

北京市东城区 2017—2018 学年度第二学期高三综合练习(二)

数学(理科)

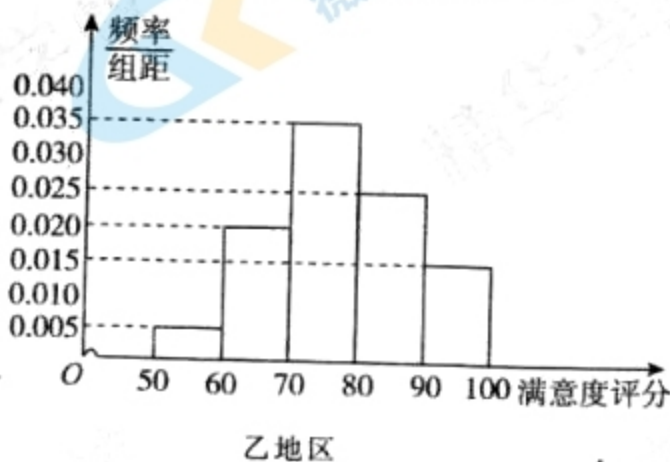
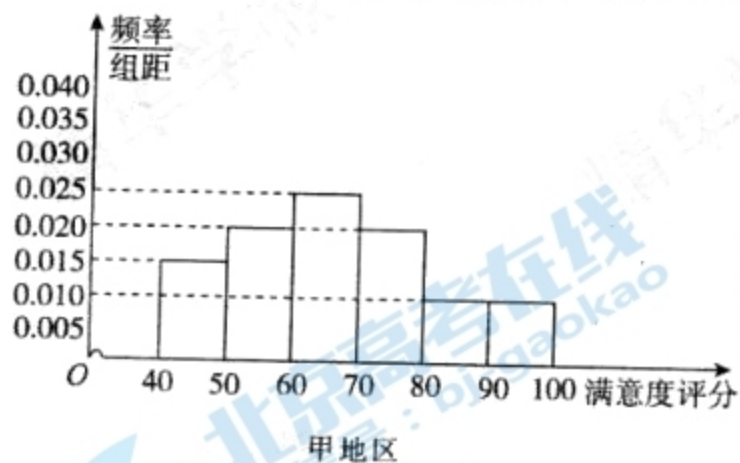
2018.5

本试卷共 4 页,共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

- (1)若集合 $A=\{x|-1<x<2\}$, $B=\{x|x<-2 \text{ 或 } x>1\}$, 则 $A \cup B =$
 (A) $\{x|x<-2 \text{ 或 } x>1\}$ (B) $\{x|x<-2 \text{ 或 } x>-1\}$
 (C) $\{x|-2<x<2\}$ (D) $\{x|1<x<2\}$
- (2)复数 $(1+i)(2-i) =$
 (A) $3+i$ (B) $1+i$ (C) $3-i$ (D) $1-i$
- (3)在 $\left(x+\frac{a}{x}\right)^5$ 的展开式中, x^3 的系数为 10, 则实数 a 等于
 (A) -1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2
- (4)已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线的倾斜角为 60° , 且与椭圆 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 有相等的焦距, 则 C 的方程为
 (A) $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ (B) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ (C) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ (D) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$
- (5)设 a, b 是非零向量, 则“ $|a+b| = |a| - |b|$ ”是“ $a \parallel b$ ”的
 (A)充分而不必要条件 (B)必要而不充分条件
 (C)充分必要条件 (D)既不充分也不必要条件
- (6)某公司为了了解用户对其产品的满意度, 从甲、乙两地区分别随机调查了 100 个用户, 根据用户对产品的满意度评分, 分别得到甲地区和乙地区用户满意度评分的频率分布直方图。



若甲地区和乙地区用户满意度评分的中位数分别为 m_1, m_2 ; 标准差分别为 s_1, s_2 , 则下面正确的是

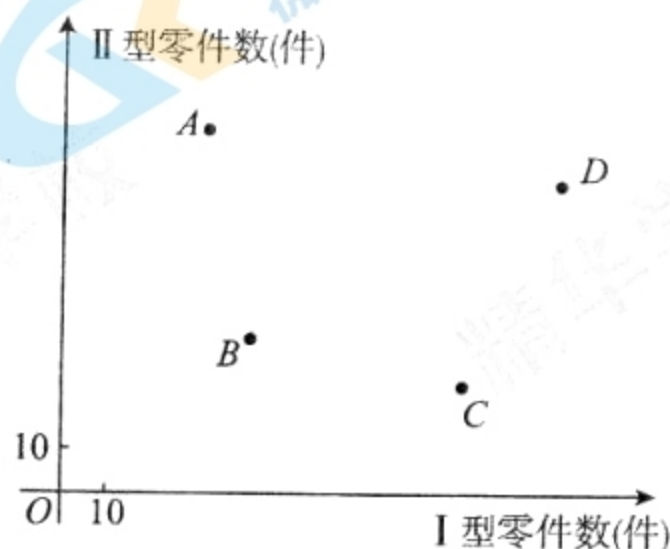
- (A) $m_1 > m_2, s_1 > s_2$ (B) $m_1 > m_2, s_1 < s_2$
 (C) $m_1 < m_2, s_1 < s_2$ (D) $m_1 < m_2, s_1 > s_2$

(7) 已知函数 $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = 2x + a$, 若存在 $x_1, x_2 \in [\frac{1}{2}, 2]$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$, 则 a 的取值范围是

- (A) $[-5, 0]$ (B) $(-\infty, -5] \cup [0, +\infty)$
(C) $(-5, 0)$ (D) $(-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$

(8) A, B, C, D 四名工人一天中生产零件的情况如图所示, 每个点的横、纵坐标分别表示该工人一天中生产的 I 型、II 型零件数, 则下列说法错误的是

- (A) 四个工人中, D 的日生产零件总数最大
(B) A, B 日生产零件总数之和小于 C, D 日生产零件总数之和
(C) A, B 日生产 I 型零件总数之和小于 II 型零件总数之和
(D) A, B, C, D 日生产 I 型零件总数之和小于 II 型零件总数之和



第二部分 (非选择题 共 110 分)

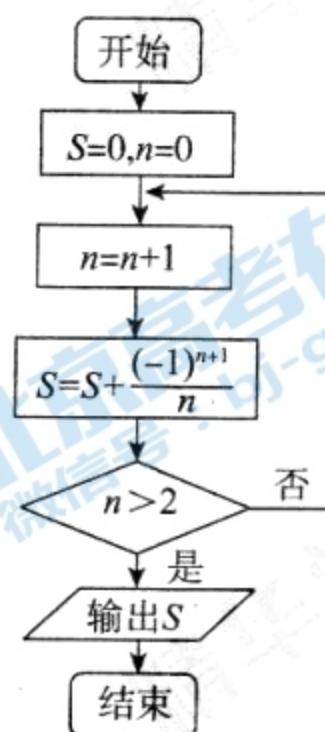
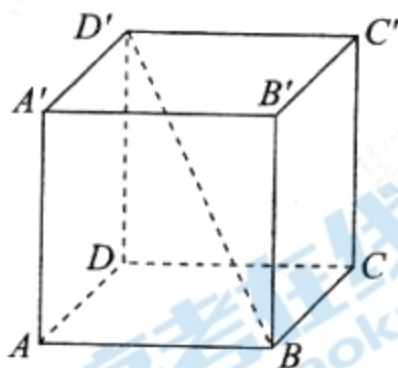
二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

(9) 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 值为_____。

(10) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q = 2$, 前 n 项和为 S_n , 则 $\frac{S_4}{a_2} =$ _____。

(11) 在极坐标系中, 点 $A(1, \frac{\pi}{3})$, $B(2, \frac{2\pi}{3})$, O 是极点, 则 $\triangle AOB$ 的面积等于_____。

(12) 如图, 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的边长为 1, 若过直线 BD' 的平面与该正方体的面相交, 交线围成一个菱形, 则该菱形的面积为_____。



(13) 直线 $x - y - 1 = 0$ 被圆 C 所截的弦长为 $\sqrt{2}$, 则圆 C 的方程可以为_____。(写出一个即可)

(14) 某种物质在时刻 t (min) 的浓度 M (mg/L) 与 t 的函数关系为 $M(t) = ar^t + 24$ (a, r 为常数). 在 $t = 0$ min 和 $t = 1$ min 测得该物质的浓度分别为 124 mg/L 和 64 mg/L, 那么在 $t = 4$ min 时, 该物质的浓度为_____mg/L; 若该物质的浓度小于 24.001 mg/L, 则最小的整数 t 的值为_____。(参考数据: $\lg 2 \approx 0.3010$)

三、解答题共 6 小题,共 80 分。解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程。

(15)(本小题 13 分)

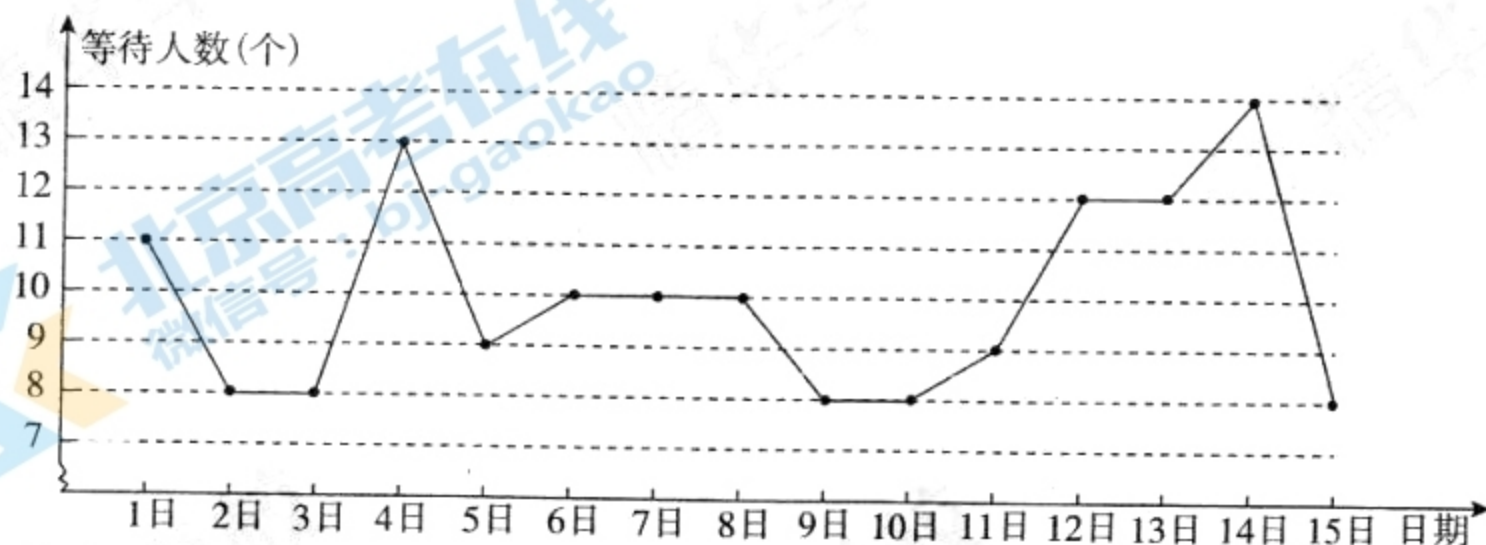
在 $\triangle ABC$ 中, $b=2$, $b\cos C=c\cos B$.

(I) 求 c 的值.

(II) 若 $a=3$, 求 $\sin 2A$ 的值.

(16)(本小题 13 分)

某银行的工作人员记录了 3 月 1 日到 3 月 15 日上午 10:00 在该银行取号后等待办理业务的人数, 如图所示.



从这 15 天中, 随机选取一天, 随机变量 X 表示当天上午 10:00 在该银行取号后等待办理业务的人数.

(I) 请把 X 的分布列补充完整;

X	8	9	10	11	12	13	14
P	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{5}$				$\frac{1}{15}$

(II) 令 μ 为 X 的数学期望, 若 $P(\mu-n \leq X \leq \mu+n) > 0.5$, 求正整数 n 的最小值;

(III) 由图判断, 从哪天开始的连续五天上午 10:00 在该银行取号后等待办理业务人数的均值最大? (结论不要求证明)

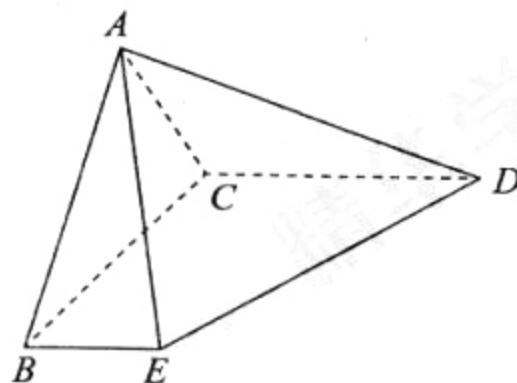
(17)(本小题 14 分)

如图, 在四棱锥 $A-BCDE$ 中, 平面 $ABC \perp$ 平面 $BCDE$, $AB=AC=CD=2BE=2$, $BE \parallel CD$, $CD \perp CB$, $AB \perp AC$.

(I) 求证: 平面 $ACD \perp$ 平面 ABC ;

(II) 若 O 为 BC 中点, P 为线段 CD 上一点, $OP \parallel$ 平面 ADE , 求 $\frac{CP}{CD}$ 的值;

(III) 求二面角 $A-DE-B$ 的大小.



(18)(本小题 13 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 经过点 $P(2, 2)$, A, B 是抛物线 C 上异于点 O 的不同的两点, 其中 O 为原点.

(I) 求抛物线 C 的方程, 并求其焦点坐标和准线方程;

(II) 若 $OA \perp OB$, 求 $\triangle AOB$ 面积的最小值.

(19)(本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = x \sin x + \cos x + \frac{1}{2}ax^2, x \in [-\pi, \pi]$.

(I) 当 $a=0$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 当 $a>0$ 时, 讨论 $f(x)$ 的零点个数.

(20)(本小题 13 分)

设 a, λ 均是正整数, 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = a, a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & a_n \text{ 是偶数,} \\ a_n + \lambda, & a_n \text{ 是奇数.} \end{cases}$

(I) 若 $a_3 = 3, \lambda = 5$, 写出 a_1 的值;

(II) 设 $a=1, \lambda$ 为给定的正奇数, 求证: 若 a_n 为奇数, 则 $a_n \leq \lambda$; 若 a_n 为偶数, 则 $a_n \leq 2\lambda$;

(III) 在 (II) 的条件下, 求证: 存在正整数 $n (n \geq 2)$, 使得 $a_n = 1$.

北京市东城区 2017—2018 学年度第二学期高三综合练习(二)

数学(理科)参考答案及评分标准

2018.5

一、选择题(共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

(1)B (2)A (3)D (4)C (5)A (6)D (7)A (8)D

二、填空题(共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分)

(9) $\frac{5}{6}$ (10) $\frac{15}{2}$ (11) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (12) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (13) $x^2+y^2=1$ (答案不唯一) (14)26.56; 13

三、解答题(共 6 小题,共 80 分)

(15)(共 13 分)

解:(I)在 $\triangle ABC$ 中,由 $b\cos C=c\cos B$ 及正弦定理,得

$$\sin B\cos C-\cos B\sin C=0, \text{即 } \sin(B-C)=0.$$

因为 $0<B<\pi, 0<C<\pi$,所以 $-\pi<B-C<\pi$.

所以 $B=C$,所以 $b=c$.

因为 $b=2$,所以 $c=2$ 7 分

$$(II) \text{由 } b=c=2, a=3, \text{得 } \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = -\frac{1}{8}.$$

$$\text{又因为 } 0<A<\pi, \text{所以 } \sin A = \frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

$$\text{所以 } \sin 2A = 2\sin A\cos A = 2 \times \frac{3\sqrt{7}}{8} \times \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{3\sqrt{7}}{32}. \text{ 13 分}$$

(16)(共 13 分)

解:(I) X 的分布列为

X	8	9	10	11	12	13	14
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

..... 4 分

(II)由(I)可得 X 的数学期望

$$E(X) = 8 \times \frac{1}{3} + 9 \times \frac{2}{15} + 10 \times \frac{1}{5} + 11 \times \frac{1}{15} + 12 \times \frac{2}{15} + 13 \times \frac{1}{15} + 14 \times \frac{1}{15} = 10.$$

所以 $\mu=10$.

$$\text{因为 } P(10-1 \leq X \leq 10+1) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} < 0.5,$$

$$P(10-2 \leq X \leq 10+2) = \frac{5+2+3+1+2}{15} = \frac{13}{15} > 0.5,$$

所以 $n=2$ 10 分

(III)第 10 日或第 11 日. 13 分

(17)(共 14 分)

(I) 证明: 如图 1, 因为平面 $ABC \perp$ 平面 $BCDE$,

平面 $ABC \cap$ 平面 $BCDE = CB$,

$CD \subset$ 平面 $BCDE, CD \perp CB$,

所以 $CD \perp$ 平面 ABC .

因为 $CD \subset$ 平面 ACD ,

所以平面 $ACD \perp$ 平面 ABC 4 分

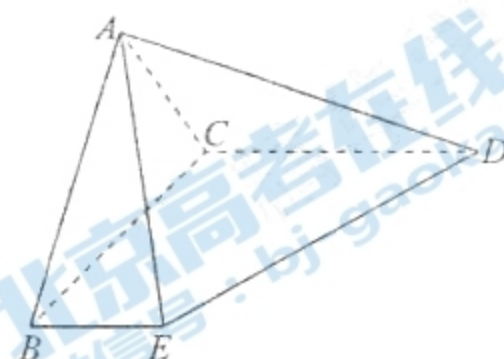


图 1

(II) 解: 如图 2, 取 CD 中点 F , 连接 EF , 因为 $OP \parallel$ 平面 $ADE, OP \subset$ 平面 $BCDE$,

平面 $ADE \cap$ 平面 $BCDE = DE$, 所以 $OP \parallel DE$.

所以 $\angle CPO = \angle FDE$.

因为 $BE \parallel CF$, 所以 $EF \parallel BC$.

所以 $\angle PCO = \angle DFE$.

所以 $\triangle COP \sim \triangle FED$. 所以 $\frac{CP}{FD} = \frac{CO}{FE} = \frac{1}{2}$.

因为点 F 为 CD 的中点,

所以 $\frac{CP}{CD} = \frac{1}{4}$ 9 分

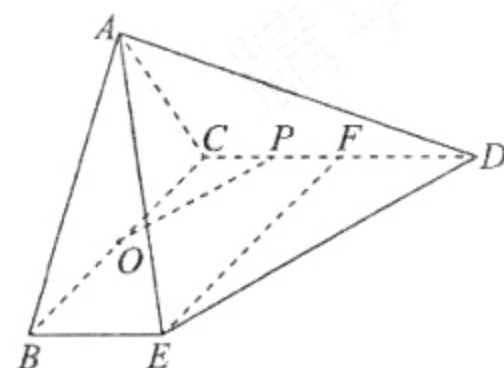


图 2

(III) 解: 连接 OA , 由 (I) 知 $CD \perp$ 平面 ABC ,

$OA \subset$ 平面 $ABC, OB \subset$ 平面 ABC ,

所以 $CD \perp OA, CD \perp OB$.

因为 $AB = AC, O$ 为 BC 中点, 所以 $OA \perp OB$.

作 $OM \parallel CD$, 所以 $OM \perp OA, OM \perp OB$.

如图 3, 建立空间坐标坐标系 $O-xyz$.

因为 $AB = AC = CD = 2BE = 2$,

所以 $A(0, 0, \sqrt{2}), D(-\sqrt{2}, 2, 0), E(\sqrt{2}, 1, 0)$,

$\vec{AD} = (-\sqrt{2}, 2, -\sqrt{2}), \vec{AE} = (\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2})$.

因为 $OA \perp OB, OA \perp OM, OB \cap OM = O$,

所以 $OA \perp$ 平面 $BCDE$. 所以平面 $BCDE$ 的法向量 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$.

设平面 ADE 的法向量 $\mathbf{m} = (x, y, z)$, 则有

$$\begin{cases} \vec{AD} \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \vec{AE} \cdot \mathbf{m} = 0. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -\sqrt{2}x + 2y - \sqrt{2}z = 0, \\ \sqrt{2}x + y - \sqrt{2}z = 0. \end{cases}$$

令 $x = 1$, 则 $y = 2\sqrt{2}, z = 3$, 即 $\mathbf{m} = (1, 2\sqrt{2}, 3)$.

$$\cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{3}{1 \times 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由题知二面角 $A-DE-B$ 为锐角, 所以二面角 $A-DE-B$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$ 14 分

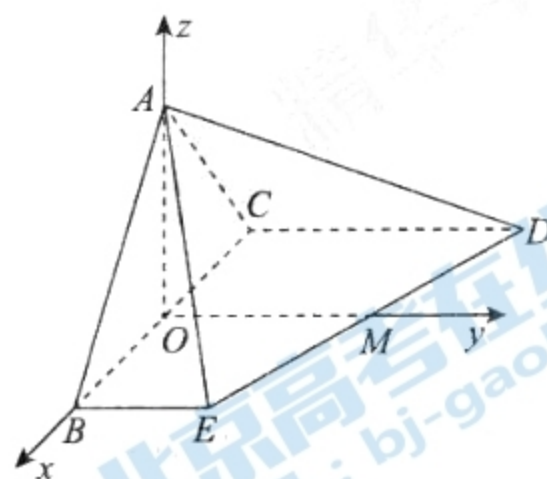


图 3

(18)(共 13 分)

解:(I)由抛物线 $C: y^2 = 2px$ 经过点 $P(2, 2)$ 知 $4p = 4$, 解得 $p = 1$.

则抛物线 C 的方程为 $y^2 = 2x$.

抛物线 C 的焦点坐标为 $(\frac{1}{2}, 0)$, 准线方程为 $x = -\frac{1}{2}$ 4 分

(II)由题知, 直线 AB 不与 y 轴垂直, 设直线 $AB: x = ty + a$.

由 $\begin{cases} x = ty + a, \\ y^2 = 2x \end{cases}$ 消去 x , 得 $y^2 - 2ty - 2a = 0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = 2t, y_1 y_2 = -2a$.

因为 $OA \perp OB$, 所以 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$, 即 $\frac{y_1^2 y_2^2}{4} + y_1 y_2 = 0$.

所以 $y_1 y_2 = 0$ (舍) 或 $y_1 y_2 = -4$.

所以 $-2a = -4$, 即 $a = 2$. 所以直线 $AB: x = ty + 2$.

所以直线 AB 过定点 $(2, 0)$.

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 2 \times |y_1 - y_2|$$

$$= \sqrt{y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 y_2}$$

$$= \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + 8}$$

$$\geq \sqrt{2|y_1 y_2| + 8}$$

$$= 4.$$

当且仅当 $y_1 = 2, y_2 = -2$ 或 $y_1 = -2, y_2 = 2$ 时, 等号成立.

所以 $\triangle AOB$ 面积的最小值为 4. 13 分

(19)(共 14 分)

解:(I)当 $a = 0$ 时, $f(x) = x \sin x + \cos x, x \in [-\pi, \pi]$.

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x.$$

当 x 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化如下表

x	$-\pi$	$(-\pi, -\frac{\pi}{2})$	$-\frac{\pi}{2}$	$(-\frac{\pi}{2}, 0)$	0	$(0, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	-1	↗	极大值 $\frac{\pi}{2}$	↘	极小值 1	↗	极大值 $\frac{\pi}{2}$	↘	-1

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\pi, -\frac{\pi}{2}), (0, \frac{\pi}{2})$; $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

..... 5 分

(II) 任取 $x \in [-\pi, \pi]$,

$$f(-x) = (-x) \sin(-x) + \cos(-x) + \frac{1}{2}a(-x)^2 = x \sin x + \cos x + \frac{1}{2}ax^2 = f(x),$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

$$f'(x) = ax + x \cos x = x(a + \cos x).$$

当 $a \geq 1$ 时, $a + \cos x \geq 0$ 在 $[0, \pi]$ 上恒成立, 所以 $x \in [0, \pi]$ 时, $f'(x) \geq 0$.

所以 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增.

又因为 $f(0) = 1$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有 0 个零点.

又因为 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有 0 个零点.

当 $0 < a < 1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $\cos x = -a$.

由 $-1 < -a < 0$ 可知存在唯一 $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 使得 $\cos x_0 = -a$.

所以当 $x \in [0, x_0)$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (x_0, \pi)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

$$\text{因为 } f(0) = 1, f(x_0) > 1, f(\pi) = \frac{1}{2}a\pi^2 - 1.$$

① 当 $\frac{1}{2}a\pi^2 - 1 > 0$, 即 $\frac{2}{\pi^2} < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有 0 个零点.

由 $f(x)$ 是偶函数知 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有 0 个零点.

② 当 $\frac{1}{2}a\pi^2 - 1 \leq 0$, 即 $0 < a \leq \frac{2}{\pi^2}$ 时, $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有 1 个零点.

由 $f(x)$ 是偶函数知 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有 2 个零点.

综上, 当 $0 < a \leq \frac{2}{\pi^2}$ 时, $f(x)$ 有 2 个零点; 当 $a > \frac{2}{\pi^2}$ 时, $f(x)$ 有 0 个零点. 14 分

(20) (共 13 分)

解: (I) 1 或 12. 4 分

(II) ① 当 $n = 1, 2$ 时, $a_1 = 1$ 为奇数, $a_1 \leq \lambda$ 成立, $a_2 = 1 + \lambda$ 为偶数, $a_2 \leq 2\lambda$ 成立.

② 假设当 $n = k$ 时, 若 a_k 为奇数, 则 $a_k \leq \lambda$, 若 a_k 为偶数, 则 $a_k \leq 2\lambda$.

那么 $n = k + 1$ 时, 若 a_k 是奇数, 则 $a_{k+1} = a_k + \lambda$ 是偶数, $a_{k+1} \leq 2\lambda$;

若 a_k 是偶数, 则 $a_{k+1} = \frac{a_k}{2} \leq \lambda$.

此时若 a_{k+1} 是奇数, 则满足 $a_{k+1} \leq \lambda$, 若 a_{k+1} 是偶数, 则满足 $a_{k+1} \leq \lambda \leq 2\lambda$.

即 $n = k + 1$ 时结论也成立.

综上, 若 a_n 为奇数, 则 $a_n \leq \lambda$; 若 a_n 为偶数, 则 $a_n \leq 2\lambda$ 9 分

(Ⅲ)由(Ⅱ)知, $\{a_n\}$ 中总存在相等的两项, 不妨设 $a_r = a_s$ ($r < s$) 是相等两项中角标最小的两项, 下证 $r=1$. 假设 $r \geq 2$.

①若 $a_r = a_s \leq \lambda$, 由 $a_{r-1} > 0, a_{s-1} > 0$ 知 a_r 和 a_s 均是由 a_{r-1} 和 a_{s-1} 除以 2 得到, 即有 $a_{r-1} = a_{s-1}$, 与 r 的最小性矛盾;

②若 $a_r = a_s > \lambda$, 由 $a_{r-1} \leq 2\lambda, a_{s-1} \leq 2\lambda$ 知 a_r 和 a_s 均是由 a_{r-1} 和 a_{s-1} 加上 λ 得到, 即有 $a_{r-1} = a_{s-1}$, 与 r 的最小性矛盾;

综上, $r=1$, 则 $a_s = a_1 = 1$.

即若 $a=1, \lambda$ 是正奇数, 则存在正整数 n ($n \geq 2$), 使得 $a_n = 1$ 13 分