

# 2023 北京八中高二（下）期中

## 数 学

考试时间 120 分钟，满分 150 分

一、选择题（共 10 小题.每小题 4 分.并 40 分.在每小题列出的四个选项中.选出符合题目要求的一项）

- 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_4 + a_5 + a_6 = 300$ , 则  $a_4 + a_6$  的值为 ( )  
A. 50                      B. 100                      C. 150                      D. 200
- $f(n) = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$  可以化简为 ( )  
A.  $\frac{3^n - 1}{2}$                       B.  $\frac{3^{n+1} - 1}{2}$   
C.  $\frac{3^{n+2} - 1}{2}$                       D.  $\frac{3^{n+3} - 1}{2}$
- 已知随机变量  $X \sim N(2, \sigma^2)$ ,  $P(X \leq 4) = 0.8$ , 那么  $P(2 \leq X \leq 4) =$  ( )  
A. 0.2                      B. 0.3                      C. 0.4                      D. 0.8
- 已知  $0 < a < \frac{1}{3}$ , 随机变量  $\xi$  的分布列如下, 当  $a$  增大时 ( )

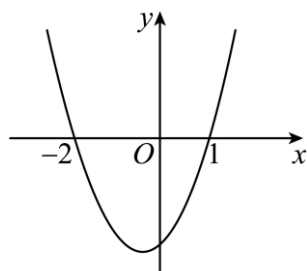
|       |     |                   |               |
|-------|-----|-------------------|---------------|
| $\xi$ | -1  | 0                 | 1             |
| $P$   | $a$ | $\frac{1}{3} - a$ | $\frac{2}{3}$ |

- $E(\xi)$  增大,  $D(\xi)$  增大                      B.  $E(\xi)$  减小,  $D(\xi)$  增大
  - $E(\xi)$  增大,  $D(\xi)$  减小                      D.  $E(\xi)$  减小,  $D(\xi)$  减小
- 已知某同学在高二期末考试中, A 和 B 两道选择题同时答对的概率为  $\frac{2}{3}$ , 在 A 题答对的情况下, B 题也答对的概率为  $\frac{8}{9}$ , 则 A 题答对的概率为  
A.  $\frac{1}{4}$                       B.  $\frac{3}{4}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{7}{9}$
  - 在用数学归纳法证明  $(n+1)(n+2)\cdots(n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) (n \in \mathbb{N}^*)$  的过程中, 从“ $k$  到  $k+1$ ”左边需增乘的代数式为 ( )  
A.  $2k+2$                       B.  $(2k+1)(2k+2)$

C.  $\frac{2k+2}{k+1}$

D.  $2(2k+1)$

7. 设函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上可导，其导函数为  $f'(x)$ ，已知函数  $y = (1-x)f'(x)$  的图象如图所示，有下列结论：



①  $f(x)$  有极大值  $f(-2)$

②  $f(x)$  在区间  $(1, +\infty)$  上是增函数

③  $f(x)$  的减区间是  $(-2, +\infty)$ ;

④  $f(x)$  有极小值  $f(1)$ .

则其中正确结论的个数是 ( )

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

8. 函数  $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$  的单调递增区间是 ( )

A.  $(-2, 0)$

B.  $(-\infty, -2), (0, +\infty)$

C.  $(0, 2)$

D.  $(-\infty, 0), (2, +\infty)$

9. 已知  $\{a_n\}$  是等比数列，则“ $a_1 < a_2 < a_4$ ”是“ $\{a_n\}$  是增数列”的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

10. 设函数  $f(x)$  定义域为  $D$ ，若函数  $f(x)$  满足：对任意  $c \in D$ ，存在  $a, b \in D$ ，使得

$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c)$  成立，则称函数  $f(x)$  满足性质  $\Gamma$ . 下列函数不满足性质  $\Gamma$  的是 ( )

A.  $f(x) = x^2$

B.  $f(x) = x^3$

C.  $f(x) = e^x$

D.  $f(x) = \ln x$

## 二、填空题 (共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分)

11. 某质检员检验一件产品时，把正品误判为次品的概率是 0.1，把次品误判为正品的概率是 0.05. 如果一箱产品中含有 8 件正品，2 件次品，现从中任取 1 件让该质检员检验，那么出现误判的概率为 \_\_\_\_\_.

12. 若数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$ ，则通项公式为  $a_n =$  \_\_\_\_\_.

13. 若数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n = \frac{2}{3}a_n + 1$ ，则  $\{a_n\}$  的通项公式是  $a_n =$  \_\_\_\_\_.

14. 点  $P$  在函数  $y = e^x$  的图像上，点  $Q$  在函数  $y = \ln x$  的图像上，则  $|PQ|$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

15. 设  $\{a_n\}$  是集合  $\{2^t + 2^s | 0 \leq s < t \text{ 且 } s, t \in \mathbb{Z}\}$  中所有的从小到大排成的数列, 即

$a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 6, a_4 = 9, a_5 = 10, a_6 = 12, \dots$  将数列  $\{a_n\}$  各项按照上小下大, 左小右大的原则写成如下的三角形数表:

|             |
|-------------|
| 3           |
| 5    6      |
| 9   10   12 |
| .....       |
| .....       |
| .....       |

(1) 则这个三角形数表的第四行的数分别为 \_\_\_\_\_;

(2)  $a_{100} =$  \_\_\_\_\_.

### 三、解答题 (共 6 小题, 共 85 分, 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程)

16.  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 且  $a_1 = 1$ , 公差不为零, 若  $S_1, S_2, S_4, S_m$  成等比数列, 求:

(1) 数列  $\{a_n\}$  的通项公式及实数  $m$  的值;

(2) 若数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n \cdot a_n \cdot a_{n+1} = 1 (n \in \mathbb{N}^*)$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ ;

(3) 若数列  $\{c_n\}$  满足  $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n = \frac{a_n^2}{4} (n \in \mathbb{N}^*)$ , 求  $c_1 + c_3 + c_5 + \dots + c_{2n-1}$  的和.

17. 某地区教委要对高三期中数学练习进行调研, 考查试卷中某道填空题的得分情况. 已知该题有两空, 第一空答对得 3 分, 答错或不答得 0 分; 第二空答对得 2 分, 答错或不答得 0 分. 第一空答对与否与第二空答对与否是相互独立的. 从所有试卷中随机抽取 1000 份试卷, 其中该题的得分组成容量为 1000 的样本, 统计结果如下表:

第一空得分情况

|    |     |     |
|----|-----|-----|
| 得分 | 0   | 3   |
| 人数 | 200 | 800 |

第二空得分情况

|    |     |     |
|----|-----|-----|
| 得分 | 0   | 2   |
| 人数 | 700 | 300 |

(1) 这个地区的一名高三学生因故未参加考试, 如果这名学生参加考试, 以样本中各种得分情况的频率作为该同学相应的各种得分情况的概率, 试求该同学这道题的得分  $X$  的分布列与数学期望;

(2) 从该地区高三学生中, 随机抽取 2 位同学, 以样本中各种得分情况的频率作为概率, 求这 2 人中恰好有一个同学得满分的概率.

18. 某超市销售 5 种不同品牌的牙膏, 它们的包装规格均相同, 销售价格 (元/管) 和市场份额 (指该品牌

牙膏的销售量在超市同类产品中所占比重)如下:

| 牙膏品牌 | A   | B   | C   | D   | E   |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 销售价格 | 15  | 25  | 5   | 20  | 35  |
| 市场份额 | 15% | 10% | 25% | 20% | 30% |

(1) 从这5种不同品牌的牙膏中随机抽取1管, 估计其销售价格低于25元的概率;

(2) 依市场份额进行分层抽样, 随机抽取20管牙膏进行质检, 其中A和B共抽取了 $n$ 管.

①求 $n$ 的值;

②从这 $n$ 管牙膏中随机抽取3管进行氟含量检测. 记 $X$ 为抽到品牌B的牙膏数量, 求 $X$ 的分布列和数学期望.

(3) 品牌F的牙膏下月进入该超市销售, 定价25元/管, 并占有一定市场份额. 原有5个品牌的牙膏销售价格不变, 所占市场份额之比不变, 设本月牙膏的平均销售价为每管 $\mu_1$ 元, 下月牙膏的平均销售价为每管 $\mu_2$ 元, 比较 $\mu_1, \mu_2$ 的大小. (只需写出结论)

19. 已知函数  $f(x) = kx - (k+1)\ln x - \frac{1}{x}$ .

(1) 当  $k = \frac{1}{2}$  时, 求函数  $f(x)$  的增区间;

(2) 若关于  $x$  的不等式  $f(x) \leq 1$  在区间  $[1, e]$  上恒成立, 求实数  $k$  的取值范围. (其中  $e = 2.71828\ldots$ )

20. 已知函数  $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ , 直线  $l: y = kx - 1$ .

(I) 求函数  $f(x)$  的极值;

(II) 求证: 对于任意  $k \in \mathbb{R}$ , 直线  $l$  都不是曲线  $y = f(x)$  的切线;

(III) 试确定曲线  $y = f(x)$  与直线  $l$  的交点个数, 并说明理由.

21. 给定项数为  $m$  ( $m \in \mathbb{N}^*, m \geq 3$ ) 的数列  $\{a_n\}$ , 其中  $a_i \in \{0, 1\}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). 若存在一个正整数

$k$  ( $2 \leq k \leq m-1$ ), 若数列  $\{a_n\}$  中存在连续的  $k$  项和该数列中另一个连续的  $k$  项恰好按次序对应相等, 则称数列  $\{a_n\}$  是“ $k$  阶可重复数列”, 例如数列  $\{a_n\}: 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0$ . 因为  $a_1, a_2, a_3, a_4$  与  $a_4, a_5, a_6, a_7$  按次序对应相等, 所以数列  $\{a_n\}$  是“4 阶可重复数列”.

(1) 分别判断下列数列

①  $\{b_n\}: 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0$ .

②  $\{c_n\}: 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1$ .

是否是“5 阶可重复数列”? 如果是, 请写出重复的这 5 项;

(2) 若项数为  $m$  的数列  $\{a_n\}$  一定是“3 阶可重复数列”, 则  $m$  的最小值是多少? 说明理由;

(3) 假设数列 $\{a_n\}$ 不是“5阶可重复数列”，若在其最后一项 $a_m$ 后再添加一项0或1，均可使新数列是“5阶可重复数列”，且 $a_4=1$ ，求数列 $\{a_n\}$ 的最后一项 $a_m$ 的值.



## 参考答案

一、选择题（共 10 小题.每小题 4 分.并 40 分.在每小题列出的四个选项中.选出符合题目要求的一项）

1. 【答案】D

【解析】

【分析】根据等差数列的性质即可求解.

【详解】因为数列  $\{a_n\}$  为等差数列, 所以  $a_4 + a_6 = 2a_5$ ,

又因为  $a_4 + a_5 + a_6 = 300$ , 所以  $a_4 + a_6 = 200$ ,

故选: D.

2. 【答案】C

【解析】

【分析】根据等比数列求和公式计算可得.

【详解】 $f(n) = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{n+1} = \frac{1 \times (1 - 3^{n+2})}{1 - 3} = \frac{3^{n+2} - 1}{2}$ .

故选: C

3. 【答案】B

【解析】

【分析】根据正态分布的性质计算可得.

【详解】因为  $X \sim N(2, \sigma^2)$ , 所以  $P(X \leq 2) = 0.5$ , 又  $P(X \leq 4) = 0.8$ ,

所以  $P(2 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 2) = 0.8 - 0.5 = 0.3$ .

故选: B

4. 【答案】B

【解析】

【分析】

利用数学期望和方差公式得出关于  $a$  的函数, 根据函数单调性判断  $E(\xi)$  和  $D(\xi)$  的变化情况.

【详解】解:  $E(\xi) = \frac{2}{3} - a$ ,

$\therefore$  当  $a$  增大时,  $E(\xi)$  减小,

$D(\xi) = (-\frac{5}{3} + a)^2 a + (a - \frac{2}{3})^2 (\frac{1}{3} - a) + (\frac{1}{3} + a)^2 \cdot \frac{2}{3} = -a^2 + \frac{7}{3}a + \frac{2}{9}$ ,

$\therefore D(\xi)$  在  $(0, \frac{1}{3})$  上随  $a$  的增大而增大,

故选: B.



【点睛】熟记期望和方差的公式，并能进行准确的运算，是求解的关键.

5. 【答案】B

【解析】

【分析】根据条件概率公式计算即可.

【详解】设事件 A：答对 A 题，事件 B：答对 B 题，

$$\text{则 } P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3},$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{8}{9}.$$

$$\therefore P(A) = \frac{3}{4}.$$

故选：B.

【点睛】本题考查了条件概率的计算，属于基础题.

6. 【答案】D

【解析】

【分析】根据题意，分别得到  $n=k$  和  $n=k+1$  时，左边对应的式子，两式作商，即可得出结果.

【详解】当  $n=k$  时，左边  $A = (k+1)(k+2) \cdots (k+k) = (k+1)(k+2) \cdots (2k)$ ,

当  $n=k+1$  时，左边  $B = (k+2)(k+3) \cdots (k+1+k+1) = (k+2)(k+3) \cdots (2k+2)$ ,

$$\text{则 } \frac{B}{A} = \frac{(k+2)(k+3) \cdots (2k)(2k+1)(2k+2)}{(k+1)(k+2) \cdots (2k)} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{k+1} = 2(2k+1).$$

故选：D.

7. 【答案】C

【解析】

【分析】根据  $1-x$ ， $y = (1-x)f'(x)$  的正负求出  $f'(x)$  的正负，可得函数的单调性及极值，判断选项.

【详解】当  $x < -2$  时，由  $y = (1-x)f'(x)$  的图象可知  $y > 0$ ，所以  $f'(x) > 0$ ，

当  $-2 < x < 1$  时，由  $y = (1-x)f'(x)$  的图象可知  $y < 0$ ，所以  $f'(x) < 0$ ，

当  $x > 1$  时，由  $y = (1-x)f'(x)$  的图象可知  $y > 0$ ，所以  $f'(x) < 0$ ，

即函数  $f(x)$  在  $(-\infty, -2)$  上递增，在  $(-2, +\infty)$  上单调递减，

所以  $f(x)$  有极大值  $f(-2)$ .

故①③正确，②④错误.

故选：C

8. 【答案】C

【解析】

【分析】求得函数的导数  $f'(x) = \frac{-x(x-2)}{e^x}$ ，令  $f'(x) > 0$ ，即可求解函数的递增区间。

【详解】由题意，函数  $f(x) = x^2 \cdot e^{-x} = \frac{x^2}{e^x}$ ，可得  $f'(x) = \frac{-x(x-2)}{e^x}$ ，

令  $f'(x) > 0$ ，即  $x(x-2) < 0$ ，解得  $0 < x < 2$ ，

所以函数  $y = x^2 \cdot e^{-x}$  的递增区间是  $(0, 2)$ 。

故选：C。

9. 【答案】B

【解析】

【分析】根据递增数列的定义并结合对项取值，可得结果

【详解】由数列  $\{a_n\}$  是等比数列，可假设  $a_1 = -2, q = -2$ ，

则  $a_1 = -2, a_2 = 4, a_3 = -8, a_4 = 16$ ，

可知  $a_1 < a_2 < a_4$ ，但数列  $\{a_n\}$  不是递增数列，

若数列  $\{a_n\}$  是递增等比数列，由定义可知， $a_1 < a_2 < a_4$ ，故

“ $a_1 < a_2 < a_4$ ”是“ $\{a_n\}$  是递增数列”的必要不充分条件

故选：B

10. 【答案】B

【解析】

【分析】

构造函数  $g(x) = f(x) - f'(c)x$ ，可得  $g'(x) = f'(x)$ ，则  $f''(x)$  在定义域内正负号不变时满足性质

$\Gamma$ ，若  $f''(x)$  有唯一变号零点  $x_0$  时不满足性质  $\Gamma$ ，则通过计算  $f''(x)$  即可判断。

【详解】 $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c)$  可化为  $f(a) - f'(c)a = f(b) - f'(c)b$ ，

令  $g(x) = f(x) - f'(c)x$ ，

则  $g'(x) = f'(x) - f'(c)$ ， $g''(x) = f''(x)$ ，

$\therefore$  若  $f''(x)$  在定义域内正负号不变，那么  $x = c$  是  $g'(x)$  的变号零点，则  $g(x)$  在  $x = c$  的两侧的单调性不一致，因此满足性质  $\Gamma$ ；

若  $f''(x)$  有唯一变号零点  $x_0$ ，那么取  $c = x_0$ ，则  $g'(x)$  在定义域内的正负号不变，进而函数  $g(x)$  在定义域内单调，因此不满足性质  $\Gamma$ 。

对于 A， $f'(x) = 2x$ ，则  $f''(x) = 2 > 0$ ，所以满足性质  $\Gamma$ ；

对于 B， $f'(x) = 3x^2$ ，则  $f''(x) = 6x$  有唯一变号零点 0，所以不满足性质  $\Gamma$ ；



对于 C,  $f'(x) = e^x$ , 则  $f''(x) = e^x > 0$ , 所以满足性质  $\Gamma$ ;

对于 D,  $f'(x) = \frac{1}{x}$ , 则  $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ , 所以满足性质  $\Gamma$ .

故选: B.

【点睛】本题考查利用导数解决新定义问题, 属于较难题.

## 二、填空题 (共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

11. 【答案】0.09

【解析】

【详解】取得正品的概率为  $\frac{8}{10} = 0.8$ , 则取得正品且误判的概率为  $0.1 \times 0.8 = 0.08$ ;

取得次品的概率为  $\frac{2}{10} = 0.2$ , 则取得次品且误判的概率为  $0.05 \times 0.2 = 0.01$ ,

故出现误判的概率是  $0.08 + 0.01 = 0.09$ .

12. 【答案】 $\frac{n(n+1)}{2}$

【解析】

【分析】根据题意, 利用累加法即可求解.

【详解】因为  $a_{n+1} = a_n + n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$ ,

所以当  $n \geq 2$  时,  $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1$

$$= n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2},$$

当  $n=1$  时,  $a_1 = \frac{1 \times 2}{2} = 1$ , 满足  $a_1 = 1$ , 所以  $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ,

故答案为:  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

13. 【答案】 $3 \cdot (-2)^{n-1}$

【解析】

【分析】利用  $a_n$  与  $S_n$  的关系即得.

【详解】因为  $S_n = \frac{2}{3}a_n + 1$ ,

所以  $a_1 = S_1 = \frac{2}{3}a_1 + 1$ ,  $a_1 = 3$ ,

当  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2}{3}a_n + 1 - (\frac{2}{3}a_{n-1} + 1) = \frac{2}{3}a_n - \frac{2}{3}a_{n-1}$ ,

所以  $a_n = -2a_{n-1}$ ,

$\therefore \{a_n\}$  是以 3 为首项,  $-2$  为公比的等比数列,

所以  $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$ .

故答案为:  $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$ .

14. 【答案】  $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】由解析式可分析两函数互为反函数, 则图象关于  $y=x$  对称, 则点  $P$  到  $y=x$  的距离的最小值的二倍即为所求, 利用导函数即可求得最值.

【详解】因为  $y=e^x$  与  $y=\ln x$  互为反函数, 两函数图象关于  $y=x$  对称,

设点  $P$  为  $(x, e^x)$ , 则到直线  $y=x$  的距离为  $d = \frac{|e^x - x|}{\sqrt{2}}$ ,

设  $h(x) = e^x - x$ , 则  $h'(x) = e^x - 1$ , 令  $h'(x) = 0$ , 即  $x = 0$ ,

所以当  $x \in (-\infty, 0)$  时  $h'(x) < 0$ , 即  $h(x)$  单调递减,

当  $x \in (0, +\infty)$  时  $h'(x) > 0$ , 即  $h(x)$  单调递增,

所以  $h(x)_{\min} = h(0) = 1$ , 则  $d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

所以  $|PQ|$  的最小值为  $2d_{\min} = \sqrt{2}$ .

故答案为:  $\sqrt{2}$

15. 【答案】 ①. 17,18,20,24 ②. 16640

【解析】

【分析】根据题意找出规律即可求解.

【详解】根据数列  $\{a_n\}$  中的项与集合中的元素的关系,

数列的第一项对应  $s=0, t=1$ ,

数列的第二项对应  $s=0, t=2$ ,

数列第三项对应  $s=1, t=2$ ,

数列第四项对应  $s=0, t=3$ ,

数列第五项对应  $s=1, t=3$ ,

数列第六项对应  $s=2, t=3$ ,

由此可得规律, 数表中的第  $n$  行对应  $t=n, s=0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ .

用记号  $(s, t)$  表示  $s, t$  的取值, 那么数列  $\{a_n\}$  中的项对应的  $(s, t)$  也构成一个三角表:

(0, 1)

(0, 2)(1, 2)

(0, 3)(1, 3)(2, 3)

因此第四行的数是  $2^0 + 2^4 = 17$ ;  $2^1 + 2^4 = 18$ ;  $2^2 + 2^4 = 20$ ;  $2^3 + 2^4 = 24$ ;

由  $1 + 2 + 3 + \cdots + 13 = \frac{13 \times (13+1)}{2} = 91$ , 知  $a_{100}$  在第十四行中的第 9 个数,

所以  $a_{100} = 2^8 + 2^{14} = 16640$ ,

故答案为: 17, 18, 20, 24; 16640.

### 三、解答题 (共 6 小题, 共 85 分, 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程)

16. 【答案】(1)  $a_n = 2n - 1$ ,  $m = 8$

(2)  $\frac{n}{2n+1}$

(3)  $2n^2 - 2n + \frac{1}{4}$

【解析】

【分析】(1) 根据题意, 由等比中项的性质即可得到等差数列  $\{a_n\}$  的公差  $d$ , 从而得到其通项公式, 再列出方程即可得到  $m$ ;

(2) 根据题意, 由裂项相消法即可得到结果;

(3) 根据题意, 由数列  $\{c_n\}$  与其前  $n$  项和的关系即可得到其通项公式, 然后结合等差数列的前  $n$  项和公式即可得到结果.

【小问 1 详解】

因为  $a_1 = S_1 = 1$ ,  $S_1, S_2, S_4$  成等比数列, 设等差数列  $\{a_n\}$  公差为  $d$ ,

则  $S_2^2 = S_1 \cdot S_4$ , 即  $(a_1 + a_2)^2 = a_1 \left( 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2} d \right)$ , 化简可得  $d(d-2) = 0$ ,

因为  $d \neq 0$ , 即  $d = 2$ , 所以  $a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$ ,

因为  $S_1, S_2, S_4, S_m$  成等比数列, 所以  $S_1 \cdot S_m = S_2 \cdot S_4$ ,

则  $ma_1 + \frac{m(m-1)d}{2} = (2a_1 + d) \left( 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2} d \right)$ , 求得  $m = 8$ .

【小问 2 详解】

因为  $b_n \cdot a_n \cdot a_{n+1} = 1$ , 所以  $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ ,

所以  $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$

$$= \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$$

【小问3详解】

因为  $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n = \frac{a_n^2}{4} = \frac{(2n-1)^2}{4} = n^2 - n + \frac{1}{4}$ ,

设数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和为  $H_n$ , 即  $H_n = n^2 - n + \frac{1}{4}$ ,

当  $n \geq 2$  时,  $H_{n-1} = (n-1)^2 - (n-1) + \frac{1}{4}$ ,

所以  $c_n = H_n - H_{n-1} = n^2 - n + \frac{1}{4} - \left[ (n-1)^2 - (n-1) + \frac{1}{4} \right] = 2n - 2$ ,

当  $n=1$  时,  $c_1 = H_1 = \frac{1}{4}$ , 不满足上式,

所以  $c_n = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n=1 \\ 2n-2, & n \geq 2 \end{cases}$ ,

则  $c_3, c_5, c_7, \dots, c_{2n-1}$  是以 4 为首项, 以 4 为公差的等差数列,

所以  $c_1 + c_3 + c_5 + \dots + c_{2n-1}$

$$= \frac{1}{4} + (6-2) + (10-2) + \dots + (4n-4)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{(n-1)(4+4n-4)}{2} = 2n^2 - 2n + \frac{1}{4}$$

17. 【答案】(1) 分布列见详解, 数学期望为 3;

(2) 0.3648.

【解析】

【分析】(1) 根据表中得分情况先算出频数估计概率, 分析得出该生这道题的得分  $X$  的取值可以为: 0, 2, 3, 5, 分别求出概率列出分布列, 求出数学期望即可;

(2) 先找出学生得满分的概率和得不到满分的概率, 再求解 2 人中恰好有一个同学得满分的概率.

【小问1详解】

由表格数据分析知学生得 0 分的频率为  $0.2 \times 0.7 = 0.14$ ,

得 2 分的频率为:  $0.2 \times 0.3 = 0.06$ , 得 3 分的频率为:  $0.8 \times 0.7 = 0.56$ ,

得 5 分的频率为:  $0.8 \times 0.3 = 0.24$

由题意分析得  $X$  的取值可以为: 0, 2, 3, 5,

则  $P(X=0)=0.14$ ,  $P(X=2)=0.06$ ,  $P(X=3)=0.56$ ,  $P(X=5)=0.24$ .

故  $X$  的分布列为:

|     |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|
| $X$ | 0    | 2    | 3    | 5    |
| $P$ | 0.14 | 0.06 | 0.56 | 0.24 |

所以  $X$  的数学期望为:  $0 \times 0.14 + 2 \times 0.06 + 3 \times 0.56 + 5 \times 0.24 = 3$

【小问2详解】

由题意知某位学生要得满分的概率为:  $0.8 \times 0.3 = 0.24$ ,

得不到满分的概率为:  $1 - 0.24 = 0.76$ ,

所以随机抽取2位同学, 这2人中恰好有一个同学得满分的概率为:

$$C_2^1 \times 0.24 \times 0.76 = 0.3648.$$

18. 【答案】(1) 0.6; (2) ①  $n=5$ ; ②分布列见解析; 期望为  $\frac{6}{5}$ ; (3)  $\mu_1 < \mu_2$ .

【解析】

【分析】(1) 求出销售价格低于25元的频率, 用频率来衡量概率;

(2) ①利用分层抽样的定义求解即可, ②随机变量  $X$  的可能取值为0,1,2, 然后求出各自对应的概率, 即可列出分布列, 求出期望;

(3) 求出平均值比较即可

【详解】解: (1) 记“从该超市销售的牙膏中随机抽取1管, 其销售价格低于25元”为事件  $K$ .

由题设,  $P(K) = 0.15 + 0.25 + 0.2 = 0.6$ .

(2) ①由题设, 品牌A的牙膏抽取了  $20 \times 15\% = 3$ 管,

品牌B的牙膏抽取了  $20 \times 10\% = 2$ 管,

所以  $n = 3 + 2 = 5$ .

(ii) 随机变量  $X$  的可能取值为0,1,2.

$$P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10};$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{3}{5};$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}.$$

所以  $X$  的分布列为:

|     |   |   |   |
|-----|---|---|---|
| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|-----|---|---|---|

|     |                |               |                |
|-----|----------------|---------------|----------------|
| $P$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{3}{10}$ |
|-----|----------------|---------------|----------------|

$X$  的数学期望为  $E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$ .

(3)  $\mu_1 < \mu_2$ .

(理由:  $\mu_1 = 15 \times 15\% + 25 \times 10\% + 5 \times 25\% + 20 \times 20\% + 35 \times 30\% = 20.5$ , 设品牌 F 的市场占有额为  $m$ ,  $A, B, C, D, E$  市场占有率分别为  $3x, 2x, 5x, 4x, 6x$ , 则

$$\mu_2 = \frac{15 \times 3x + 25 \times 2x + 5 \times 5x + 20 \times 4x + 35 \times 6x + 25m}{20x + m}$$

$$> \frac{15 \times 3x + 25 \times 2x + 5 \times 5x + 20 \times 4x + 35 \times 6x}{20x} = 20.5 = \mu_1$$

19. 【答案】(1)  $(0, 1), (2, +\infty)$

(2)  $k \leq 1$

【解析】

【分析】(1) 求出函数的导函数, 再解关于导函数的不等式, 即可求出函数的单调递增区间;

(2) 依题意可得函数  $f(x)$  在区间  $[1, e]$  上的最大值小于等于 1, 求出函数的导函数, 分  $k=0$ 、 $k<0$ 、 $k=1$ 、 $k>1$ 、 $0<k<1$  五种情况讨论, 分别得到函数的最大值, 即可求出参数的取值范围.

【小问 1 详解】

因为  $f(x) = kx - (k+1)\ln x - \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ ,

$$\text{所以 } f'(x) = k - \frac{k+1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{kx^2 - (k+1)x + 1}{x^2},$$

$$\text{当 } k = \frac{1}{2} \text{ 时, } f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(x-2)(x-1)}{x^2}, \text{ 令 } f'(x) > 0, \text{ 解得 } 0 < x < 1 \text{ 或 } x > 2,$$

所以函数  $f(x)$  的单调递增区间为  $(0, 1), (2, +\infty)$ .

【小问 2 详解】

不等式  $f(x) \leq 1$  在区间  $[1, e]$  上恒成立,

即函数  $f(x)$  在区间  $[1, e]$  上的最大值小于等于 1,

$$\text{当 } k=0 \text{ 时 } f(x) = -\ln x - \frac{1}{x}, \text{ 则 } f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1-x}{x^2}, \text{ 当 } 1 < x \leq e \text{ 时 } f'(x) < 0,$$

所以  $f(x)$  在  $[1, e]$  上单调递减, 所以  $f(x)_{\max} = f(1) = -1$ , 符合题意;

$$\text{当 } k \neq 0 \text{ 时 } f'(x) = \frac{k\left(x - \frac{1}{k}\right)(x-1)}{x^2},$$



令  $f'(x)=0$ ，得  $x_1=\frac{1}{k}$ ， $x_2=1$ ，

当  $k < 0$  时则当  $1 < x \leq e$  时  $f'(x) < 0$ ，

所以  $f(x)$  在  $[1, e]$  上单调递减，所以  $f(x)_{\max} = f(1) = k - 1$ ，所以  $\begin{cases} k - 1 \leq 1 \\ k < 0 \end{cases}$ ，解得  $k < 0$ ，

当  $k > 1$  时  $0 < \frac{1}{k} < 1$ ，所以当  $1 < x \leq e$  时  $f'(x) > 0$ ，

所以  $f(x)$  在  $[1, e]$  上单调递增，所以  $f(x)_{\max} = f(e) = ke - k - 1 - \frac{1}{e}$ ，

所以  $\begin{cases} ke - k - 1 - \frac{1}{e} \leq 1 \\ k > 1 \end{cases}$ ，不等式组无解，不符合题意；

当  $k = 1$  时  $\frac{1}{k} = 1$ ，所以当  $1 < x \leq e$  时  $f'(x) > 0$ ，

所以  $f(x)$  在  $[1, e]$  上单调递增，所以  $f(x)_{\max} = f(e) = e - 1 - 1 - \frac{1}{e} < 1$ ，

符合题意，

当  $0 < k < 1$  时，则  $\frac{1}{k} > 1$ ，

当  $\frac{1}{k} \geq e$  时， $f'(x) \leq 0$  对  $x \in [1, e]$  成立，函数  $f(x)$  在区间  $[1, e]$  上单调递减，

所以函数  $f(x)$  在区间  $[1, e]$  上的最大值为  $f(1) = k - 1 < 1$ ，

所以不等式  $f(x) \leq 1$  在区间  $[1, e]$  上恒成立，

当  $\frac{1}{k} < e$  时， $f'(x)$ ， $f(x)$  随  $x$  的变化情况如下表：

| $x$     | $\left(1, \frac{1}{k}\right)$ | $\frac{1}{k}$ | $\left(\frac{1}{k}, e\right)$ |
|---------|-------------------------------|---------------|-------------------------------|
| $f'(x)$ | —                             | 0             | +                             |
| $f(x)$  | 单调递减                          | 极小值           | 单调递增                          |

所以函数  $f(x)$  在区间  $[1, e]$  上的最大值为  $f(1)$  或  $f(e)$ ，

此时  $f(1) = k - 1 < 1$ ， $f(e) = ke - (k + 1) - \frac{1}{e}$ ，

所以  $f(e) - 1 = ke - (k + 1) - \frac{1}{e} - 1 = k(e - 1) - 2 - \frac{1}{e} < (e - 1) - 2 - \frac{1}{e} = e - 3 - \frac{1}{e} < 0$ 。

所以当  $0 < k < 1$  时, 不等式  $f(x) \leq 1$  在区间  $[1, e]$  上恒成立.

综上可得  $k \leq 1$ .

20. 【答案】(I) 极小值  $f(1) = 3$ , 无极大值; (II) 见解析; (III) 当  $k = 2$  时, 曲线  $y = f(x)$  与直线  $l$  没有交点, 而当  $k \neq 2$  时, 曲线  $y = f(x)$  与直线  $l$  有且仅有一个交点.

【解析】

【详解】试题分析: (I) 先求出函数  $f(x)$  定义域再求导, 得令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x$  的值, 画出当  $x$  变化时,  $f'(x) = 0$  与  $f(x)$  的变化情况表所示, 可得函数  $y = f(x)$  的单调区间, 从而得到函数  $y = f(x)$  有极小值  $f(1) = 3$ , 无极大值

(II) 对于是否存在问题, 先假设存在某个  $k \in \mathbb{R}$ , 使得直线  $l$  与曲线  $y = f(x)$  相切, 先设出切点, 再求  $f'(x)$ ,

求得切线满足斜率, 又由于过点  $A$ , 可得方程显然无解, 所以假设不成立. 所以对于任意  $k \in \mathbb{R}$ , 直线  $l$  都不是曲线  $y = f(x)$  的切线.

(III) 写出“曲线  $y = f(x)$  与直线  $l$  的交点个数”等价于“方程  $2x + \frac{1}{x^2} = kx - 1$  的根的个数”.

由分离系数法得  $k = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + 2$ , 令  $t = \frac{1}{x}$ , 得  $k = t^3 + t + 2$ , 其中  $t \in \mathbb{R}$ , 且  $t \neq 0$ . 考察函数

$h(t) = t^3 + t + 2$ , 其中  $t \in \mathbb{R}$ , 求导得到函数的单调性, 从而得到方程根的情况, 命题得证

试题解析: 函数  $f(x)$  定义域为  $\{x | x \neq 0\}$ ,

求导, 得  $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$ ,

令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = 1$ .

当  $x$  变化时,  $f'(x)$  与  $f(x)$  的变化情况如下表所示:

| $x$     | $(-\infty, 0)$ | $(0, 1)$ | 1 | $(1, +\infty)$ |
|---------|----------------|----------|---|----------------|
| $f'(x)$ | +              | -        | 0 | +              |
| $f(x)$  | ↗              | ↘        |   | ↗              |

所以函数  $y = f(x)$  的单调增区间为  $(-\infty, 0)$ ,  $(1, +\infty)$ , 单调减区间为  $(0, 1)$ ,

所以函数  $y = f(x)$  有极小值  $f(1) = 3$ , 无极大值.

(II) 证明: 假设存在某个  $k \in \mathbb{R}$ , 使得直线  $l$  与曲线  $y = f(x)$  相切,

设切点为  $A(x_0, 2x_0 + \frac{1}{x_0^2})$ , 又因为  $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$ ,

所以切线满足斜率  $k = 2 - \frac{2}{x_0^3}$ , 且过点  $A$ , 所以  $2x_0 + \frac{1}{x_0^2} = (2 - \frac{2}{x_0^3})x_0 - 1$ ,

即  $\frac{3}{x_0^2} = -1$ , 此方程显然无解, 所以假设不成立.

所以对于任意  $k \in \mathbb{R}$ , 直线  $l$  都不是曲线  $y = f(x)$  的切线.

(III) 解: “曲线  $y = f(x)$  与直线  $l$  的交点个数”等价于“方程  $2x + \frac{1}{x^2} = kx - 1$  的根的个数”.

由方程  $2x + \frac{1}{x^2} = kx - 1$ , 得  $k = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + 2$ .

令  $t = \frac{1}{x}$ , 则  $k = t^3 + t + 2$ , 其中  $t \in \mathbb{R}$ , 且  $t \neq 0$ . 考察函数  $h(t) = t^3 + t + 2$ , 其中  $t \in \mathbb{R}$ ,

因为  $h'(t) = 3t^2 + 1 > 0$  时, 所以函数  $h(t)$  在  $\mathbb{R}$  单调递增, 且  $h(t) \in \mathbb{R}$ .

而方程  $k = t^3 + t + 2$  中,  $t \in \mathbb{R}$ , 且  $t \neq 0$ .

所以当  $k = h(0) = 2$  时, 方程  $k = t^3 + t + 2$  无根; 当  $k \neq 2$  时, 方程  $k = t^3 + t + 2$  有且仅有一根,

故当  $k = 2$  时, 曲线  $y = f(x)$  与直线  $l$  没有交点, 而当  $k \neq 2$  时, 曲线  $y = f(x)$  与直线  $l$  有且仅有一个交点.

考点: 导数的单调性与导数及导数的几何意义.

21. 【答案】(1) ①是, 重复五项为 0, 0, 1, 1, 0; ②不是

(2) 11, 理由见解析

(3) 1

【解析】

【分析】(1) 观察数列特点看元素是否按次序对应相等即可判断数列是否为 5 阶可重复数列;

(2) 项数为  $m$  的数列  $\{a_n\}$  一定是 3 阶可重复数列, 数列的每一项只可以是 0 或 1, 则连续 3 项共有 8 种不同的情况, 分别讨论  $m = 11$ ,  $m = 10$ ,  $3 \leq m < 10$  时情况可得结论;

(3) 由于数列  $\{a_n\}$  在其最后一项  $a_m$  后再添加一项 0 或 1, 均可使新数列是: “5 阶可重复数列”, 则存在  $i \neq j$ , 使得  $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, a_{i+4}$  与  $a_{m-3}, a_{m-2}, a_{m-1}, a_m, 0$  按次序对应相等, 或  $a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, a_{j+3}, a_{j+4}$  与  $a_{m-3}, a_{m-2}, a_{m-1}, a_m, 1$  按次序对应相等, 经分析可得  $a_m = a_4$ .

【小问 1 详解】

记数列①为  $\{b_n\}$ , 因为  $b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$  与  $b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}$  按次序对应相等,

所以数列①是 “5 阶可重复数列”, 重复的这五项为 0, 0, 1, 1, 0;

记数列②为  $\{c_n\}$ , 因为  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ 、 $c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ 、 $c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$ 、 $c_4, c_5, c_6, c_7, c_8$ 、 $c_5, c_6, c_7, c_8, c_9$ 、 $c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}$  没有完全相同的,

所以  $\{c_n\}$  不是 “5 阶可重复数列”.

【小问 2 详解】

因为数列  $\{a_n\}$  的每一项只可以是 0 或 1, 所以连续 3 项共有  $2^3 = 8$  种不同的情形.

若  $m=11$ ，则数列  $\{a_n\}$  中有 9 组连续 3 项，则这其中至少有两组按次序对应相等，即项数为 11 的数列  $\{a_n\}$  一定是“3 阶可重复数列”；若  $m=10$ ，数列 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0 不是“3 阶可重复数列”；则  $3 \leq m < 10$  时，均存在不是“3 阶可重复数列”的数列  $\{a_n\}$ 。所以，要使数列  $\{a_n\}$  一定是“3 阶可重复数列”，则  $m$  的最小值是 11。

【小问 3 详解】

由于数列  $\{a_n\}$  在其最后一项  $a_m$  后再添加一项 0 或 1，均可使新数列是：“5 阶可重复列”，即在数列  $\{a_n\}$  的末项  $a_m$  后再添加一项 0 或 1，则存在  $i \neq j$ ，使得  $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, a_{i+4}$  与  $a_{m-3}, a_{m-2}, a_{m-1}, a_m, 0$  按次序对应相等，

或  $a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, a_{j+3}, a_{j+4}$  与  $a_{m-3}, a_{m-2}, a_{m-1}, a_m, 1$  按次序对应相等，

如果  $a_1, a_2, a_3, a_4$  与  $a_{m-3}, a_{m-2}, a_{m-1}, a_m$  不能按次序对应相等，

那么必有  $2 \leq i, j \leq m-4, i \neq j$ ，使得  $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}$ 、 $a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, a_{j+3}$  与  $a_{m-3}, a_{m-2}, a_{m-1}, a_m$  按次序对应相等。

此时考虑  $a_{i-1}, a_{j-1}$  和  $a_{m-4}$ ，其中必有两个相同，这就导致数列  $\{a_n\}$  中有两个连续的五项恰按次序对应相等，从而数列  $\{a_n\}$  是“5 阶可重复数列”，这和题设中数列  $\{a_n\}$  不是“5 阶可重复数列”矛盾；

所以  $a_1, a_2, a_3, a_4$  与  $a_{m-3}, a_{m-2}, a_{m-1}, a_m$  按次序对应相等，从而  $a_m = a_4 = 1$ 。

【点睛】关键点点睛：本题考查数列的新定义，因此理解新定义是解题的关键之一，同时需要使用分类讨论的思想与方法是关键点之二，其三本题推理过程中反证法思想的应用也是解题的关键。

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯