(x)$.

给出下列三个结论：



① $g(1)=\dfrac{1}{2}$；

②不等式 $g(x)>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$；

③函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $[2k,2k+1]$，$k\in\mathbf{Z}$.

其中所有正确结论的序号是________.

(注：本题为多选题，全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其它情况得 3 分)

三、解答题(本题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分)

15．(本小题满分 10 分)

设集合 $A=\left\{x \mid x^2-2x-3<0\right\}$， $B=\{x \mid 2x-5 \geq x-3\}$.

(I)求 $C_{\mathbf{R}}B$ 和 $A \cap B$；

(I)若 $C=\left\{x \mid 2x+a>0\right\}$，满足 $B \cup C=C$，求实数 a 的取值范围.

16．(本小题满分 10 分)

设函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}+3$.

(I)求函数 $f\left(x\right)$ 的图像与直线 $y=2x$ 交点的坐标；

(Ⅱ)当 $x \in(0,+\infty)$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 的最小值；

(III)用单调性定义证明：函数 $f\left(x\right)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增。

17．(本小题满分 10 分)

已知函数 $f\left(x\right)=x^2+bx+c$ 满足 $f\left(1\right)=f\left(3\right)=-3$.

(I)求实数 b, c 的值；

(Ⅱ)若函数 $g\left(x\right)$ 是奇函数，当 $x \geq 0$ 时 $g\left(x\right)=f\left(x\right)$.

(i)直接写出 $g\left(x\right)$ 的单调递减区间：________；

(ii)若 $g\left(a\right)>a$，求 a 的取值范围.

第Ⅱ卷(共 50 分)

四、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

18．若 $f\left(x\right)$ 是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减，比较 $f\left(-3\right)$， $f\left(1\right)$， $f\left(2\right)$ 的大小关系．(用 “>” 或 “<” 连接)

19．函数 $f\left(x\right)$ 的值域为 $(0,+\infty)$，且在定义域内单调递减，则符合要求的函数 $f\left(x\right)$ 可以为__________．(写出符合条件的一个函数即可)

20．某购物网站在 2022 年 10 月开展“买三免一”活动，规则是“购买 3 件商品，最便宜的一件商品免费”，比如如下结算案例：包的价格为 200 元，衣服的价格为 200 元，鞋的价格为 150 元，用户应支付 200+200+150=550 元，减免价格最低商品价格 150 元，实际支付 400 元，实际折扣 400÷550=约 7.3 折，立省 150 元。

(1)如果在此网站上购买的三件商品价格分别为 500 元、700 元、400 元，按照“买三免一”的规则购买这三件商品的实际折扣为折；

(2)在这个网站上购买 3 件商品，按照“买三免一”的规则，这 3 件商品实际折扣力度最大约为________折(保留一位小数)。

21：已知当 $x\in[0,1]$ 时，函数 $y=(mx-1)^2$ 的图像与 $y=x+m$ 的图像有且只有一个交点，正实数 m 的取值范围是________.

五、解答题(本大题共 3 小题，共 30 分)

22．(本小题满分 10 分)

已知 $a>0$，$b>0$，且 $ab=1$.

(I)求 $a+2b$ 的最小值；

(Ⅱ)若不等式 $x^2-2x<\dfrac{1}{4a}+\dfrac{9}{b}$ 恒成立，求实数 x 的取值范围.

23．(本小题满分 10 分)

设函数 $f(x)=\begin{cases}(2-x)(x+4), & x\leqslant 2\\(2-x)(x-a), & x>2\end{cases}$

(I)求函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值和最小值；

(Ⅱ)设函数 $f(x)$ 在区间 $[-4,6]$ 上的最大值为 $g(a)$，试求 $g(a)$ 的表达式.

24．(本小题满分 10 分)

已知集合 $S_n=\{X\mid X=(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_i\in\{k,1\},i=1,2,\cdots,n\}(n\geqslant 2)$．对 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n),B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in S_n$，定义：

A 与 B 的差为 $A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)$；

A 与 B 之间的距离为 $d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|$

(I)当 $k=2$，$n=5$ 时，设 $A=(1,2,1,1,2)$，$B=(2,1,1,2,1)$，求 $A-B$，$d(A,B)$；

(II)若对于任意的 $A,B,C\in S_n$，有 $A-B\in S_n$，求 k 的值并证明：

$d(A-C,B-C)=d(A,B)$.

参考答案

第 I 卷(共 100 分)

一、选择题(每小题 5 分，共 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	B	B	C	B	D

三、解答题(每小题 10 分，共 30 分)

题号	9	10	11	12	13	14
答案	$(-\infty,1)\cup(1,2]$	-2	50	$(-1,1)$	$b=-1$，$c=2$ 答案不唯一，$c\geq 2$	①③

15．解：(1)$\because A=\left\{x\middle|x^2-2x-3<0\right\}$ $\therefore A=\left\{x\middle|-1<x<3\right\}$

$\because B=\{x|2x-5\geq x-3\}\therefore B=\{x|x\geq 2\}$，

则 $C_{\mathrm{R}}B=(-\infty,2)A\cap B=\{x|2\leqslant x<3\}$．【4’】

(2)由 $B\cap C=C$，可知 $B\subseteq C$

$\because C=\left\{x\middle|2x+a>0\right\}=\left\{x\middle|x>-\dfrac{a}{2}\right\}$

则 $-\dfrac{a}{2}<2$，

所以 $a>-4$，a 的取值范围为 $(-4,+\infty)$．【10’】

16．解：(1)由 $f\left(x\right)=x+\dfrac{4}{x}+3=2x$，解得 $x_1=-1$，$x_2=4$．

所以函数 $f\left(x\right)$ 的图像与直线 $y=2x$ 的交点为 $(-1,-2)$，$\left(4,8\right)$．【3’】

(2)因为 $x>0$，所以 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}+3\geqslant 2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}}+3=7$．

当且仅当 $x=\dfrac{4}{x}$，即 $x=2$ 时等号成立．

故当 $x=2$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上取到最小值 7．【6’】

(3)任取 $x_1,x_2\in(2,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，那么

$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\left(x_1+\dfrac{4}{x_1}+3\right)-\left(x_2+\dfrac{4}{x_2}+3\right)=\left(x_1-x_2\right)+\dfrac{4\left(x_2-x_1\right)}{x_1x_2}=\dfrac{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1x_2-4\right)}{x_1x_2}$ 因 为

$2<x_1<x_1$，所以 $x_1-x_2<0$，$x_1x_2-4>0$，$x_1x_2>0$，

从而 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<0$，即 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$．

所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增．【10’】

17．解：(1) $b=-4$；$c=0$．【2’】

(2)(i) $[-2,2]$ 或 $(-2,2)$．【4’】

(ii)由(1)知 $f(x)=x^2-4x$，则当 $x\geq 0$ 时，$g(x)=x^2-4x$；

当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $g(-x)=(-x)^2-4(-x)=x^2+4x$

因为 $g(x)$ 是奇函数，所以 $g(x)=-g(-x)=-x^2-4x$．

若 $g(a)>a$，则

$\begin{cases} a\geqslant 0, \\ a^2-4a>a \end{cases}$，或 $\begin{cases} a<0, \\ -a^2-4a>a. \end{cases}$

解得 $a>5$ 或 $-5<a<0$．

综上，a 的取值范围为 $(-5,0)\cup(5,+\infty)$．【10’】

第Ⅱ卷(共 50 分)

四、填空题(每小题 5 分，共 20 分)

题号	18	19	20	21
答案	$f(1)>f(2)>f(-3)$	例如：$f(x)=\frac{1}{x}(x>0)$	7.5 6.7	$(0,1]\cup[3,+\infty)$

五、解答题(每小题 10 分，共 30 分)

22．解：(1)∵ $a>0$，$b>0$ 且 $ab=1$，

$a+2b\geq 2\sqrt{2ab}=2\sqrt{2}$，

当且仅当 $a=2b=\sqrt{2}$ 时，等号成立，故 $a+2b$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$．【4’】

(2)∵ $a>0$，$b>0$ 且 $ab=1$，

$\frac{1}{4a}+\frac{9}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{9}{4ab}}=3$，当且仅当 $\frac{1}{4a}=\frac{9}{b}$，且 $ab=1$，即 $a=\frac{1}{6}$，$b=6$ 时取等，

即 $\frac{1}{4a}+\frac{9}{b}$ 的最小值为 3,

∴ $x^2-2x<3$，即 $x^2-2x-3<0$，解得 $-1<x<3$，

即实数 x 的取值范围是 $(-1,3)$．【10’】

23．解：(1)在区间 $[-2,2]$ 上，$f(x)=(2-x)(x+4)$．

所以 $f(x)$ 在区间 $[-2,-1]$ 上单调递增，在区间 $[-1,2]$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值为 $f(-1)=9$，最小值为 $f(2)=0$．【4'】

(2)当 $a\leq 2$ 时，$f(x)$ 在 $[-4,-1]$ 上单调递增，在 $[-1,6]$ 上单调递减：

所以 $f(x)$ 的最大值为 9.

当 $2<a\le 8$ 时， $f(x)$ 在 $[-4,-1]$ 上单调递增，在 $[-1,2]$ 上单调递减，在 $\left[2,\frac{a+2}{2}\right]$，

单调递增，在 $\left[\frac{a+2}{2},6\right]$ 上单调递减，此时 $f(-1)=9$， $f\left(\frac{a+2}{2}\right)=\left(\frac{a-2}{2}\right)^2\leqslant 9$，所

以 $f(x)$ 的最大值为 9.

当 $8<a\le 10$ 时 $f(x)$ 在 $[-4,-1]$ 上单调递增，在 $[-1,2]$ 上单调递减，在 $\left[2,\frac{a+2}{2}\right]$，单调递增，在 $\left[\frac{a+2}{2},6\right]$

上单调递减。此时 $f\left(\frac{a+2}{2}\right)=\left(\frac{a-2}{2}\right)^2>f(-1)$，所以 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{(a-2)^2}{4}$.

当 $a>10$ 时， $f(x)$ 在 $[-4,-1]$ 上单调递增，在 $[-1,2]$ 上单调递减，在 $[2,6]$ 单调递增，此时 $f(6)=4(a-6)>f(-1)$，所以 $f(x)$ 的最大值为 $4(a-6)$.

综上， $g(a)=\begin{cases}9 & a\leqslant 8\\ \frac{(a-2)^2}{4} & 8<a\leqslant 10\\ 4(a-6) & a>10\end{cases}$，【10'】

24．解：(1) $A-B=(|1-2|,|2-1|,|1-1|,|1-2|,|2-1|)=(1,1,0,1,1)$，

$d(A,B)=|1-2|+|2-1|+|1-1|+|1-2|+|2-1|=4$.【4’】

(2)因为对于任意的 $A,B\in S_n$， 都有 $A-B\in S_n$，

由 $A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)$， $a_i,b_i\in\{k,1\},i=1,2,\cdots,n$，

可知 $|a_i-b_i|=k$ 或 $|a_i-b_i|=1$.

1)当 $a_i=k$， $b_i=1$ 时， $|k-1|=k$ 或 $|k-1|=1$， 即 $k=\frac{1}{2}$ 或 $k=2$ 或 $k=0$；

2)当 $a_i=k$， $b_i=k$ 时， $|k-k|=k$ 或 $|k-k|=1$， 即 $k=0$；

3)当 $a_i=1$， $b_i=1$ 时， $|1-1|=k$ 或 $|1-1|=1$， 即 $k=0$；

4)当 $a_i=1$， $b_i=k$ 时， $|1-k|=k$ 或 $|1-k|=1$， 即 $k=\frac{1}{2}$ 或 $k=2$ 或 $k=0$；

若 $k=2$， 不妨取 $A=(2,1,\ldots,1)$， $B=(1,1,\ldots,1)$， 则 $A-B=(1,0,\ldots,0)\in S_n$， 与 $k=2$ 矛盾；

若 $k=\frac{1}{2}$， 不妨取 $A=\left(\frac{1}{2},1,\cdots,1\right),B=(1,1,\cdots,1)$， 则 $A-B=\left(\frac{1}{2},0,\cdots,0\right)\in S_n$， 与 $k=\frac{1}{2}$ 矛盾；

当 $k=0$ 时，对任意的 $a_i,b_i\in\{k,1\},i=1,2,\ldots,n$. 都有 $|a_i-b_i|\in\{0,1\}$，故任意的 $A,B\in S_n$，都有 $A-B\in S_n$.

综上，$k=0$．

设$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in S_n$．所以 $a_i,b_i,c_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,n$．

当$c_i=0$时，$||a_i-c_i|-|b_i-c_i||=|a_i-b_i|$；

当$c_i=1$时，$||a_i-c_i|-|b_i-c_i||=|(1-a_i)-(1-b_i)|=|a_i-b_i|$；

所以$d(A-C,B-C)=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|=d(A,B)$．【10'】

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。