2018 北京市海淀区高二（上）期末

数学（理）

2018.1

本试卷共 100 分.考试时间 90 分钟.

一. 选择题：本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 直线 $2x+y-1=0$ 在 y 轴上的截距为（　　）

A. -2　　B. -1　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. 1

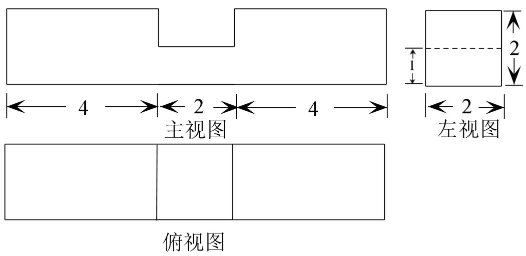
2. 在空间直角坐标系中，已知点 $A(1,0,1)$，$B(3,2,1)$，则线段 AB 的中点的坐标是（　　）

A. $(1,1,1)$　　B. $(2,1,1)$　　C. $(1,1,2)$　　D. $(1,2,3)$

3. 已知圆 $x^2+y^2-3x+m+1=0$ 经过原点，则实数 m 等于（　　）

A. $-\frac{3}{2}$　　B. -1　　C. 1　　D. $\frac{3}{2}$

4. 鲁班锁是曾广泛流传于民间的智力玩具，它起源于中国古代建筑中首创的榫卯结构, 不用钉子和绳子，完全靠自身结构的连接支撑. 它看似简单，却凝结着不平凡的智慧. 下图为鲁班锁的其中一个零件的三视图，则该零件的体积为（　　）



A. 32　　B. 34

C. 36　　D. 40

5. 已知平面 α,β，直线 m,n，下列命题中假命题是（　　）

A. 若 $m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，则 $\alpha\parallel\beta$　　B. 若 $m\parallel n$，$m\perp\alpha$，则 $n\perp\alpha$

C. 若 $m\perp\alpha$，$m\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$　　D. 若 $m\parallel\alpha$，$\alpha\parallel\beta$，$n\subset\beta$，则 $m\parallel n$

6. 椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 的焦点为 F_1，F_2，若点 M 在 C 上且满足 $|MF_1|-|MF_2|=2$，则 ΔF_1MF_2 中最大角为（　　）

A. 90°　　B. 105°　　C. 120°　　D. 150°

7. “$m<0$”是“方程 $x^2+my^2=m$ 表示双曲线”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 平面α，β，γ两两互相垂直，在平面α内有一点A到平面β，平面γ的距离都等于1．则在平面α内与点A，平面β，平面γ距离都相等的点的个数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二．填空题：本大题共6小题，每小题4分，共24分.

9. 直线$l:x+y-1=0$的倾斜角为____，经过点$(1,1)$且与直线l平行的直线方程为_______.

10. 直线$\sqrt{3}x+y-1=0$被圆$x^2+y^2=1$所截得的弦长为_______.

11. 请从正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的8个顶点中，找出4个点构成一个三棱锥，使得这个三棱锥的4个面都是直角三角形，则这4个点可以是_________. (只需写出一组)

12. 在空间直角坐标系中，已知点$A(1,2,0)$，$B(x,3,-1)$，$C(4,y,2)$，若A,B,C三点共线，则$x+y=$______.

13. 已知椭圆C_1和双曲线C_2的中心均为原点，且焦点均在x轴上，从每条曲线上取两个点，将其坐标记录于右表中，则双曲线的离心率为_______.

x	0	4	$2\sqrt{6}$
y	$2\sqrt{2}$	-2	$2\sqrt{2}$

14. 曲线W的方程为$(x^2+y^2)^3=8x^2y^2$.

(i) 请写出曲线W的两条对称轴方程______________；

(ii) 请写出曲线W上的两个点的坐标______________；

(iii) 曲线W上的点到原点的距离的取值范围是____________.

三．解答题：本大题共4小题，共44分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分10分）

在平面直角坐标系xOy中，圆C的半径为1，其圆心在射线$y=x(x\geqslant 0)$上，且$|OC|=2\sqrt{2}$.

（Ⅰ）求圆C的方程；

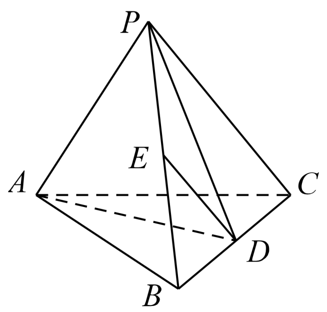
（Ⅱ）若直线l过点$P(1,0)$且与圆C相切，求直线l的方程.

16. （本小题满分 10 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PB=PC$，$AB=AC$，且 点 D，E 分别是 BC，PB 的中点.

（Ⅰ）求证：DE // 平面 PAC；

（Ⅱ）求证：平面 $ABC\perp$ 平面 PAD.



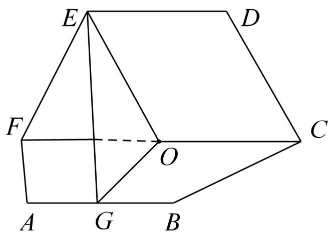
17. （本小题满分 12 分）

如图，平面 $ABCF\perp$ 平面 $FCDE$，四边形 $ABCF$ 和 $FCDE$ 是全等的等腰梯形，其中 $AB\parallel FC\parallel ED$，且 $AB=BC=\frac{1}{2}FC=2$，点 O 为 FC 的中点，点 G 是 AB 的中点.

（Ⅰ）请在图中所给的点中找出两个点，使得这两点所在直线与平面 EGO 垂直，并给出证明；

（Ⅱ）求二面角 $O-EG-F$ 的余弦值；

（Ⅲ）在线段 CD 上是否存在点 H，使得 $BH\parallel$ 平面 EGO？如果存在，求出 DH 的长度，如果不存在，请说明理由.



18.（本小题满分 12 分）

已知抛物线 $W: y^2=4x$，直线 $x=4$ 与抛物线 W 交于 A,B 两点. 点 $P(x_0,y_0)$ $(x_0<4,\ y_0\geq 0)$ 为抛物线上一动点，直线 PA,PB 分别与 x 轴交于 M,N.

（Ⅰ）若 ΔPAB 的面积为 4，求点 P 的坐标；

（Ⅱ）当直线 $PA\perp PB$ 时，求线段 PA 的长；

（Ⅲ）若 ΔPMN 与 ΔPAB 面积相等，求 ΔPMN 的面积.

数学试题答案

一. 选择题:本大题共 8 小题, 每小题 4 分,共 32 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	B	C	D	A	C	B

二.填空题：本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

9. $\dfrac{3\pi}{4}$， $x+y-2=0$　　10. $\sqrt{3}$　　11. A_1,A,B,C （此答案不唯一）

12. $-\dfrac{1}{2}$　　13. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

14. ① $x=0, y=0$， $y=x, y=-x$ 中的任意两条都对

② $(0,0),(1,1)$ 此答案不唯一　　③ $[0,\sqrt{2}]$

说明：9 题每空 2 分，14 题中 ① ②空 各给 1 分，③给 2 分

三. 解答题:本大题共 4 小题,共 44 分.

15.（本小题满分 10 分）

解:（I）设圆心 $C(a,a)$，则 $|OC|=\sqrt{a^2+a^2}=2\sqrt{2}$ ……………………1 分

解得 $a=2$， $a=-2$（舍掉） ……………………2 分

所以圆 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=1$ ……………………4 分

（II）

① 若直线 l 的斜率不存在，直线 l： $x=1$，符合题意 ……………………5 分

② 若直线 l 的斜率存在，设直线 l 为 $y=k(x-1)$，

即 $kx-y-k=0$ ……………………6 分

由题意, 圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$ ……………………8 分

解得 $k=\dfrac{3}{4}$ ……………………9 分

所以直线 l 的方程为 $3x-4y-3=0$ ……………………10 分

综上所述，所求直线 l 的方程为 $x=1$ 或 $3x-4y-3=0$.

16.（本小题满分 10 分）

解：（Ⅰ）证明：在 ΔPBC 中，

因为 D，E 分别是 BC，PB 的中点，

所以 $DE//PC$ ……………………1 分

因为 $DE\not\subset$ 平面 PAC，$PC\subset$ 平面 PAC ……………………3 分

说明：上面两个必须有，少一个扣 1 分.

所以 $DE//$ 平面 PAC． ……………………4 分

（Ⅱ）证明：因为 $PB=PC$，$AB=AC$，D 是 BC 的中点,

所以 $PD\perp BC$，$AD\perp BC$ ……………………6 分

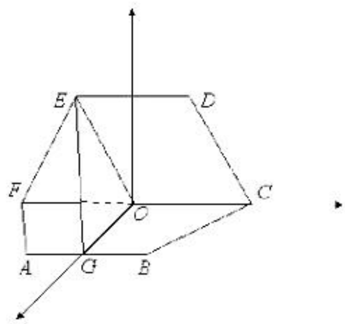
因为 $PD\cap AD=D$，$PD,AD\subset$ 平面 PAD ……………………8 分

所以 $BC\perp$ 平面 PAD ……………………9 分

因为 $BC\subset$ 平面 ABC

所以 平面 $ABC\perp$ 平面 PAD ……………………10 分

17.（本小题满分 12 分）



解：法一：**向量法**

（Ⅰ）F,D 点为所求的点.

证明如下：

因为四边形 $ABCF$ 是等腰梯形，点 O 为 FC 的中点，点 G 是 AB 的中点,

所以 $OG\perp FC$．

又平面 $ABCF\perp$ 平面 $FCDE$，平面 $ABCF\cap$ 平面 $FCDE=FC$,

所以 $OG\perp$ 平面 $FCDE$ ……………………1 分

同理取 DE 的中点 H，则 $OH\perp$ 平面 $ABCF$．

分别以边 OG,OC,OH 所在直线为 x,y,z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

由 $AB=2$，得 $G(\sqrt{3},0,0)$，$D(0,1,\sqrt{3})$，$E(0,-1,\sqrt{3})$，$F(0,-2,0)$，

则 $\overrightarrow{FD}=(0,3,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{OG}=(\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{OE}=(0,-1,\sqrt{3})$．

所以 $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{OG}=0$，$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{OE}=0$ ……………………3 分

又 $EO\cap OG=O$，

所以 $FD\perp$ 平面 EGO ……………………4 分

（II）由（I）知平面 EGO 的一个法向量为 $\overrightarrow{FD}=(0,3,\sqrt{3})$.

设平面 EFG 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{FE}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{FG}=0,\end{cases} \text{即} \begin{cases}y+\sqrt{3}z=0,\\ \sqrt{3}x+2y=0\end{cases}$$ ……………………5 分

令 $y=\sqrt{3}$，则 $z=-1$， $x=-2$.

所以 $\vec{m}=(-2,\sqrt{3},-1)$ ……………………6 分

所以 $\cos<\overrightarrow{FD},\vec{m}>=\dfrac{(-2,\sqrt{3},-1)\cdot(0,3,\sqrt{3})}{\sqrt{4+3+1}\cdot\sqrt{0+9+3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ……………………7 分

所以二面角 $O-EG-F$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ……………………8 分

（III） 假设存在点 H，使得 BH // 平面 EOG.

设 $\overrightarrow{DH}=\lambda\overrightarrow{DC}$ ……………………9 分

所以 $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{BD}+\lambda\overrightarrow{DC}$，所以 $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{BH}=0$ ……………………10 分

而计算可得 $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{BH}=3$ ……………………11 分

这与 $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{BH}=0$ 矛盾

所以在线段 CD 上不存在点 H，使得 BH // 平面 EOG ……………………12 分

法二：（I） 证明如下：

因为四边形 $ABCF$ 是等腰梯形，点 O 为 FC 的中点，点 G 是 AB 的中点，

所以 $OG\perp FC$ ……………………1 分

又平面 $ABCF\perp$ 平面 $FCDE$，平面 $ABCF\cap$ 平面 $FCDE=FC$，

所以 $OG\perp$ 平面 $FCDE$ ……………………2 分

因为 $FD\subset$ 平面 $FCDE$，所以 $OG\perp FD$.

又 ED $\underline{//}$ FO，且 $EF=ED$，

所以 $EFOD$ 为菱形，所以 $FD\perp EO$ ……………………3 分

因为 $EO\cap OG=O$，

所以 $FD\perp$ 平面 EGO. ……………………4 分

（III）假设存在点 H，使得 BH // 平面 EOG ……………………9 分

由 $ED \underline{//} OC$，所以 $EOCD$ 为平行四边形，

所以 EO // DC ……………………10 分

因为 $EO\subset$ 平面 EOG

所以 DC // 平面 EOG ……………………11 分

又 $BH\cap DC=H$，所以平面 EOG // 平面 BCD，

所以 BC // 平面 EOG，所以 BC // OG，

所以 $GBCO$ 为平行四边形，所以 $GB=CO$，矛盾

所以不存在点 H，使得 BH // 平面 EOG ……………………12 分

18．（本小题满分 12 分）

解：（I）把 $x=4$ 代入抛物线方程，得到 $y=\pm4$ ……………………1 分

所以不妨设 $A(4,4),B(4,-4)$，

所以 $|AB|=8$.

因为 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\cdot8\cdot d=4$，

所以点 P 到直线 AB 的距离 $d=1$， ……………………2 分

所以点 P 的横坐标 $x_0=3$ ……………………3 分

代入抛物线方程得 $P(3,2\sqrt{3})$ ……………………4 分

（II）因为 $PA\perp PB$，

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ ……………………5 分

所以 $(x_0-4)(x_0-4)+(y_0-4)(y_0+4)=0$，

所以 $x_0^2-8x_0+16+y_0^2-16=0$，

把 $y_0^2=4x_0$ 代入得到 $x_0^2-4x_0=0$ ……………………6 分

所以 $x_0=0$，$x_0=4$（舍） ……………………7 分

所以 $y_0=0$，$|PA|=4\sqrt{2}$ ……………………8 分

（III）直线 PA 的方程为 $y-4=\frac{y_0-4}{x_0-4}(x-4)=\frac{4}{y_0+4}(x-4)$，

点 M 横坐标 $x_M=\frac{-4(x_0-4)}{y_0-4}+4=-y_0$ ……………………9 分

同理 PB 的方程为 $y+4=\frac{y_0+4}{x_0-4}(x-4)=\frac{4}{y_0-4}(x-4)$，

点 N 横坐标 $x_N=\frac{4(x_0-4)}{y_0+4}+4=y_0$ ……………………10 分

因为 $S_{\Delta PMN}=S_{\Delta PAB}$，所以 $\frac{1}{2}|MN|\cdot|y_0|=\frac{1}{2}|AB|\cdot|x_0-4|$

所以 $y_0^2=4(4-x_0)$，解得 $x_0=2$ ……………………11 分

所以 $S_{\Delta PMN}=S_{\Delta PAB}=8$ ……………………12 分