

绵阳市高中 2020 级第三次诊断性考试

理科数学

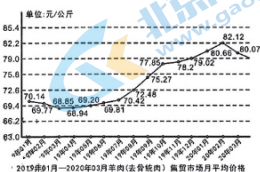
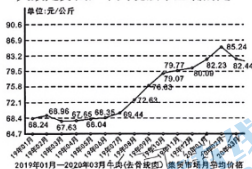
注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 $z=2-i$ ， i 为虚数单位，则 $\bar{z}$ 的虚部为
A. i B. -1 C. 1 D. 2
2. 已知平面向量 $a=(2, 3-m)$ ， $b=(1, m)$ ，若 $a \parallel b$ ，则 $m=$
A. -2 B. 1 C. 2 D. 4
3. 已知集合 $A=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ， $B=\{x \in A \mid -x \in A\}$ ，则 $B=$
A. $\{1, 2\}$ B. $\{-2, -1\}$ C. $\{0, 3\}$ D. $\{3\}$
4. 现有 4 名运动员站成一排照相留念，甲、乙两名运动员都不站两端的概率为
A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$
5. 已知 F 为双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左焦点，点 $M(0, m)$ ，若直线 MF 与双曲线仅有一个公共点，则 $m=$
A. ± 2 B. 2 C. $\pm 2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$
6. 已知 $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ ，且 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，则 $\tan 2\alpha =$
A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\pm \frac{4}{3}$ D. $-\frac{3}{4}$
7. 设函数 $f(x)$ 在定义域 $\mathbb{R}$ 上满足 $f(-x) + f(x) = 0$ ，若 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数，且 $f(-1) = 0$ ，则不等式 $f(e^x) < 0$ 的解集为
A. $\{0, +\infty\}$ B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ C. $(-1, 0)$ D. $(\frac{1}{e}, 1)$

8. 据统计,我国牛、羊肉集贸市场价格在2019年波动幅度较大,2020年开始逐渐趋于稳定。如下图分别为2019年1月至2020年3月,我国牛肉、羊肉集贸市场月平均价格大致走势图,下列说法不正确的是



- A. 2019年1月至2020年3月,牛肉与羊肉月平均价格的涨跌情况基本一致
 B. 2019年3月开始至当年末,牛肉与羊肉的月平均价格都一直持续上涨
 C. 2019年7月至10月牛肉月平均价格的平均增量高于2020年1至2月的增量
 D. 同期相比,羊肉的月平均价格一定高于牛肉的月平均价格

9. 《孔雀东南飞》中曾叙“十三能织素,十四学裁衣,十五弹箜篌,十六诵诗书。”箜篌历史悠久、源远流长,音域宽广、音色柔美清澈,表现力强。如图是箜篌的一种常见的形制,对其进行绘制,发现近似一扇形,在圆弧的两个端点 A, B 处分别作切线相交于点 C ,测得切线 $AC=99.9\text{cm}$, $BC=100.2\text{cm}$, $AB=180\text{cm}$,根据测量数据可估算出该圆弧所对圆心角的余弦值为



- A. -0.62 B. -0.56 C. 0.62 D. 0.56
10. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $C: x^2 + (y-3)^2 = 5$ 相交于 A, B 两点,将四边形 $OACB$ 沿对角线 OC 翻折成直二面角,则所得四面体 $OACB$ 的外接球体积为

- A. $\frac{4}{3}\pi$ B. $\frac{9}{2}\pi$ C. 5π D. 9π
11. 已知 M, N 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上关于原点 O 对称的两点, P 是椭圆 C 上异于 M, N 的点,且 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的最大值是 $\frac{1}{4}a^2$,则椭圆 C 的离心率是

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,且 $f(x) = -x^3 + (a+1)x^2 - (a+3)x + 3$ 与 $|x| \ln|x|$ 中较大的数,若 $f(x) > 0$ 恒成立,则 a 的取值范围为

- A. $[-4, 4]$ B. $[-2\sqrt{3}, +\infty)$
 C. $[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$ D. $[\frac{1-\sqrt{33}}{2}, \frac{1+\sqrt{33}}{2}]$

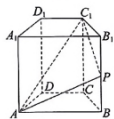
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 执行如图所示的程序框图，若输入 x 的值为 $\log_2 3$ ，则输出 y 的值为_____。

14. 已知函数 $f(x) = 4\cos(2x + \frac{\pi}{6}) - 3$ ，则 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{6})$ 上的零点个数为_____。

15. 在 $\triangle ABC$ 中，已知角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $\frac{c}{b} = \sin A - \cos A$ ，则 $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} =$ _____。

16. 如右图所示，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $CD \parallel AB$ ， $AB = AA_1 = 3$ ， $CD = 2$ ， P 为棱 B_1B 上一点，且 $BP = \lambda PB_1$ (λ 为常数)，直线 D_1D 与平面 PAC_1 相交于点 Q 。则线段 D_1Q 的长为_____。



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

某服装公司经过多年发展，在全国布局了 3500 余家规模相当的销售门店。该公司每年都会设计生产春季新款服装并投放到全国各个门店销售。公司为了了解 2022 年春季新款服装在各个销售门店的销售情况，市场部随机调查了 20 个销售门店的年销售额(单位：万元，不考虑门店之间的其它差异)，统计结果如下：

门店编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
销售额	45	33	30	44	28	22	37	21	19	24
门店编号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
销售额	34	41	23	20	37	31	29	32	36	42

(1) 从以上 20 个门店中随机抽取 3 个，求抽取的 3 个门店中至少有 2 个的年销售额超过 40 万元的概率；

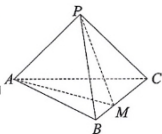
(2) 以样本频率估计概率，现从全国销售门店中随机抽取 3 个，记该年春季新款的年销售额超过 40 万元的销售门店的个数为 ξ ，求 ξ 的分布列及数学期望。

18. (12 分)

如下图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $\triangle PAB$ 和 $\triangle PBC$ 均是以边长为 $2\sqrt{2}$ 的等边三角形，且 $AC=4$ 。

(1) 证明：平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ；

(2) 若点 M 在线段 BC 上，且 $BM = \frac{1}{3}BC$ ，求二面角 $M-PA-B$ 的余弦值。



19. (12分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_4 = 4$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项之积为 T_n , $b_1 = \frac{1}{3}$,

且 $S_n = \log_{\sqrt{3}}(T_n)$.

(1) 求 T_n ;

(2) 令 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 是否存在正整数 n , 使得 “ $c_{n-1} = c_n + c_{n+1}$ ” 与 “ c_n 是 c_{n-1} , c_{n+1} 的等

差中项” 同时成立? 请说明理由,

20. (12分)

已知函数 $f(x) = \ln x + x^2 - ax$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 2)$ 上既有极大值又有极小值, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若直线 $y = x - a$ 与曲线 $y = f(x)$ ($x > \frac{\sqrt{2}}{2}$) 相切, 求实数 a 的值.

21. (12分)

过点 $A(2, 0)$ 的直线 l 与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 交于点 M, N (M 在第一象限), 当

直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 时, $|MN| = 3\sqrt{2}$.

(1) 求抛物线的方程;

(2) 已知 $B(3, 0)$, 延长 MB 交抛物线 C 于点 P , 当 $\triangle MNP$ 面积最小时, 求点 M 的横坐标.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. [选修 4—4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 xOy 中, 已知圆 C 的方程为: $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

(1) 写出圆 C 的一个参数方程;

(2) 若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是圆 C 上不同的两点, 且 $|AB| = 2\sqrt{2}$, 求 $x_1x_2 + y_1y_2$ 的最大值.

23. [选修 4—5: 不等式选讲] (10分)

已知 a, b, c 均为正实数, 且 $4+2b+3c=4$.

(1) 若 $a=1$, 求证: $\sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \frac{\sqrt{10}}{2}$;

(2) 若 $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 2$, 求 a 的取值范围.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯