2023 北京理工大附中高二 10 月月考

数　　学

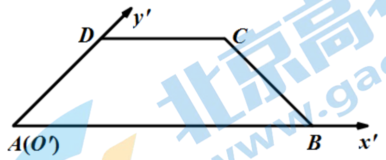
（时间 90 分钟，满分 100 分）

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.）

1. 若点 A 在直线 b 上，b 在平面 β 上，则点 A，直线 b，平面 β 之间的关系可以记作（　）

A. $A\in b\in\beta$　　B. $A\in b\subset\beta$　　C. $A\subset b\subset\beta$　　D. $A\subset b\in\beta$

2. 如图，一个水平放置的平面图形的直观图（斜二测画法）是一个底角为 45°、腰和上底长均为 2 的等腰梯形，则这个平面图形的面积是



A. $2+\sqrt{2}$　　B. $1+\sqrt{2}$　　C. $4+2\sqrt{2}$　　D. $8+4\sqrt{2}$

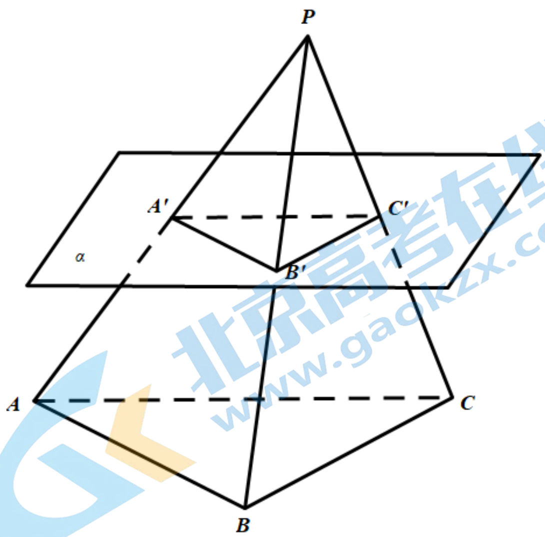
3. 已知圆锥的底面半径为1，且它的侧面开展图是一个半圆，则这个圆锥的体积为（　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$　　B. $\sqrt{3}\pi$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}\pi$　　D. $\sqrt{5}\pi$

4. 已知平面 α // 平面 β，过平面 α 内的一条直线 a 的平面 γ，与平面 β 相交，交线为直线 b，则 a、b 的位置关系是（　）

A. 平行　　B. 相交　　C. 异面　　D. 不确定

5. 已知 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点，平面 α // 平面 ABC，且 α 交线段 PA，PB，PC 于点 A',B',C'，若 $PA':AA'=2:3$，则 $S_{\triangle A'B'C'}:S_{\triangle ABC}=$（　）



A. 2：3　　B. 2：5　　C. 4：9　　D. 4：25

6. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 为上底面 A_1C_1 的中心，若 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AA_1}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则 x，y 的值是

A. $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$　　B. $x=1$，$y=\frac{1}{2}$

C. $x=\frac{1}{2}$，$y=1$　　D. $x=1$，$y=1$

7. 给出下列命题，其中假命题是（　）

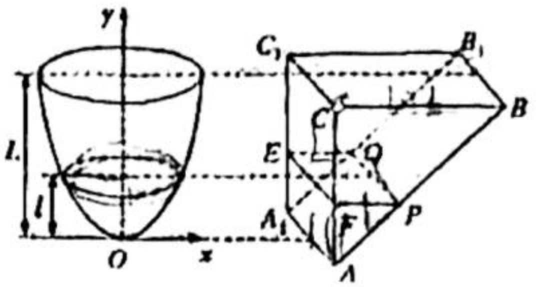
A. 棱柱的侧棱都相等，侧面都是全等的平行四边形

B. 若三棱锥的三条侧棱两两垂直，则其三个侧面也两两垂直

C. 在四棱柱中，若两个过相对侧棱的截面都垂直于底面，则该四棱柱为直四棱柱

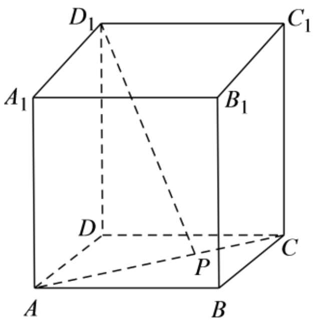
D. 存在每个面都是直角三角形的四面体

8. 我国南北朝时期的科学家祖暅，提出了计算体积的祖暅原理：“幂势既同，则积不容异.”意思是“如果两个等高的几何体在等高处的水平截面的面积恒等，那么这两个几何体的体积相等.”利用此原理求以下几何体的体积，如图，曲线 $y=x^2(0\le y\le L)$ 和直线 $y=L$ 围成的封闭图形绕 y 轴旋转一周得几何体 Z，将 Z 放在与 y 轴垂直的水平面 α 上，用平行于平面 α，且与 Z 的顶点 O 距离为 l 的平面截几何体 Z，得截面圆的面积为 $\pi\left(\sqrt{l}\right)^2=\pi l$.由此构造右边的几何体 Z_1（三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$），其中 $AC\perp\alpha$，平面 $BB_1C_1C//\alpha$，平面 $EFPQ//\alpha$，$AC=L$，$AA_1\subset a$，$AA_1=\pi$，Z_1 与 Z 在等高处的截面面积都相等，图中 $EFPQ$ 和 BB_1C_1C 为矩形，且 $PQ=\pi$，$FP=l$，则几何体 Z_1 的体积为（　）



A. πL^2　　B. πL^3　　C. $\frac{1}{2}\pi L^2$　　D. $\frac{1}{2}\pi L^3$

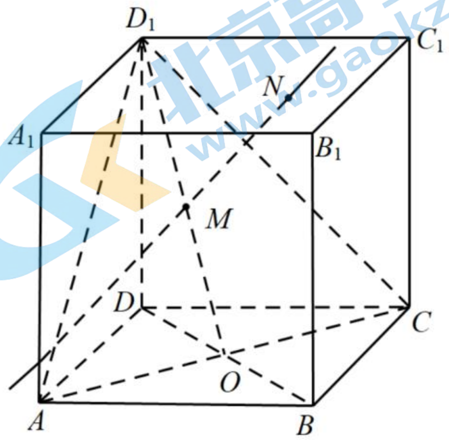
9. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 在面对角线 AC 上运动，下列四个命题中错误的是（　）



A. $D_1P //$ 平面 A_1BC_1　　B. 平面 $PDB_1 \perp$ 平面 A_1BC_1

C. 三棱锥 A_1-BPC_1 的体积不变　　D. $D_1P \perp BD$

10. 如图所示，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1， $BD \cap AC = O$ ， M 是线段 D_1O 上的动点，过点 M 作平面 ACD_1 的垂线交平面 $A_1B_1C_1D_1$ 于点 N ，则点 N 到点 A 距离的最小值为

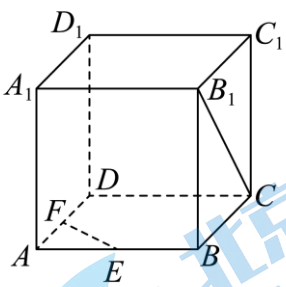


A. $\sqrt{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. 1

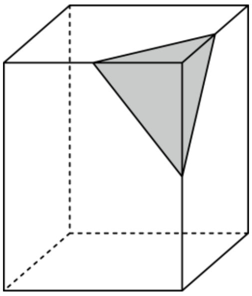
二、填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.）

11. 已知两个球的半径之比为 2：3，则它们的表面积之比为__________，体积之比为__________.

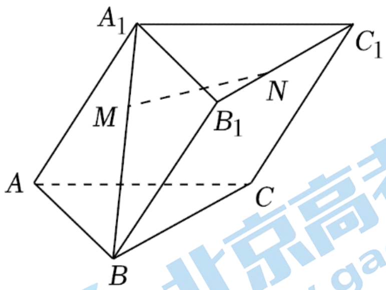
12. 如图所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别是 AB、AD 的中点，则异面直线 B_1C 与 EF 所成的角的大小为________.



13. 如图，将一个长方体用过相邻三条棱的中点的平面截出一个棱锥，则该棱锥的体积与原长方体体积的比为__________.



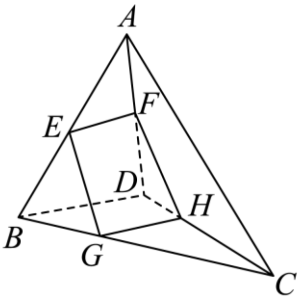
14. 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，M，N 分别是 A_1B， B_1C_1 上的点，且 $BM=2A_1M$， $C_1N=2B_1N$.设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$， $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$.用 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{MN}$ 为____________.



15. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，侧棱 $AA_1=\sqrt{2}$，过 BD_1 作平面 α 分别交棱 AA_1，CC_1 于 E，F，则四边形 BFD_1E 面积的最小值为________.

三、解答题共 4 题，共 40 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

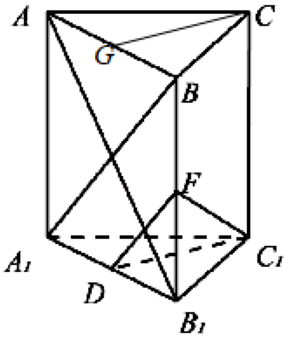
16. 如图，在空间四边形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是 AB 、 AD 的中点，G ， H 分别在 BC ， CD 上，且 $BG:GC=DH:HC=1:2$.



（1）求证： $EF//GH$ ；

（2）设 EG 与 FH 交于点 P ，求证： P,A,C 三点共线.

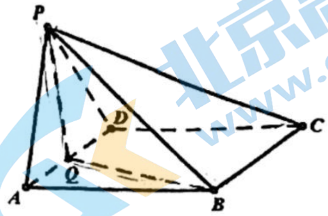
17. 如图，在直三棱柱： $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AC=BC=1$， $\angle ACB=90^{\circ}$， D 是 A_1B_1 的中点， F 在 BB_1 上， G 为 AB 中点.



（1）求证：$CG//$ 平面 C_1DF；

（2）在下列给出的三个条件中选取哪两个条件可使 $AB_1 \perp$ 平面 C_1DF？并证明你的结论.① F 为 BB_1 的中点；② $AB_1=\sqrt{3}$；③ $AA_1=\sqrt{2}$.

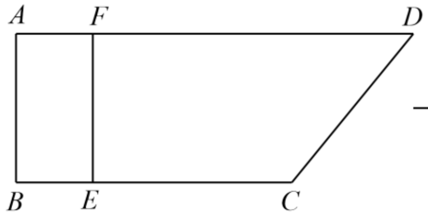
18. 如图示，正方形 $ABCD$ 与正三角形 ADP 所在平面互相垂直，Q 是 AD 的中点.

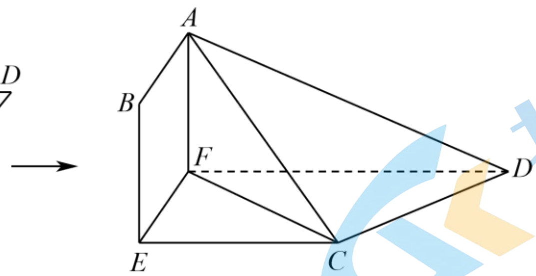


（1）求证：$PQ \perp BQ$；

（2）在线段 AB 上是否存在一点 N，使面 $PCN \perp$ 面 PQB？并证明你的结论.

19. 如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB \perp AD$，$AD//BC$，$AD=6$，$BC=2AB=4$，E，F 分别在 BC，AD 上，$EF//AB$，现将四边形 $ABCD$ 沿 EF 折起，使 $BE \perp EC$.





（1）若 $BE=1$，在折叠后的线段 AD 上是否存在一点 P，使得 $CP//$ 平面 $ABEF$？若存在，求出 $\dfrac{AP}{PD}$ 的值；若不存在，说明理由.

（2）求三棱锥 $A-CDF$ 的体积的最大值，并求出此时点 F 到平面 ACD 的距离.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.）

1.【答案】B

【分析】根据空间点线面位置关系的符号语言判断即可.

【详解】点与直线的位置关于用$\in,\notin$表示

直线在平面内或不在平面内用$\subset,\not\subset$表示

由题意可知$A\in b\subset\beta$

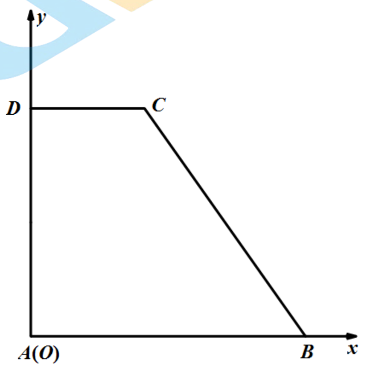
故选:B.

2.【答案】D

【详解】如图所示：由已知斜二测直观图根据斜二测化法规则画出原平面图形

$\therefore$这个平面图形的面积：$\dfrac{4\times\left(2+2+2\sqrt{2}\right)}{2}=8+4\sqrt{2}$，

故选 D.



3.【答案】A

【详解】半径为R的半径卷成一圆锥，

则圆锥的母线长为R，

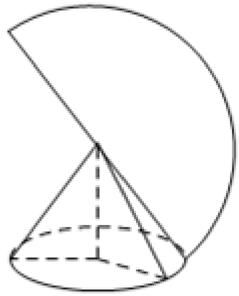
设圆锥的底面半径为r，

则$2\pi r=\pi R$，即$r=1$，

$\therefore$圆锥的高$h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore$圆锥的体积$V=\dfrac{1}{3}\pi\cdot 12\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$，

所以 A 的选项是正确的.



4.【答案】A

【分析】由已知可得出直线a与直线b在同一平面内，且无公共点，即可判断出位置关系.

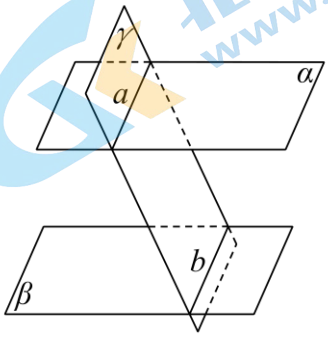
【详解】因为平面$\alpha//$平面β，所以平面α与平面β无公共点，

直线$a\subset$平面α，直线$a\subset$平面γ，

直线$b\subset$平面α，直线$b\subset$平面γ，

所以直线a与直线b在同一平面γ内，且无公共点，故直线$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$.

故选：A.



5.【答案】D

【分析】根据面面平行的性质定理可得，$AB//A'B'$，且$\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{2}{5}$，$BC//B'C'$，进而根据等角定理可得，$\angle B'A'C'=\angle BAC$，$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，即可得出答案.

【详解】由已知可得，平面$\alpha//$平面ABC，平面$PAB\cap\alpha=A'B'$，平面$PAB\cap$平面$ABC=AB$，

根据面面平行的性质定理可得，$AB//A'B'$，且$\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{PA'}{PA}=\dfrac{2}{5}$.

同理可得，$BC//B'C'$，$AC//A'C'$.

根据等角定理可得，$\angle B'A'C'=\angle BAC$，$\angle A'B'C'=\angle ABC$，$\angle A'C'B'=\angle ACB$，

所以，$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

所以，$S_{\triangle A'B'C'}:S_{\triangle ABC}=\left(A'B'\right)^2:\left(AB\right)^2=4:25$.

故选：D.

6.【答案】A

【详解】试题分析：根据题意，结合正方体的性质，可知$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1E}=\overrightarrow{AA_1}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{A_1B_1}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{A_1D_1}$

$=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,所以有 $x=\frac{1}{2}$， $y=\frac{1}{2}$，故选 A.

考点：空间向量的分解.

7.【答案】A

【分析】根据棱柱的结构特征、概念，即可判断 A、B 项；举例即可说明 C、D 项.

【详解】对于 A 项，根据棱柱的定义可得，棱柱的侧棱都相等，侧面都是平行四边形，但是不一定全等，故 A 项错误；

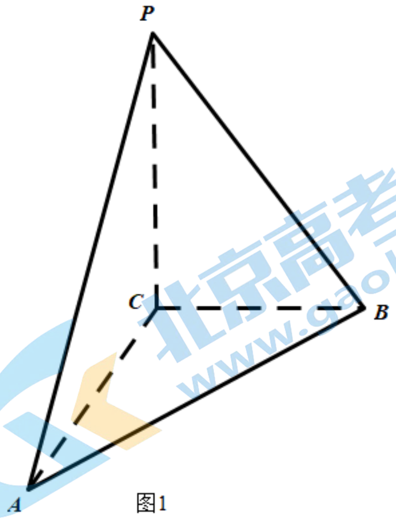


图1

对于 B 项，如图 1，$CA\perp CP$， $CA\perp CB$， $CP\perp CB$.

因为 $CA\perp CP$， $CA\perp CB$， $CP\subset$平面 PBC， $CB\subset$平面 PBC，

所以 $CA\perp$平面 PBC.

又 $CA\subset$平面 PAC，所以平面 $PAC\perp$平面 PBC.

同理可得，平面 $ABC\perp$平面 PBC，平面 $PAC\perp$平面 ABC，故 B 项正确；

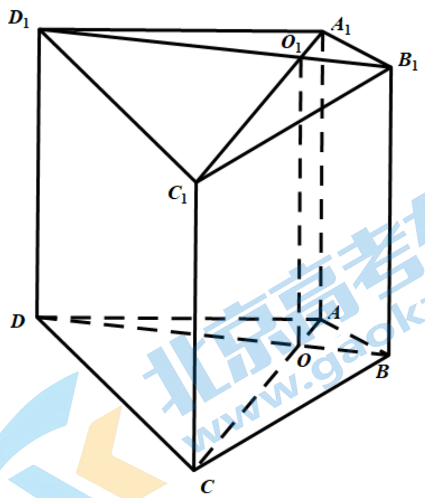


图2

对于 C 项，如图 2，平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 $ABCD$，平面 $BDD_1B_1 \perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $ACC_1A_1 \cap$ 平面 $BDD_1B_1 = OO_1$，

所以，$OO_1 \perp$ 平面 $ABCD$.

又易知 $OO_1 // AA_1$，所以 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$，故 C 项正确；

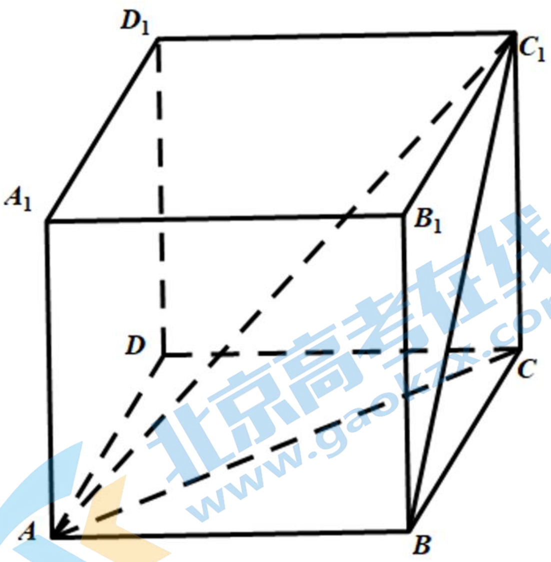


图 3

对于 D 项，如图 3，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，三棱锥 C_1-ABC 的四个面均为直角三角形，故 D 项正确.

故选：A.

8.【答案】C

【分析】通过截面面积相等可求得 BC 的长度，再利用三棱柱体积公式即可求解.

【详解】由题意可知：在高为 L 处，几何体 Z 和 Z_1 的截面面积相等，且截面面积为 πL，

$\therefore S_{BB_1C_1C} = \pi L$， $BC = L$，

$\therefore V_{ABC-A_1B_1C_1} = S_{\triangle ABC} \cdot \pi = \dfrac{1}{2}\pi L^2$，

故选：C.

9.【答案】D

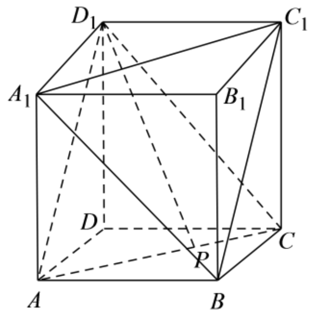
【分析】证明平面 AD_1C // 平面 A_1BC_1 后可判断 A，证明 $DB_1 \perp$ 平面 A_1BC_1 后可判断 B，由 $AC //$ 平面 A_1BC_1 可判断 C，取 P 是 AC 与 BD 交点时可判断 D.

【详解】A．连接 $AD_1, CD_1, A_1B, BC_1, A_1C_1$，如图，正方体中由 AA_1 与 CC_1 平行且相等得平行四边形 ACC_1A_1，所以 $AC // A_1C_1$，

又 $AC \not\subset$ 平面 A_1BC_1，$A_1C_1 \subset$ 平面 A_1BC_1，所以 $AC //$ 平面 A_1BC_1，同理 $AD_1 //$ 平面 A_1BC_1，

$AC \cap AD_1 = A$， $AC, AD_1 \subset$ 平面 AD_1C，所以平面 AD_1C // 平面 A_1BC_1，

$D_1P \subset$ 平面 AD_1C，所以 D_1P // 平面 A_1BC_1，A 正确；



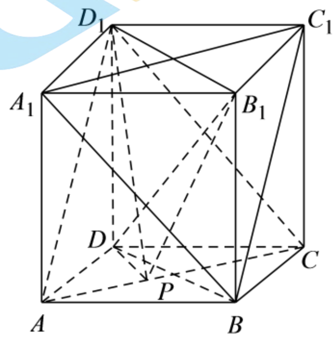
B．连接 BD, B_1D_1，正方体中 $DD_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$， $A_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $DD_1 \perp A_1C_1$，

又正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 中， $A_1C_1 \perp B_1D_1$， $DD_1 \cap B_1D_1 = D_1$， $DD_1, B_1D_1 \subset$ 平面 BB_1D_1D，

所以 $A_1C_1 \perp$ 平面 BB_1D_1D，而 $DB_1 \subset$ 平面 BB_1D_1D，所以 $A_1C_1 \perp DB_1$，同理 $A_1B \perp DB_1$，

$A_1C_1 \cap A_1B = A_1$， $A_1C_1, A_1B \subset$ 平面 A_1BC_1，所以 $DB_1 \perp$ 平面 A_1BC_1，

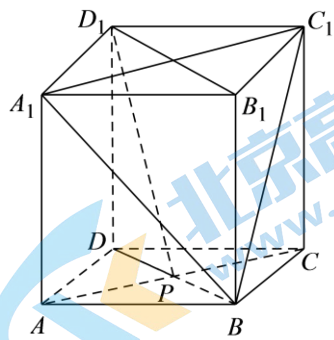
而 $DB_1 \subset$ 平面 PDB_1，所以平面 $PDB_1 \perp$ 平面 A_1BC_1，B 正确；



C．由 A 的证明知 AC // 平面 A_1BC_1， $P \in AC$， P 到平面 A_1BC_1 的距离不变，因此三棱锥 $P - A_1BC_1$ 体积不变，即三棱锥 $A_1 - BPC_1$ 的体积不变，C 正确；

D．当 P 是 AC 与 BD 交点时，矩形 BDD_1B_1 中， D_1P 和 BD 显然不垂直，D 错．

故选：D．



10．【答案】B

【分析】由 $B_1D\perp$ 面 ACD_1 及线面垂直的性质定理确定点 N 的轨迹，由此可求点 N 到点 A 距离.

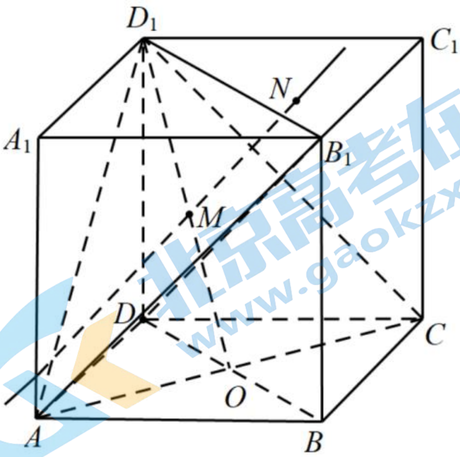
【详解】由 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，得 $B_1D\perp$ 面 ACD_1

因为 $MN\perp$ 面 ACD_1，所以 $B_1D//MN$ （或重合）,所以 B_1D 与 MN 共面

因为 B_1,M,D 都在平面 BDD_1B_1 内，所以 N 点在线段 B_1D_1 上，

则点 N 到点 A 距离的最小值为由 A 向 B_1D_1 作垂线，即为 $\triangle AB_1D_1$ 的一条高

$\triangle AB_1D_1$ 是以边长为 $\sqrt{2}$ 的等边三角形，所以高为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.



故选：B.

二、填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.）

11.【答案】 ①. $\frac{4}{9}$ ②. $\frac{8}{27}$.

【分析】根据球的表面积公式以及体积公式即可求解.

【详解】设两个球的半径为 R,r，由题意可得 $R:r=2:3$，

所以表面积之比为 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{4\pi R^2}{4\pi r^2}=\frac{R^2}{r^2}=\frac{4}{9}$，

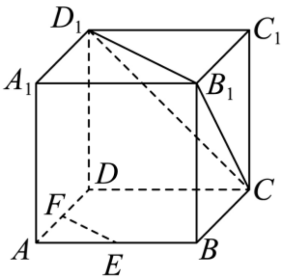
体积之比为 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{R^3}{r^3}=\frac{8}{27}$，

故答案为：$\frac{4}{9},\frac{8}{27}$.

12.【答案】60° ## $\frac{\pi}{3}$

【分析】连接 B_1D_1,D_1C，根据正方体的性质可得：$\angle D_1B_1C$ （或其补角）即为所求，进而求解即可.

【详解】如图，连接 B_1D_1,D_1C，则 $B_1D_1 // EF$，



故$\angle D_1B_1C$（或其补角）即为所求，

又$B_1D_1=D_1C=B_1C$，所以$\angle D_1B_1C=60^\circ$，

故答案为：60°.

13.【答案】$\dfrac{1}{24}$

【分析】根据体积公式计算求解即可；

【详解】设长方体的边长为a,b,c，

$$\frac{V'}{V}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{a}{2}\times\frac{b}{2}\times\frac{c}{2}}{abc}=\frac{1}{24},$$

故答案为：$\dfrac{1}{24}$.

14.【答案】$\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

【分析】根据空间向量基本定理及向量共线定理将$\overline{MN}$转化为$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$即可；

【详解】由题意可得$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1N}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{B_1C_1}$，

$\because\ \overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$，

$\therefore\ \overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}=\vec{c}-\vec{a}$，$\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{A_1C_1}-\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{b}-\vec{a}$，

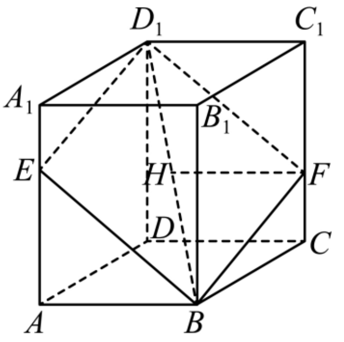
$\therefore\ \overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{3}(\vec{c}-\vec{a})+\vec{a}+\dfrac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a})=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$；

故答案为：$\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

15.【答案】$\sqrt{2}$

【分析】法一：过点F作$FH\perp BD_1$交BD_1于H，设$FH=h$，由$S_{BFD_1E}=2S_{\triangle BFD_1}=2\times\dfrac{1}{2}\times BD_1\times h=2h$求解；法二(射影面积法)：设平面$BFD_1E$与底面$ABCD$的交线为$l$，过$D_1$作$D_1H\perp l$交$l$于$H$.连接$DH$，则$\angle D_1HD$为二面角$D_1$-$l$-$D$的平面角，设为$\theta$，由$S_{BFD_1E}=\dfrac{S_{ABCD}}{\cos\theta}$求解.

【详解】法一：根据题意作图，如图①所示，



图①

过点 F 作 $FH\perp BD_1$ 交 BD_1 于 H，设 $FH=h$.由题意得 $BD_1=2$.

因为长方体对面平行，

所以截面 BFD_1E 为平行四边形，则 $S_{BFD_1E}=2S_{\triangle BFD_1}=2\times\frac{1}{2}\times BD_1\times h=2h$，

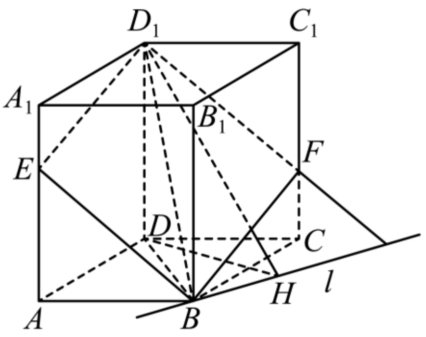
当 h 取最小值时四边形 BFD_1E 的面积最小.

易知 h 的最小值为直线 CC_1 与直线 BD_1 间的距离.

易知当 F 为 CC_1 的中点时，h 取得最小值，$h_{min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\left(S_{BFD_1E}\right)_{\min}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

故四边形 BFD_1E 面积的最小值为 $\sqrt{2}$.

法二(射影面积法)：设平面 BFD_1E 与底面 $ABCD$ 的交线为 l. 如图②，



图②

过 D_1 作 $D_1H\perp l$ 交 l 于 H.连接 DH，则 $\angle D_1HD$ 为二面角 D_1-l-D 的平面角，设为 θ.

根据射影面积公式 $S_{BFD_1E}\cdot\cos\theta=S_{ABCD}$,得 $S_{BFD_1E}=\frac{S_{ABCD}}{\cos\theta}$,

则当 $\cos\theta$ 最大时，S_{BFD_1E} 最小.当 $\cos\theta$ 最大时，分析易知 DH 最长.又 DH 最长为 $DB=\sqrt{2}$，所以 $\cos\theta$ 最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为 $S_{ABCD}=1$，所以四边形 BFD_1E 面积的最小值为 $\sqrt{2}$.

故答案为：$\sqrt{2}$

三、解答题共 4 题，共 40 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16.【答案】（1）证明见解析

（2）证明见解析

【分析】（1）由中位线性质和线段成比例即可得证.

（2）利用两个平面内的公共点在两个平面的交线上，即可得证.

【小问 1 详解】

$\because E$ 、 F 分别是 AB 、 AD 的中点，

$BG:GC=DH:HC=1:2$，

$\therefore EF \parallel BD$， $GH \parallel BD$，

$\therefore EF//GH$.

【小问 2 详解】

因为 $EG\cap FH=P$，

$P\in EG$， $EG\subset$ 平面 ABC，

所以 $P\in$ 平面 ABC，同理 $P\in$ 平面 ADC.

所以 P 是平面 ABC 与平面 ADC 的公共点，

又平面 $ABC\bigcap$ 平面 $ADC=AC$，

所以 $P\in AC$，所以 P,A,C 三点共线

17.【答案】（1）证明见解析

（2）选①③能证明 $AB_1\perp$ 平面 C_1DF :证明见解析

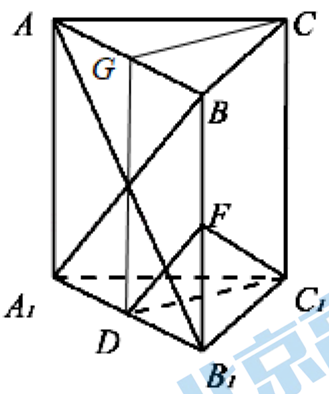
【分析】（1）根据线线平行即可求解，

（2）根据线线垂直，结合线面垂直的判断定理即可证明线面垂直.

【小问 1 详解】

连接 DG，由于 D 是 A_1B_1 的中点，G 为 AB 中点，则 $DG//CC_1$ 且 $DG=CC_1$，故四边形 $DGCC_1$ 为平行四边形，所以 $CG//DC_1$，

又 $CG\not\subset$ 平面 C_1DF , $DC_1\subset$ 平面 C_1DF，故 $CG//$ 平面 C_1DF，



【小问 2 详解】

若选①②，

由于 $AB_1=\sqrt{3}$，则 $AA_1=\sqrt{B_1A^2-A_1B_1^2}=\sqrt{B_1A^2-\left(A_1C_1^2+B_1C_1^2\right)}=1$，

故四边形 ABB_1A_1 为矩形，此时 AB_1 与 BA_1 不垂直，

F 为 BB_1 的中点，D 为 A_1B_1 的中点，故 $BA_1//DF$，故 AB_1 与 DF 不垂直，

因此不可能得到 $AB_1\perp$ 平面 C_1DF；

若选②③

由于 $AC=BC=1$，$\angle ACB=90^{\circ}$，所以 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2}$，

由于三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，所以 $A_1A\perp A_1B_1$，此时不可能满足 $AA_1=\sqrt{2}$，$AB_1=\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{2}$，故无法得到 $AB_1\perp$ 平面 C_1DF；

选①③能证明 $AB_1\perp$ 平面 C_1DF：

连接 DF，A_1B，$\therefore DF//A_1B$，

在 $\triangle ABC$ 中，$AC=BC=1$，$\angle ACB=90^{\circ}$，

则 $AB=\sqrt{2}$，又 $AA_1=\sqrt{2}$，则 $A_1B\perp AB_1$，

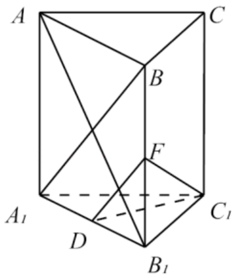
又 $BA_1//DF$，$\therefore DF\perp AB_1$，

由于平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 $B_1A_1C_1$，且两平面的交线为 B_1A_1，$B_1A_1\perp DC_1, DC_1\subset$ 平面 $B_1A_1C_1$

所以 $C_1D\perp$ 平面 AA_1B_1B，$AB_1\subset$ 平面 AA_1B_1B，

$\therefore C_1D\perp AB_1$，又 $DF\cap C_1D=D, DF, C_1D\subset$ 平面 C_1DF，

$\therefore AB_1\perp$ 平面 C_1DF．



18.【答案】(1) 证明见解析

(2) 存在点 N，当 N 为 AB 中点时面 $PCN\perp$ 面 PQB，证明见解析

【分析】(1) 依题意可得 $PQ\perp AD$，由面面垂直的性质得到 $PQ\perp$ 平面 $ABCD$，从而得证；

(2) 当 N 为 AB 中点时，面 $PCN\perp$ 面 PQB，首先证明 $BQ\perp NC$，由线面垂直的性质得到 $PQ\perp NC$，从而得到 $NC\perp$ 平面 PQB，即可得证．

【小问 1 详解】

$\because PA=PD$，Q 为 AD 的中点．

$\therefore PQ\perp AD$，$\because$ 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PQ\subset$ 平面 PAD，

$\therefore PQ\perp$ 平面 $ABCD$，

$\because BQ\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore PQ\perp BQ$．

【小问 2 详解】

存在点 N，当 N 为 AB 中点时，面 $PCN\perp$ 面 PQB；

证明如下：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，Q 为 AD 的中点，则 $\mathrm{Rt}\triangle CBN\cong\mathrm{Rt}\triangle BAQ$，

所以 $\angle ABQ=\angle BCN$，又 $\angle ABQ+\angle CBQ=90^\circ$，所以 $\angle BCN+\angle CBQ=90^\circ$

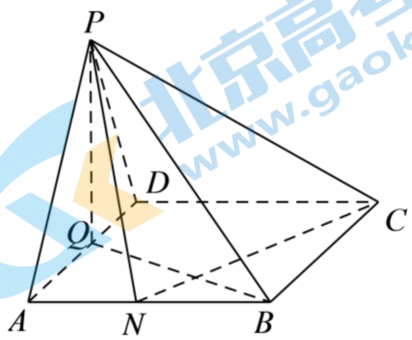
$\therefore BQ\perp NC$，

由（1）知，$PQ\perp$ 平面 $ABCD$，$NC\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PQ\perp NC$，

又 $BQ\cap PQ=Q$，$BQ,PQ\subset$ 平面 PQB，$\therefore NC\perp$ 平面 PQB，

$\because NC\subset$ 平面 PCN，

$\therefore$ 平面 $PCN\perp$ 平面 PQB.



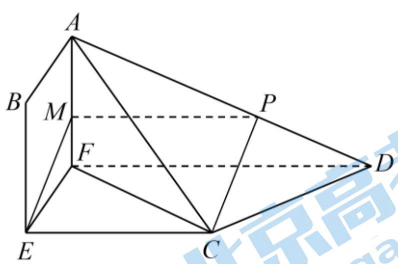
19.【答案】（1）存在，$\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{3}{2}$

（2）三棱锥 A-CDF 的体积的最大值为 3，此时点 F 到平面 ACD 的距离为 $\sqrt{3}$

【分析】(1)在 AD 上取一点 P，使得 $\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{3}{2}$，证明线面平行，则 P 点就是所求的点；

(2)先设 $BE=x$，运用二次函数即可求出三棱锥 $A-CDF$ 的体积最大值，再运用等体积法求出 F 到平面 ACD 的距离.

【小问 1 详解】



AD 上存在一点 P，使得 $CP//$ 平面 $ABEF$，此时 $\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{3}{2}$，

理由如下：当 $\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{3}{2}$ 时，$\dfrac{AP}{AD}=\dfrac{3}{5}$，

如图，过点 P 作 $M // FD$ 交 AF 于点 M，连接 ME，则 $\frac{MP}{FD}=\frac{AP}{AD}=\frac{3}{5}$，

$\because BE=1$，$\therefore FD=5$，$\therefore MP=3$，又 $EC=3$，$MP // FD // EC$，$\therefore MP // EC$，

故四边形 $MPCE$ 为平行四边形，$\therefore CP // ME$，

又 $CP \not\subset$ 平面 $ABEF$，$ME \subset$ 平面 $ABEF$，

$\therefore CP //$ 平面 $ABEF$；

【小问 2 详解】

设 $BE=x$，则 $AF=x(0<x\le 4)$，$FD=6-x$，

故 $V_{A-CDF}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times(6-x)\times x=-\frac{1}{3}(x-3)^2+3$，

$\therefore$ 当 $x=3$ 时，V_{A-CDF} 有最大值，且最大值为 3，

此时 $EC=1$，$AF=3$，$FD=3$，$DC=2\sqrt{2}$，

$\therefore AD=\sqrt{AF^2+FD^2}=3\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{EF^2+EC^2+AF^2}=\sqrt{14}$，

在△ACD 中，由余弦定理得 $\cos\angle ADC=\frac{18+8-14}{2\times 3\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，$\sin\angle ADC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\cdot DC\cdot AD\cdot\sin\angle ADC=3\sqrt{3}$，

设 F 到平面 ACD 的距离为 h，

$V_{A-CDF}=V_{F-ACD}$，$\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ACD}\cdot h=3$，$h=\sqrt{3}$.

综上，存在点 P，使得 $CP//$平面 $ABEF$，$\frac{AP}{PD}=\frac{3}{2}$，三棱锥 $A-CDF$ 的最大值为 3，此时点 F 到平面 ACD 的距离为 $\sqrt{3}$

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！