# 2023年深圳市高三年级第一次调研考试

# 数学试题参考答案及评分标准

2023. 2

本试卷22小题，满分150分。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | B | D | D | A | C | A | D | B |

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

| 题号 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| 答案 | AD | BC | BCD | ACD |

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. $-10$　　14. $\frac{1}{3}$

15. $(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$（注：答案不唯一，还可能的答案有$(\frac{2}{5},\frac{1}{2})$，$(\frac{3}{8},\frac{1}{2})$等，函数零点$x\approx 0.41868622$）

16. $(x-a)^2+(y+a^2)^2=a^2+a^4$，$\frac{4}{5}$

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10分）

解：（1）当$n=1$时，$a_1=\frac{a_1}{2}+2$，$a_1=4$；当$n=2$时，$a_1+a_2=\frac{a_2}{2}+5$，$a_2=2$．

所以$a_1+a_2=6$．　……2分

因为$S_n=\frac{a_n}{2}+n^2+1$　①，　所以$S_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{2}+(n+1)^2+1$　②．

②−①得，$a_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{2}-\frac{a_n}{2}+(n+1)^2-n^2$，整理得$a_n+a_{n+1}=4n+2$，$n\in\mathbf{N}^*$．

所以$(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})=[4(n+1)+2]-(4n+2)=4$（常数），$n\in\mathbf{N}^*$．　……4分

所以$\{a_n+a_{n+1}\}$是首项为6，公差为4的等差数列．　……5分

（2）由（1）知，$a_{n-1}+a_n=4(n-1)+2=4n-2$，$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$．　……6分

当$n$为偶数时，$S_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)=\dfrac{\frac{n}{2}(6+4n-2)}{2}$

$=n^2+n$；　……7分

当$n$为奇数时，$S_n=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)=4+\dfrac{\frac{n-1}{2}(10+4n-2)}{2}$

$=n^2+n+2$．……………………………………………………9分

综上所述，$S_n=\begin{cases}n^2+n, & 当n为偶数时,\\ n^2+n+2, & 当n为奇数时.\end{cases}$ ……………………………10分

18.（12分）

**解**：（1）由已知得，$b+c=\sqrt{3}a\sin C+a\cos C$，……………………………………1分

由正弦定理可得，$\sin B+\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin C+\sin A\cos C$，……………………………2分

因为$A+B+C=\pi$，所以$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$．代入上式，整理得

$\cos A\sin C+\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin C$，……………………………………………………3分

又因为$C\in(0,\pi)$，$\sin C\neq 0$，所以$\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，即$\sin(A-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$．…………5分

而$-\dfrac{\pi}{6}<A-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，所以$A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，$A=\dfrac{\pi}{3}$．……………………………………6分

（2）在$\triangle ACD$中，由余弦定理得，$CD^2=b^2+\dfrac{c^2}{4}-2b\cdot\dfrac{c}{2}\cos A$．

而$A=\dfrac{\pi}{3}$，$CD=a$，所以$a^2=b^2+\dfrac{c^2}{4}-\dfrac{bc}{2}$．①……………………………………8分

在$\triangle ABC$中，由余弦定理得，$a^2=b^2+c^2-bc$，②……………………………………10分

由①②两式消去$a$，得$3c^2=2bc$，所以$b=\dfrac{3c}{2}$．

又$b-c=1$，解得$b=3$，$c=2$．………………………………………………………11分

所以$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$．……………………………………………12分

19.（12分）

**证明**：（1）连接$DB$交$AC$于点$O$，连接$PO$．

因为$ABCD$是菱形，所以$BD\perp AC$，且$O$为$BD$的中点．…………………………1分

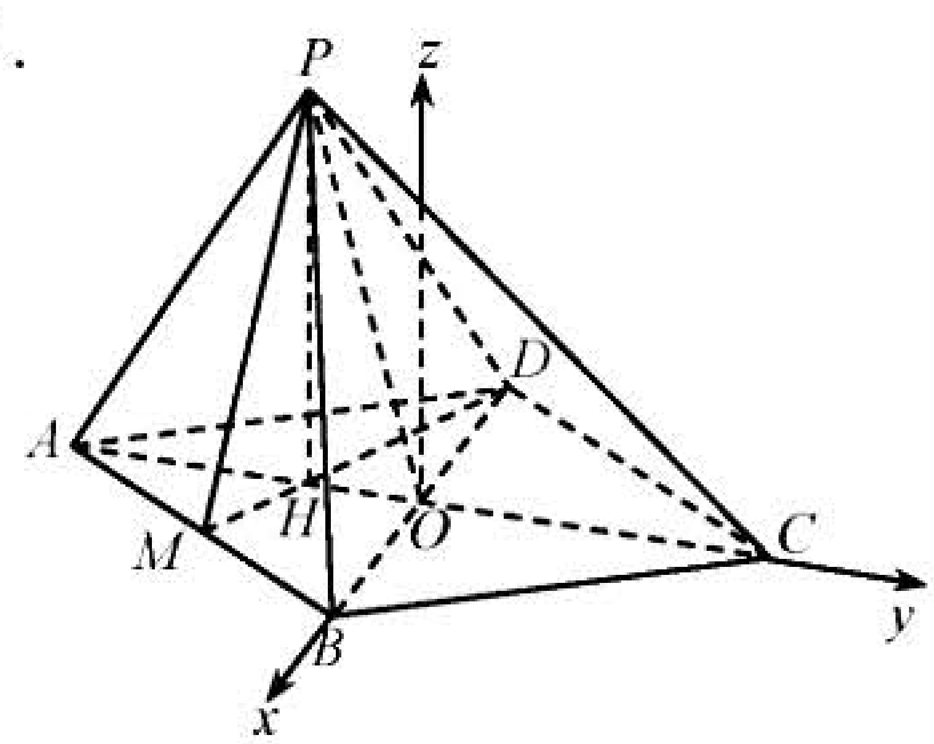
因为$PB=PD$，所以$PO\perp BD$．……………………………………………2分

又因为$AC,PO\subset$平面$APC$，且$AC\cap PO=O$，

所以$BD\perp$平面$APC$．……………………………………………………………3分

又$BD\subset$平面$ABCD$，所以，平面$APC\perp$平面$ABCD$．……………………………5分

**解**：（2）取$AB$中点$M$，连接$DM$交$AC$于点$H$，连接$PH$．




因为$\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$，所以$\triangle ABD$是等边三角形，

所以$DM\perp AB$．

又因为$PD\perp AB$，所以$AB\perp$平面$PDM$．

所以$AB\perp PH$．

由（1）知 $BD\perp PH$，且 $AB\cap BD=B$，所以 $PH\perp$ 平面 $ABCD$． ………………6 分

由 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，在△ $ABC$ 中，$AH=\dfrac{AM}{\cos 30^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$AO=AB\cdot\cos 30^\circ=\sqrt{3}$．

由 $AP\perp PC$，在△ $APC$ 中，

$PH^2=AH\cdot HC=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=\dfrac{8}{3}$，所以 $PH=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$． ………………………………7 分

（法一）以 $O$ 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 分别为 $x$ 轴、$y$ 轴建立如图所示空间直角坐标系，

则 $A(0,-\sqrt{3},0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$H(0,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0)$，$P(0,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CB}=(1,-\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BP}=(-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$． ……………………………8 分

设平面 $PAB$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BP}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x_1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_1+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}z_1=0\\ x_1+\sqrt{3}y_1=0\end{cases}$，令 $y_1=1$ 得 $\boldsymbol{n}_1=(-\sqrt{3},1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$． …………9 分

设平面 $PBC$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BP}=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x_2-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_2+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}z_2=0\\ x_2-\sqrt{3}y_2=0\end{cases}$，令 $y_2=1$ 得 $\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3},1,\sqrt{2})$． …………10 分

设平面 $PAB$ 与平面 $PBC$ 的夹角为 $\theta$．

所以，$\cos\theta=|\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{|-\sqrt{3}\times\sqrt{3}+1\times1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}|}{\sqrt{(\sqrt{-3})^2+1^2+(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2}\times\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2+(\sqrt{2})^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

所以，平面 $PAB$ 与平面 $PBC$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$． ………………………………………………12 分

（法二）因为 $PB=PA=\sqrt{PH^2+AH^2}=2$，$PC=\sqrt{AC^2-PA^2}=2\sqrt{2}$，

所以，$PB^2+BC^2=PC^2$，所以 $PB\perp BC$． ……………………………………………………8 分

取 $PB$ 中点 $N$，过点 $N$ 作 $NQ//BC$ 且交 $PC$ 于点 $Q$，连接 $AN$，$AQ$．

因为△ $APB$ 是等边三角形，所以 $AN\perp PB$．

又因为 $NQ//BC$，所以 $NQ\perp PB$，

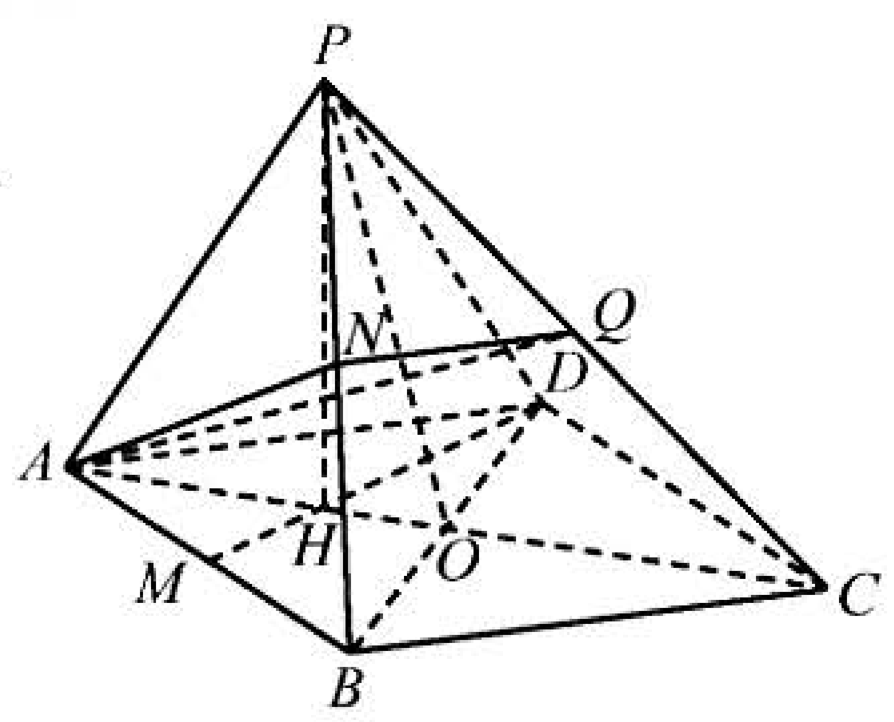
所以 $\angle ANQ$ 为二面角 $C-PB-A$ 的平面角． ……………10 分

在△ $APB$ 中，$AN=AB\cdot\sin 60^\circ=\sqrt{3}$．

在△ $BPC$ 中，$NQ=\dfrac{1}{2}BC=1$．

在△ $APC$ 中，$AQ=\sqrt{PA^2+PQ^2}=\sqrt{6}$．

所以，$\cos\angle ANQ=\dfrac{AN^2+NQ^2-AQ^2}{2AN\cdot NQ}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，



所以，平面$PAB$与平面$PBC$夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$．……………………………………12分

20.（12分）

**解**：（1）每次摸到白球的概率$p_1=\frac{2}{3}$，摸到黑球的概率为$p_2=\frac{1}{3}$．……………………2分

每名员工两次摸到的球的颜色不同的概率$p_3=C_2^1 p_1 p_2=\frac{4}{9}$．……………………4分

由题意，该部门9名员工中按方式Ⅰ回答问卷的人数$X\sim B(9,p_3)$．

所以，$X$的数学期望$E(X)=np=9p_3=4$．……………………………………6分

（2）记事件$A$为"按方式Ⅰ回答问卷"，事件$B$为"按方式Ⅱ回答问卷"，事件$C$为"在问卷中画○"．

由（1）知$P(A)=\frac{4}{9}$，$P(B)=1-P(A)=\frac{5}{9}$，

$P(A)P(C\mid A)=P(AC)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$．……………………………………9分

又$P(C)=\frac{4}{4+5}=\frac{4}{9}$，

由全概率公式$P(C)=P(A)P(C\mid A)+P(B)P(C\mid B)$，得$\frac{4}{9}=\frac{2}{9}+\frac{5}{9}P(C\mid B)$，

解得$P(C\mid B)=\frac{2}{5}=0.4$．……………………………………11分

所以，根据调查问卷估计，该企业员工对新绩效方案的满意度为40%．……………12分

21.（12分）

**解**：（1）（法1）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$．

联立直线$l$与双曲线$E$的方程，得$\begin{cases}y=kx-3\\x^2-4y^2=4\end{cases}$，……………………………………1分

消去$y$，得$(1-4k^2)x^2+24kx-40=0$．

由$\Delta=160-64k^2>0$且$1-4k^2\neq0$，得$k^2<\frac{5}{2}$且$k^2\neq\frac{1}{4}$．

由韦达定理，得$x_1+x_2=\frac{-24k}{1-4k^2}$，$x_1x_2=\frac{-40}{1-4k^2}$．……………………………………2分

所以$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-12k}{1-4k^2}$，$y_0=kx_0-3=\frac{-12k^2}{1-4k^2}-3=\frac{-3}{1-4k^2}$．

由$\begin{cases}x_0=\dfrac{-12k}{1-4k^2}\\y_0=\dfrac{-3}{1-4k^2}\end{cases}$消去$k$，得$x_0^2=4y_0^2+12y_0$．……………………………………4分

由$k^2<\frac{5}{2}$且$k^2\neq\frac{1}{4}$，得$y_0\leqslant-3$或$y_0>\frac{1}{3}$．

所以，点$M$的轨迹方程为$x^2=4y^2+12y$，其中$y\leqslant-3$或$y>\frac{1}{3}$．……………………6分

（法2）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$．

（i）当 $k=0$ 时，易得 $M(0,-3)$．

（ii）当 $k\neq 0$ 时，$x_0\neq 0$，

由 $\begin{cases}x_1^2-4y_1^2=4\\x_2^2-4y_2^2=4\end{cases}$，两式相减，整理得 $x_1+x_2=4(y_1+y_2)\cdot\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$． ……………………2 分

而 $x_1+x_2=2x_0$，$y_1+y_2=2y_0$，$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k=\dfrac{y_0+3}{x_0}$，

所以 $x_0=4y_0\cdot\dfrac{y_0+3}{x_0}$， 即 $x_0^2=4y_0^2+12y_0$． ……………………4 分

综上，点 $M$ 的轨迹方程为 $x^2=4y^2+12y$（除去 $0\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{3}$ 的一段）． ……………………6 分

（2）（法 1）双曲线 $E$ 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$．

设 $C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，联立 $\begin{cases}y=\dfrac{1}{2}x\\y=kx-3\end{cases}$

得 $x_3=\dfrac{6}{2k-1}$，同理可得 $x_4=\dfrac{6}{2k+1}$， ……………………7 分

因为 $\dfrac{x_3+x_4}{2}=\dfrac{-12k}{1-4k^2}=x_0$，

所以，线段 $AB$ 的中点 $M$ 也是线段 $CD$ 的中点．

所以，$A$、$B$ 为线段 $CD$ 的两个三等分点 $\Leftrightarrow|CD|=3|AB|$． ……………………9 分

即 $\sqrt{1+k^2}\,|x_3-x_4|=3\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$，$|x_3-x_4|=3|x_1-x_2|$．

而 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{(\dfrac{-24k}{1-4k^2})^2+\dfrac{160}{1-4k^2}}$，

$|x_3-x_4|=|\dfrac{6}{2k-1}-\dfrac{6}{2k+1}|=\dfrac{12}{|4k^2-1|}$．

所以，$\dfrac{12}{|4k^2-1|}=3\sqrt{(\dfrac{-24k}{1-4k^2})^2+\dfrac{160}{1-4k^2}}$，解得 $k=\pm\dfrac{3}{2}$，

所以，存在实数 $k=\pm\dfrac{3}{2}$，使得 $A$、$B$ 是线段 $CD$ 的两个三等分点． ……………………12 分

（法 2）双曲线 $E$ 的渐近线方程为 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=0$．设 $C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，

联立直线 $l$ 与双曲线 $E$ 的渐近线方程，得 $\begin{cases}y=kx-3\\x^2-4y^2=0\end{cases}$，

消去 $y$，得 $(1-4k^2)x^2+24kx-36=0$． ……………………7 分

由韦达定理，得线段 $CD$ 的中点横坐标为 $\dfrac{x_3+x_4}{2}=\dfrac{-12k}{1-4k^2}=x_0$．

所以，线段 $AB$ 的中点 $M$ 也是线段 $CD$ 的中点．

所以，$A$、$B$ 为线段 $CD$ 的两个三等分点 $\Leftrightarrow|CD|=3|AB|$． ……………………9 分

所以，$\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{\sqrt{(24k)^2+4\times36\times(1-4k^2)}}{|1-4k^2|}=3\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{\sqrt{(24k)^2+4\times40\times(1-4k^2)}}{|1-4k^2|}$

解得 $k=\pm\dfrac{3}{2}$，

所以，存在实数 $k=\pm\dfrac{3}{2}$，使得 $A$ 、$B$ 是线段 $CD$ 的两个三等分点．……………………12 分

22．（12 分）

解：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=\dfrac{x+4}{e^x}$，定义域为 $\mathbf{R}$ ．……………………………………1 分

$f'(x)=-\dfrac{x+3}{e^x}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-3$．……………………………………2 分

当 $x<-3$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>-3$ 时，$f'(x)<0$．

所以，$f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,-3)$，单调减区间为 $(-3,+\infty)$ ．…………………………3 分

（2）函数 $f(x)$ 的不动点即为方程 $f(x)-x=0$ 的根，即方程 $\dfrac{a(x+4)}{e^x}-x=0$ 的根．

显然，$x=-4$ 不是方程 $\dfrac{a(x+4)}{e^x}-x=0$ 的根，所以 $\dfrac{a(x+4)}{e^x}-x=0\Leftrightarrow\dfrac{xe^x}{x+4}-a=0$．

记 $F(x)=\dfrac{xe^x}{x+4}-a$（$x\neq-4$），因为 $F'(x)=\dfrac{(x+2)^2e^x}{(x+4)^2}\geqslant0$（当且仅当 $x=-2$ 取等号），

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,-4)$ 和 $(-4,+\infty)$ 上均单调递增．……………………………………………5 分

由 $F(x)=\dfrac{xe^x-a(x+4)}{x+4}$，记 $h(x)=xe^x-a(x+4)$．

①当 $a>0$ 时，

（i）当 $x\in(-\infty,-4)$ 时，$h(-4)=\dfrac{-4}{e^4}<0$，$h(-4-\dfrac{1}{ae})>0$（可证 $xe^x\geqslant-\dfrac{1}{e}$，利用放缩可得），

存在 $t_1\in(-\infty,-4)$，使得 $h(t_1)=0$，即存在唯一 $t_1\in(-\infty,-4)$ 使得 $F(t_1)=0$；

注：也可通过 $x\to-\infty$ 时，$F(x)\to-a$，$x\to-4$ 且 $x<-4$ 时，$F(x)\to+\infty$，存在唯一 $t_1\in(-\infty,-4)$ 使得 $F(t_1)=0$．

（ii）当 $x\in(-4,+\infty)$ 时，$h(0)=-4a<0$，$h(4a)>0$（可证 $e^x\geqslant x+1$），

存在 $t_2\in(0,+\infty)$，使得 $h(t_2)=0$，即存在唯一 $t_2\in(0,+\infty)$ 使得 $F(t_2)=0$．……………………7 分

②当 $a<0$ 时，

（i）当 $x\in(-\infty,-4)$ 时，$F(x)=\dfrac{xe^x}{x+4}-a>0$ 无零点；

（ii）当 $x\in(-4,+\infty)$ 时，因为 $h(0)=-4a>0$，$h(-4)=\dfrac{-4}{e^4}<0$，存在 $t_0\in(-4,0)$，使得 $h(t_0)=0$，

即存在唯一 $t_0\in(-4,+\infty)$ 使得 $F(t_0)=0$．

注：也可通过 $x\to-4$ 且 $x>-4$ 时，$F(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$ 时，$F(x)\to+\infty$，存在唯一 $t_0\in(-4,+\infty)$ 使得 $F(t_0)=0$．

综上所述，当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 有两个“不动点”$t_1$，$t_2$；

当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 有一个“不动点” $t_0$． ……………………………………8 分

（3）由（2）知 $f(f(x))-f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=t_i$（其中 $i\in\{0,1,2\}$）．

由 $F(t_i)=0 \Rightarrow a=\dfrac{t_i e^{t_i}}{t_i+4}$，代入得 $\dfrac{x+4}{e^x}=\dfrac{t_i+4}{e^{t_i}}$．

记 $G(x)=\dfrac{x+4}{e^x}$，由（1）知，当 $x\in(-\infty,-4]$ 时，函数 $G(x)$ 单调递增，且 $G(x)\in(-\infty,0]$；

当 $x\in(-4,-3)$ 时，函数 $G(x)$ 单调递增，且 $G(x)\in(0,e^3)$；

当 $x\in(-3,+\infty)$ 时，函数 $G(x)$ 单调递减，且 $G(x)\in(0,e^3)$．

由 $G(x)=G(t_1)<0$ 可得 $x=t_1$；$G(x)=G(t_2)>0$ 可得 $x=t_2,x_0$，共三个解． …………10 分

所以，$F(t)$ 有一个零点 $t_0$．所以 $f(f(x))-f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=t_0$，由 $F(t_0)=0 \Rightarrow a=\dfrac{t_0 e^{t_0}}{t_0+4}$，

代入得 $\dfrac{x+4}{e^x}=\dfrac{t_0+4}{e^{t_0}}$，由（1）知，

当 $t_0=-3$，即 $a=-\dfrac{3}{e^3}$ 时，$G(x_1)=G(t_0)$ 的解为 $t_0$；

当 $t_0\neq-3$，即 $a<0$ 且 $a\neq-\dfrac{3}{e^3}$ 时，所 $G(x_1)=G(t_0)$ 的解为 $x_1$，$t_0$．

综上所述，当 $a<0$ 且 $a\neq-\dfrac{3}{e^3}$ 时方程有两个不同实数根． ……………………………………12 分

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ″ 精益求精、专业严谨 ″ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。