中学生标准学术能力诊断性测试 2024 年 3 月测试

数学试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟．

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{2a^2,a-4,-10\}$，$B=\{-a+10,-2-4a,25\}$，且 $A\cap B=\{-10\}$，则（　　）

A．$A=\{8,-2,-10\}$　　B．$B=\{-10,-78,25\}$

C．$a=2$ 或 20　　D．$A\cup B=\{800,16,-10,-82,25\}$

2．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-3x,x\le 3\\ \log_3 x,x>3\end{cases}$，若 $\exists x_0=\mathbf{R}$，使得 $f(x_0)\le 10m+4m^2$ 成立，则实数 m 的取值范围为（　　）

A．$\left[-\frac{9}{4},-\frac{1}{4}\right]$　　B．$\left[-\frac{5}{2},0\right]$

C．$\left(-\infty,-\frac{9}{4}\right]\cup\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$　　D．$\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right]\cup[0,+\infty)$

3．已知 $\sin\left(\frac{2\pi}{7}+\alpha\right)=\frac{1}{5}$，那么 $\tan\left(\frac{31\pi}{14}-\alpha\right)=$（　　）

A．$-\frac{1}{5}$　　B．$\pm 2\sqrt{6}$　　C．$\frac{2\sqrt{6}}{5}$　　D．$2\sqrt{6}$

4．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=n^2+3n$，若首项为 $\frac{1}{2}$ 的数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{b_n}=a_n$，则数列 $\{b_n\}$ 的前 2024 项和为（　　）

A．$\frac{1012}{2023}$　　B．$\frac{2025}{2024}$　　C．$\frac{2023}{2024}$　　D．$\frac{2024}{2025}$

5．已知点 $A(2,6)$，$B(-2,-3)$，$C(0,1)$，$D\left(\frac{7}{2},6\right)$，则与向量 $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}$ 同方向的单位向量为（　　）

A．$\left(\frac{3\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$　　B．$\left(\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$　　C．$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$　　D．$\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

6. 已知圆 $M: x^2+y^2-2ax=0\left(a>0\right)$ 的圆心到直线 $2x+y=2$ 距离是 $\sqrt{5}$，则圆 M 与圆 $N:\left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2=1$ 的位置关系是（　　）

A．外离　　B．相交　　C．内含　　D．内切

7. 已知 $\left(3x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的展开式的各项系数和为 4096，则展开式中 x^6 的系数为（　　）

A．15　　B．1215　　C．2430　　D．81

8. 设 $a\in\mathbf{R}$，若复数 $\dfrac{2+3i}{a-2i}$（i 为虚数单位）在复平面内对应的点在直线 $y=-x$ 上，则 $a=$（　　）

A．-2　　B．-10　　C．$\dfrac{2}{5}$　　D．2

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对得 5 分，部分选对但不全得 2 分，有错选的得 0 分．

9. 下列说法正确的是（　　）

A．不等式 $4x^2-5x+1>0$ 的解集是 $\left\{x\middle|x>\dfrac{1}{4}\text{或}x<1\right\}$

B．不等式 $2x^2-x-6\le0$ 的解集是 $\left\{x\middle|x\le-\dfrac{3}{2}\text{或}x\ge2\right\}$

C．若不等式 $ax^2+8ax+21<0$ 恒成立，则 a 的取值范围是 $\varnothing$

D．若关于 x 的不等式 $2x^2+px-3<0$ 的解集是 $\left(q,1\right)$，则 $p+q$ 的值为 $-\dfrac{1}{2}$

10. 已知 m、n 为两条不重合的直线，α、β 为两个不重合的平面，则下列说法正确的是（　　）

A．若 $m\perp\alpha$，$n\perp\beta$ 且 $\alpha /\!/ \beta$，则 $m /\!/ n$　　B．若 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

C．若 $m /\!/ n$，$n\subset\alpha$，$\alpha /\!/ \beta$，则 $m /\!/ \beta$　　D．若 $m /\!/ n$，$n\perp\alpha$，$\alpha\perp\beta$，$m\not\subset\beta$，则 $m /\!/ \beta$

11. 设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，P 是 C 上的动点，则下列结论正确的是（　　）

A．$|PF_1|+|PF_2|=5$

B．离心率 $e=\dfrac{3}{5}$

C．$\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值为 12

D．以线段 F_1F_2 为直径的圆与圆 $\left(x-4\right)^2+\left(y-3\right)^2=4$ 相切

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

12．已知函数 $f(x)=\begin{cases}kx-k,x\le 1\\ \log_3 x,x>1\end{cases}$，下列关于函数 $y=f(|f(x)|)-2$ 的零点个数的判断，其中正确的是（　　）

A．当 $k>0$ 时，有 2 个零点　　B．当 $k<0$ 时，至少有 2 个零点

C．当 $k>0$ 时，有 1 个零点　　D．当 $k<0$ 时，可能有 4 个零点

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．若变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-1\le 0\\ x-2y+4\ge 4\\ y+2\ge 0\end{cases}$，则 xy 的最大值是______．

14．在平面直角坐标系中，已知点 $A(1,2)$、$B(-2,-4)$，E、F 是直线 $y=x+3$ 上的两个动点，且 $|\overrightarrow{EF}|=3\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$ 的最小值为______．

15．设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $\frac{S_7}{S_6}=\frac{13}{11}$，则 $\frac{S_{15}}{S_{11}}=$______．

16．若 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是两个夹角为 $120°$ 的单位向量，则向量 $5\vec{a}-3\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 方向上的投影向量为______．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $\tan 2C=-\frac{3}{4}$．

（1）求 $\cos C$；（2）若 $c=4$，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值．

18．（12 分）设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+4n-4$．

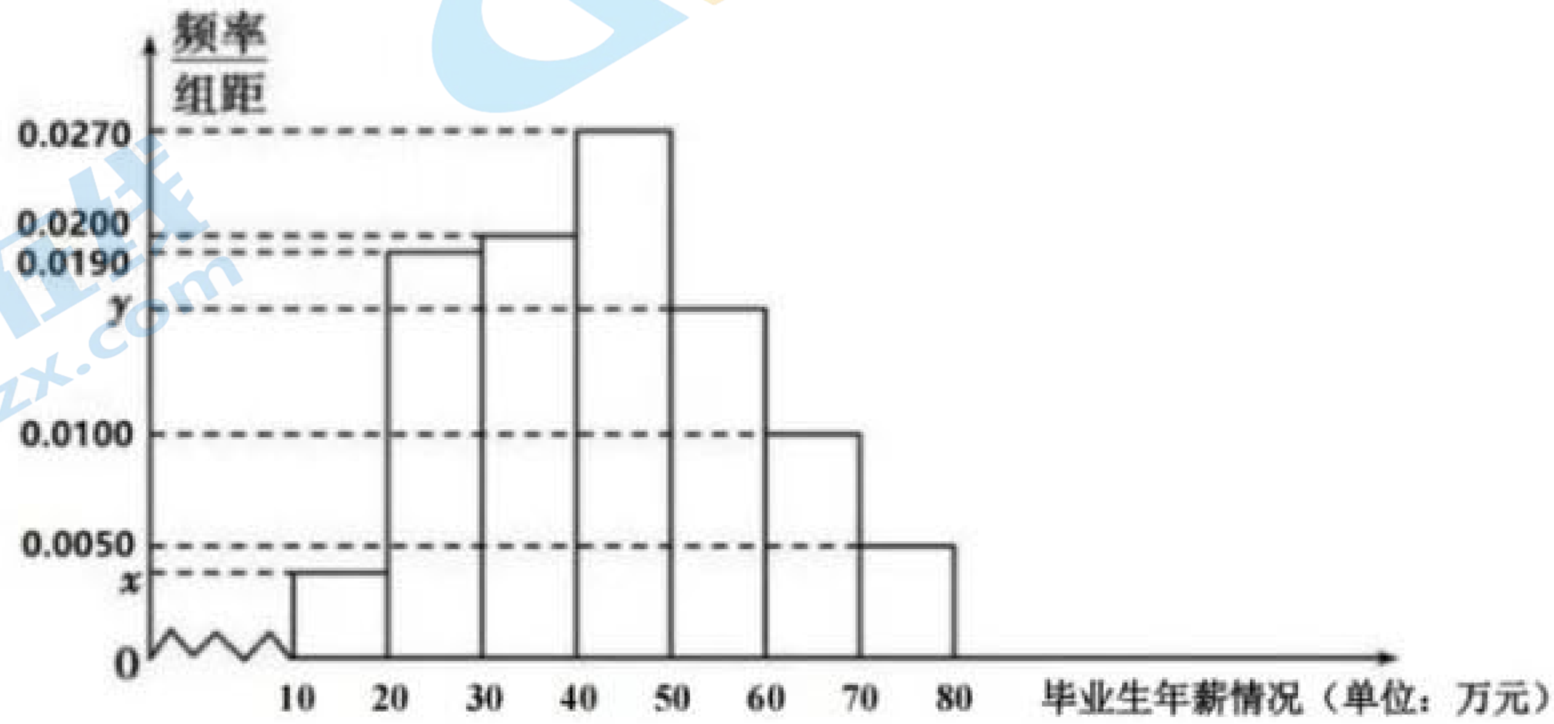
（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；（2）求数列 $\{n+3^n a_n\}$ 的前 n 项和 S_n．

19．（12 分）已知过点 $(1,0)$ 的动直线 l 与圆 $C_1: x^2+y^2-4x=0$ 相交于不同的两点 A，B．

（1）求圆 C_1 的圆心坐标；（2）求线段 AB 的中点 M 的轨迹 C 的方程．

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

20．（12 分）某中外合作办学学院为了统计学院往届毕业生薪酬情况，面向学院部分毕业生发放问卷统计了其薪资情况，共有 200 名毕业生进行了问卷填写．毕业生年薪（单位：万元），以$[10,20)$，$[20,30)$，$[30,40)$，$[40,50)$，$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$分组的频率分布直方图如图所示．年薪在$[50,60)$的毕业生人数比年薪在$[10,20)$的毕业生人数多 22 人．



（1）求直方图中 x，y 的值；

（2）①用样本估计总体，比较学院毕业生与同类型合作办学高校毕业生薪资水平，如果至少 77%的毕业生年薪高于同类型合作办学高校毕业生平均薪资水平，则说明同类型合作办学高校毕业生平均年薪最高为多少；

②若将频率视为概率，现从该学院毕业生中随机抽取 4 人，其中年薪高于 50 万的人数为ξ，求ξ的分布列及数学期望$E(\xi)$．

21．（12 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{2x^2-ax+a}{e^x}$，其中 $a\in\mathbf{R}$．

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程；（2）求证：$f(x)$ 的极大值恒为正数．

22．（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，点 A 在椭圆 E 上且在第一象限内，$AF_1\perp AF_2$，点 A 关于 y 轴的对称点为点 B．

（1）求 A 点坐标；

（2）在 x 轴上任取一点 P，直线 AP 与直线 $y=\sqrt{3}$ 相交于点 Q，求 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的最大值；

（3）设点 M 在椭圆 E 上，记 $\triangle OAB$ 与 $\triangle MAB$ 的面积分别为 S_1，S_2，若 $S_1=2S_2$，求点 M 的坐标．

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

中学生标准学术能力诊断性测试 2024 年 3 月测试

数学参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8
D	C	B	D	A	C	B	C

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对但不全的得 2 分，有错选的得 0 分．

9	10	11	12
CD	ABD	BCD	ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．16　　14．$-\dfrac{185}{8}$　　15．$\dfrac{645}{451}$　　16．$\vec{a}+\vec{b}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

（1）$\because \tan 2C=\dfrac{2\tan C}{1-\tan^2 C}=-\dfrac{3}{4}$

解得 $\tan C=3$，故 $\cos C=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

（2）$\because a^2+b^2=c^2+2ab\cos C=16+\dfrac{\sqrt{10}}{5}ab\geq 2ab$

解得 $ab\leq\dfrac{80+8\sqrt{10}}{9}$

由（1）知 $\sin C=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C\leq\dfrac{4+4\sqrt{10}}{3}$

故 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\dfrac{4+4\sqrt{10}}{3}$．

18．（12 分）

（1）对于 $n\geq 2$ 时，$a_{n+1}+4(n+1)=2a_n+8n=2(a_n+4n)$

$a_1=2$，$a_1+4\times1=6$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

$a_n+4n=3\times 2^n$，$a_n=3\times 2^n-4n$

经验算，a_1 符合上述结果，故 $a_n=3\times 2^n-4n$

（2）设 $b_n=n+3^n a_n=n+3\times 6^n-4n\times 3^n$，

则 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{18\times(1-6^n)}{1-6}-4n\times 3^n$

设 $T_n=4n\times 3^n$，$T_n=4\times 3^1+8\times 3^2+12\times 3^3+\cdots+4n\times 3^n$，

$3T_n=4\times 3^2+8\times 3^3+12\times 3^4+\cdots+4n\times 3^{n+1}$

作差得到 $2T_n=-4\times 3^1-4\times 3^2-4\times 3^3-\cdots-4\times 3^n+4n\times 3^{n+1}$

故 $T_n=\dfrac{-6\times(1-3^n)}{1-3}+2n\times 3^{n+1}=(2n-1)\times 3^{n+1}+3$

$\because S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{18\times(1-6^n)}{1-6}-T_n$

故 $S_n=\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{2}+\dfrac{18}{5}\times 6^n-(2n-1)\times 3^{n+1}-\dfrac{33}{5}$

19.（12 分）

（1）圆 C_1 的方程可变形为 $(x-2)^2+y^2=4$

故 C_1 的圆心坐标为 $(2,0)$，半径为 2

（2）设 $M(x_M,y_M)$，因为点 M 是 AB 的中点，$\therefore C_1M\perp AB$，

$\therefore k_{C_1M}\cdot k_{AB}=-1$

故 $\dfrac{y_M}{x_M-2}\cdot\dfrac{y_M}{x_M-1}=-1$

由此可得 $x_M^2-3x_M+y_M^2+2=0$

故轨迹方程为 $\left(x_M-\dfrac{3}{2}\right)^2+y_M^2=\dfrac{1}{4}$，轨迹是以圆心为 $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$，半径为 $\dfrac{1}{2}$ 的圆

20.（12 分）

（1）解：$10x+10\times 0.005+10\times 0.01+10y+10\times 0.019+10\times 0.02+10\times 0.027=1$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

故 $x+y=0.019$

$200\times10y-200\times10x=22$，

故 $y-x=0.011$·

解得 $x=0.004$， $y=0.015$

（2）①学院毕业生年薪在 $[30,80)$ 区间的人数比例为：$(0.02+0.027+0.015+0.01+0.005)\times10=77\%$，

故同类型合作办学高校毕业生平均年薪最高为 30 万元

②对于单个毕业生，其年薪高于 50 万的概率 $P=(0.005+0.01+0.015)\times10=0.3$，

故随机变量 $\xi\sim B\left(4,\dfrac{3}{10}\right)$，

故 $P(\xi=0)=(1-0.3)^4=0.2401$

$P(\xi=1)=C_4^1\times(1-0.3)^3\times0.3=0.4116$

$P(\xi=2)=C_4^2\times(1-0.3)^2\times0.3^2=0.2646$

$P(\xi=3)=C_4^3\times(1-0.3)\times0.3^3=0.0756$

$P(\xi=4)=0.3^4=0.0081$

ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3	4
P	0.2401	0.4116	0.2646	0.0756	0.0081

ξ 的数学期望 $E(\xi)=0.3\times4=1.2$

21.（12 分）

（1）$\because f'(x)=\dfrac{(4x-a)e^x-e^x(2x^2-ax+a)}{(e^x)^2}=\dfrac{-2x^2+(a+4)x-2a}{e^x}$

当 $a=1$ 时，$f'(x)=\dfrac{-2x^2+5x-2}{e^x}$， $f'(0)=-2$

又 $\because f(0)=1$，故曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=-2x+1$

（2）$\because f'(x)=\dfrac{-2x^2+(a+4)x-2a}{e^x}=\dfrac{(-2x+a)(x-2)}{e^x}=0$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

解得知 $x_1=2$，$x_2=\frac{a}{2}$

若 $a>4$，$f(x)$在$(-\infty,2)$，$\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$递减，$\left(2,\frac{a}{2}\right)$递增·

极大值 $f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a}{e^{\frac{a}{2}}}>0$

若 $a=4$，函数单调递减，无极大值

若 $a<4$，$f(x)$在$\left(-\infty,\frac{a}{2}\right)$，$(2,+\infty)$递减，$\left(\frac{a}{2},2\right)$递增

极大值 $f(2)=\frac{8-a}{e^2}>0$

综上，$f(x)$的极大值恒为正数.

22.（12 分）

（1）椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左，右焦点分别为 $F_1\left(-\sqrt{3},0\right)$，$F_2\left(\sqrt{3},0\right)$，

设 $A(m,n)$，$AF_1\perp AF_2$，故 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=(-\sqrt{3}-m,-n)(\sqrt{3}-m,-n)=0$

即 $m^2+n^2=3$

又 $\frac{m^2}{4}+n^2=1$，解得 $m=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$n=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore A$ 点坐标为 $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

（2）设 P 点坐标为 $(p,0)$，则可得 Q 点坐标为 $\left(2\sqrt{6}-2p,\sqrt{3}\right)$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(p,0)(2\sqrt{6}-2p,\sqrt{3})=-2p^2+2\sqrt{6}p=-2\left(p-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+3$

当 $p=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 取最大值，最大值为 3

（3）A 点坐标为 $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$B$ 点坐标为 $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

点 O 到线段 AB 的距离 $h_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$

若 $S_1=2S_2$，则点 M 到线段 AB 的距离应为 $h_2=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

故 M 点的纵坐标为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，代入椭圆方程，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

解得 M 点的横坐标为 $\pm\frac{\sqrt{33}}{3}$ 或 ±1

故 M 点的坐标为：$\left(\pm\frac{\sqrt{33}}{3},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ 或 $\left(\pm1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！