

石景山区 2018—2019 学年第一学期高三期末试卷

数 学 (文)

本试卷共 6 页，满分为 150 分，考试时间为 120 分钟。请务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效，考试结束后上交答题卡。

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $P = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$ ， $Q = \{-1, 0, 1, 2\}$ ，则 $P \cap Q =$

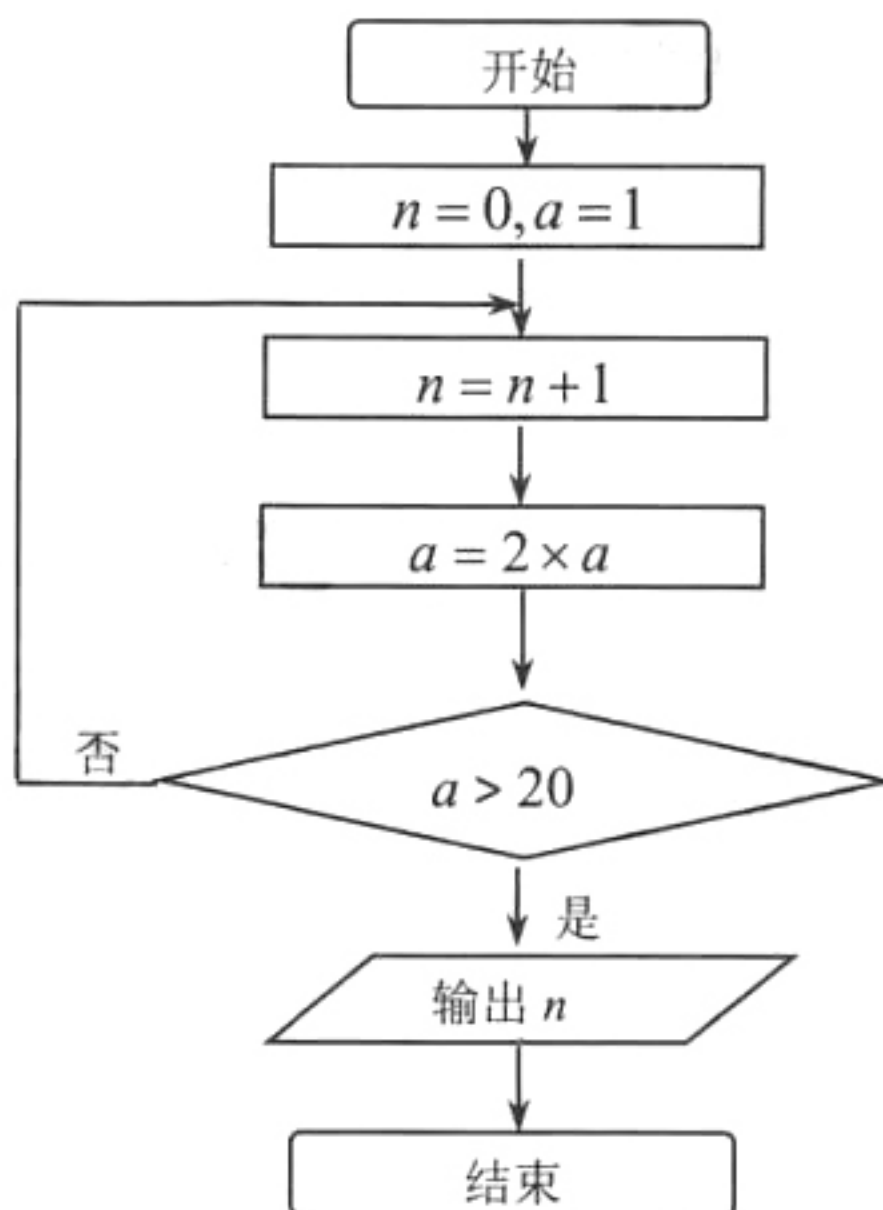
- A. $\{1, 2\}$ B. $\{0, 2\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

2. 设 i 是虚数单位，复数 $z = \frac{2i}{1-i}$ ，则 z 对应的点位于

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 阅读右边的程序框图，运行相应的程序，则输出 n 的值为

- A. 3
B. 4
C. 5
D. 6



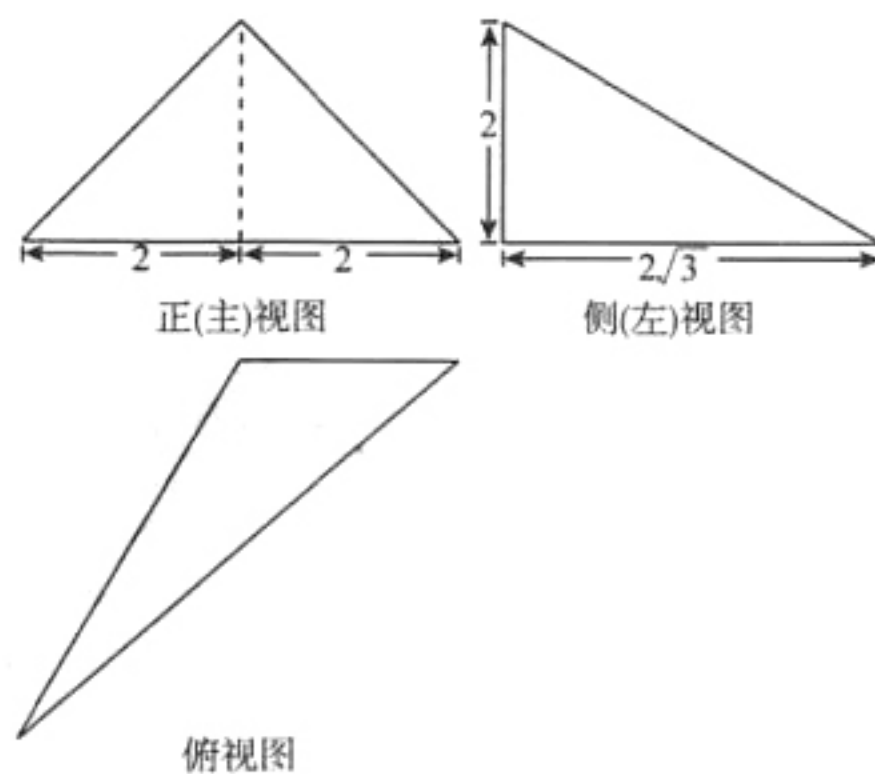
4. 下列函数中为偶函数的是

- A. $y = \ln|x|$ B. $y = |\ln x|$
C. $y = x \cos x$ D. $y = x + \cos x$

5. 某四面体的三视图如图所示, 该四面

体的体积为

- A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$
C. $4\sqrt{3}$
D. $8\sqrt{3}$



6. 已知向量 $\vec{a} = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\vec{b} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, 则下列关系正确的是

- A. $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$
B. $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{a}$
C. $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$
D. $(\vec{a} + \vec{b}) \parallel (\vec{a} - \vec{b})$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=6, c=4, \angle A=60^\circ$, 则 $\tan C$ 的值是

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$
D. $\sqrt{2}$

8. 关于 x 的不等式 $ax^2 - |x+1| + 3a \geq 0$ 的解集是 $(-\infty, +\infty)$, 则实数 a 的取值范围是

- A. $[\frac{1}{6}, +\infty)$
B. $[\frac{1}{3}, +\infty)$
C. $[\frac{1}{2}, +\infty)$
D. $[\frac{1}{12}, +\infty)$

第二部分 (非选择题共 110 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

9. 已知角 α 的终边经过点 $P(-3, 4)$, 则 $\sin \alpha =$ _____.

10. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+1 \leq y, \\ y \leq 2x, \\ x+y \leq 6, \end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最小值等于_____.

11. 若直线 $3x-4y+5=0$ 与圆 $x^2+y^2=r^2 (r>0)$ 相交于 A, B 两点, 且

$\angle AOB = 120^\circ$ (O 为坐标原点), 则 $r =$ _____.

高三数学 (文) 试题第 2 页 (共 6 页)

12. 写出“ $x + \frac{1}{x} \leq -2$ ”成立的一个充分不必要条件_____.
13. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线为 l ， l 与双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的两条渐近线分别交于 A, B 两点，则线段 AB 的长度为_____.
14. 2018 年个税改革方案中专项附加扣除等内容将于 2019 年全面施行. 不过，为了让老百姓尽早享受到减税红利，自 2018 年 10 月至 2018 年 12 月，先将工资所得税起征额由 3500 元/月提高至 5000 元/月，并按新的税率表（见附录）计算纳税.

按照税法规定，小王 2018 年 9 月和 10 月税款计算情况分别如下：

月份		纳税所得额	起征额	应纳税额	适用税率	速算扣除数	税款	税后工资
9		6000	3500	2500	10%	105	145	5855
10		6000	5000	1000	3%	0	30	5970

（相关计算公式为：应纳税额=纳税所得额 - 起征额，

税款=应纳税额×适用税率 - 对应档的速算扣除数，

税后工资=纳税所得额 - 税款）

- (1) 某职工甲 2018 年 9 月应纳税额为 2000 元，那么他 9 月份的税款为____元；
- (2) 某职工乙 2018 年 10 月税后工资为 14660 元，则他享受减税红利为____元.

附录：

原税率表（执行至 2018 年 9 月）

应纳税额	税率	速算扣除数
不超过 1500 元	3%	0 元
1500 元至 4500 元	10%	105 元
4500 元至 9000 元	20%	555 元
9000 元至 35000 元	25%	1005 元
.....		

新税率表（2018 年 10 月起执行）

应纳税额	税率	速算扣除数
不超过 3000 元	3%	0 元
3000 元至 12000 元	10%	210 元
12000 元至 25000 元	20%	1410 元
25000 元至 35000 元	25%	2660 元
.....		

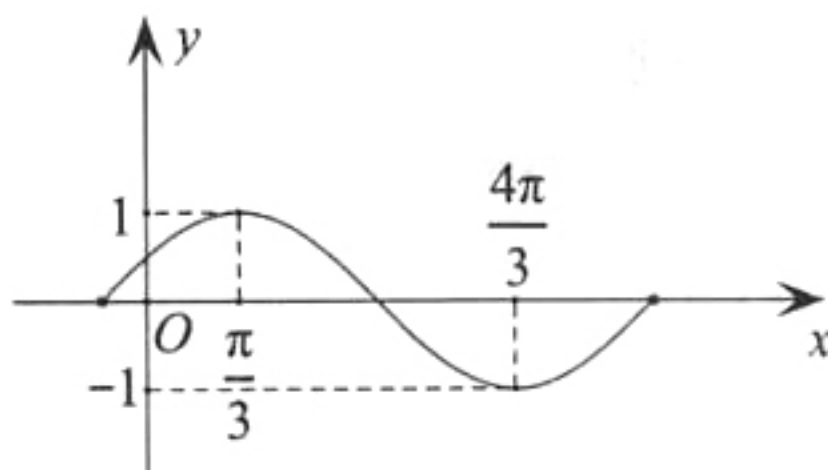
三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15. (本小题 13 分)

函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期及解析式;

(II) 设 $g(x) = f(x) - \cos x$, 求函数 $g(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最小值.



16. (本小题 13 分)

已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1 = 1, S_3 = 6$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = 2^{a_n}$, T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 是否存在 $m \in \mathbf{N}^*$, 使得 $T_m = S_{20} + 44$? 若

存在, 求出 m 的值; 若不存在, 说明理由.

17. (本小题 13 分)

2018 年 9 月, 某校高一年级新入学有 360 名学生, 其中 200 名女生, 160 名男生. 学校计划为家远的高一新生提供 10 间女生宿舍和 8 间男生宿舍, 每间宿舍可住 2 名同学.

该校“数学与统计”社团的同学为了解全体高一学生家庭居住地与学校的距离情况, 按照性别进行分层抽样, 其中共抽取 20 名女生家庭居住地与学校的距离数据(单位: km) 如下:

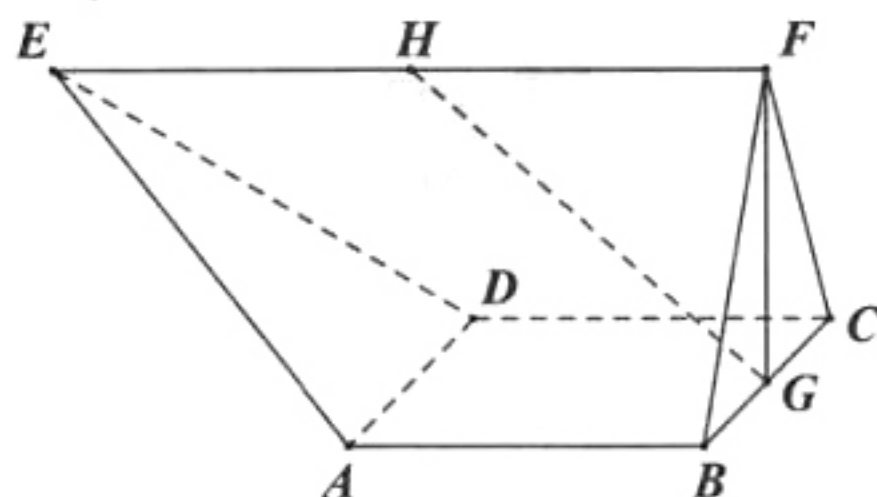
5	6	7	7.5	8	8.4	4	3.5	4.5	4.3
5	4	3	2.5	4	1.6	6	6.5	5.5	5.7

- (I) 根据以上样本数据推断, 若女生甲家庭居住地与学校距离为 8.3 km, 她是否能住宿? 说明理由;
- (II) 通过计算得到女生家庭居住地与学校距离的样本平均值为 5.1 km, 男生家庭居住地与学校距离的样本平均值为 4.875 km, 则所有样本数据的平均值为多少?
- (III) 已知某班有 4 名女生安排在两间宿舍中, 其中有一对双胞胎, 如果随机分配宿舍, 求双胞胎姐妹被分到同一宿舍的概率.

18. (本小题 14 分)

如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 已知 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $\triangle BCF$ 为正三角形, $EF = 4$ 且 $EF \parallel AB$, $EF \perp FB$, G, H 分别为 BC, EF 的中点.

- (I) 求证: $GH \parallel$ 平面 EAD ;
- (II) 求证: $FG \perp$ 平面 $ABCD$;
- (III) 求三棱锥 $G-ADE$ 的体积.



19. (本小题 14 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $(0, \sqrt{3})$, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 设过椭圆右焦点的直线 l_1 交椭圆于 A 、 B 两点, 过原点的直线 l_2 交椭圆于 C 、 D 两

点. 若 $l_1 \parallel l_2$, 求证: $\frac{|CD|^2}{|AB|}$ 为定值.

20. (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = (x + a) \ln x$.

(I) 当 $a = 0$ 时, 求 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程;

(II) 当 $a > 0$ 时, 若 $f(x)$ 有极小值, 求实数 a 的取值范围.

石景山区 2018-2019 学年第一学期高三期末

数学（文）试卷答案及评分参考

一、选择题：本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	C	A	A	C	B	C

二、填空题：本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. $\frac{4}{5}$; 10. 4; 11. 2;
12. $(0, +\infty)$ 的真子集即可; 13. 1; 14. 95, 1155.

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 80 分。解答题应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15. (本小题 13 分)

解：(I) 由图可得 $A=1$,1 分

$$\frac{T}{2} = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi, \text{ 所以 } T = 2\pi, \omega = 1. \quad \text{.....3 分}$$

$$\text{当 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 时, } f(x) = 1, \text{ 可得 } \sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 1,$$

$$\because |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6}. \quad \text{.....5 分}$$

$$\therefore f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \quad \text{.....6 分}$$

$$(II) \quad g(x) = f(x) - \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos x = \sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} - \cos x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right). \quad \text{.....9 分}$$

$$\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \therefore -\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{3}. \quad \text{.....11 分}$$

$$\text{当 } x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}, \text{ 即 } x = 0 \text{ 时, } g(x) \text{ 有最小值为 } -\frac{1}{2}. \quad \text{.....13 分}$$

16. (本小题 13 分)

解: (I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{则 } S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 3a_1 + 3d = 6, \quad \text{.....2 分}$$

$$\text{又 } a_1 = 1, \text{ 所以 } d = 1, a_n = n. \quad \text{.....5 分}$$

(II) 因为 $b_n = 2^{a_n} = 2^n$, 所以 $\{b_n\}$ 为等比数列.7 分

$$\text{所以 } T_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} - 2. \quad \text{.....9 分}$$

假设存在 $m \in \mathbf{N}^*$, 使得 $T_m = S_{20} + 44$.

$$S_{20} = \frac{20 \times (1+20)}{2} = 210, \quad \text{.....11 分}$$

$$\text{所以 } 2^{m+1} - 2 = 210 + 44, \text{ 即 } 2^{m+1} = 256, \text{ 所以 } m = 7 \text{ 满足题意.} \quad \text{.....13 分}$$

17. (本小题 13 分)

解: (I) 能住宿.4 分

(II) 根据分层抽样的原则, 抽取女生样本数为 16 人.

$$\text{所有样本数据平均值为 } \frac{20 \times 5.1 + 16 \times 4.875}{20 + 16} = 5. \quad \text{.....8 分}$$

(III) 解法一: 记住宿的双胞胎为 A_1, A_2 , 其他住宿女生为 B_1, B_2 .

考虑 A_1 的室友, 共有 A_2, B_1, B_2 三种情况,

$$\text{所以双胞胎姐妹被分到同一宿舍的概率为 } \frac{1}{3}. \quad \text{.....13 分}$$

解法二: 记住宿的双胞胎为 A_1, A_2 , 其他住宿女生为 B_1, B_2 .

随机分配宿舍, 共有

$[(A_1, A_2), (B_1, B_2)], [(A_1, B_1), (A_2, B_2)], [(A_1, B_2), (A_2, B_1)]$ 三种情况,

满足题意得有 $[(A_1, A_2), (B_1, B_2)]$ 一种情况,

$$\text{所以双胞胎姐妹被分到同一宿舍的概率为 } \frac{1}{3}.$$

18. (本小题 14 分)

(I) 证明: 取 AD 的中点 M , 连结 EM, MG ,

.....1 分

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, G 为 BC 的中点,

$\therefore MG \parallel AB$,

$\because H$ 为 EF 的中点, 且 $EF = 4$,

$\therefore EH = \frac{1}{2}EF = 2$, 又 $EF \parallel AB$,

$\therefore MG \parallel EH$,

$\therefore$ 四边形 $MGHE$ 为平行四边形,

.....3 分

$\therefore EM \parallel HG$,

又 $EM \subset$ 平面 EAD , $HG \not\subset$ 平面 EAD ,

$\therefore GH \parallel$ 平面 EAD .

.....5 分

(II) 证明: $\because EF \parallel AB$, $EF \perp FB$,

$\therefore AB \perp FB$,

在正方形 $ABCD$ 中 $AB \perp BC$, 且 $BC \cap FB = B$,

$\therefore AB \perp$ 平面 FBC ,

.....7 分

$\because FG \subset$ 平面 FBC ,

$\therefore AB \perp FG$,

.....8 分

又 $\triangle BCF$ 为正三角形, G 为 BC 的中点,

$\therefore FG \perp BC$

又 $AB \cap BC = B$

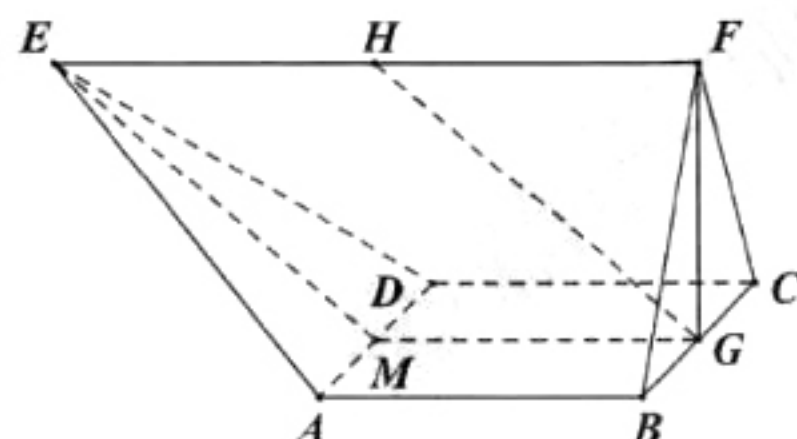
$\therefore FG \perp$ 平面 $ABCD$.

.....10 分

(III) $\because EF \parallel AB$,

$\therefore EF \parallel$ 平面 $ABCD$,

$\because FG \perp$ 平面 $ABCD$,



$\therefore FG$ 为三棱锥 $E-ADG$ 的高,12 分

$\because \triangle BCF$ 为正三角形, G 为 BC 的中点,

$\therefore FG = \sqrt{3}$,

$\therefore V_{G-ADE} = V_{E-ADG} = \frac{1}{3} S_{\triangle ADG} \cdot FG = \frac{1}{3} \times 2 \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$14 分

19. (本小题 14 分)

解: (I) 依题意, $b = \sqrt{3}$1 分

由 $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{1}{2}$, 得 $a^2 = \frac{4}{3}b^2 = 4$3 分

$\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$4 分

(II) 证明: (1) 当直线 AB 的斜率不存在时, 易求 $|AB| = 3$, $|CD| = 2\sqrt{3}$,

则 $\frac{|CD|^2}{|AB|^2} = 4$6 分

(2) 当直线 AB 的斜率存在时,

设直线 AB 的斜率为 k , 依题意 $k \neq 0$,

则直线 AB 的方程为 $y = k(x-1)$, 直线 CD 的方程为 $y = kx$.

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$,

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x-1) \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3+4k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{4k^2 - 12}{3+4k^2}$,9 分

$|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2|$

$$= \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{8k^2}{3+4k^2}\right)^2 - 4\left(\frac{4k^2-12}{3+4k^2}\right)} = \frac{12(1+k^2)}{3+4k^2}. \quad \dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = kx \end{cases} \text{整理得 } x^2 = \frac{12}{3+4k^2}, \text{ 则 } |x_3 - x_4| = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3+4k^2}}.$$

$$|CD| = \sqrt{1+k^2} |x_3 - x_4| = 4\sqrt{\frac{3(1+k^2)}{3+4k^2}}. \quad \dots 13 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{|CD|^2}{|AB|^2} = \frac{48(1+k^2)}{3+4k^2} \cdot \frac{3+4k^2}{12(1+k^2)} = 4.$$

$$\text{综合 (1) (2), } \frac{|CD|^2}{|AB|^2} = 4 \text{ 为定值.} \quad \dots 14 \text{ 分}$$

20. (本小题 13 分)

解: (I) 当 $a=0$ 时, $f(x) = x \ln x$, $f'(x) = \ln x + 1$1 分

$$f'(1) = 1, f(1) = 0, \quad \dots 3 \text{ 分}$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y = x - 1$4 分

(II) $f(x)$ 有极小值 $\Leftrightarrow$ 函数 $f'(x)$ 有左负右正的变号零点.

$$f'(x) = \ln x + (x+a) \frac{1}{x} = \ln x + \frac{a}{x} + 1 \quad \dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{令 } g(x) = f'(x), \text{ 则 } g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} = \frac{x-a}{x^2}$$

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = a$.

$x, g'(x), g(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, a)$	a	$(a, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	减	极小值 $\ln a + 2$	增

...8 分

① 若 $\ln a + 2 \geq 0$, 即 $a \geq e^{-2}$, 则 $g(x) \geq 0$, 所以 $f'(x)$ 不存在变号零点, 不合题意.

② 若 $\ln a + 2 < 0$ ，即 $a < e^{-2}$ 时， $g(a) = \ln a + 2 < 0$ ， $g(1) = a + 1 > 0$ 。

所以 $\exists x_0 \in (a, 1)$ ，使得 $g(x_0) = 0$ ；

且当 $x \in (a, x_0)$ 时， $g(x) < 0$ ，当 $x \in (x_0, 1)$ 时， $g(x) > 0$ 。

所以当 $x \in (a, 1)$ 时， $x, f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表：

x	(a, x_0)	x_0	$(x_0, 1)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	减	极小值	增

所以 $0 < a < e^{-2}$ 。

...13分

【若有不同解法，请酌情给分】