秘密★启封并使用完毕前【考试时间：2021年3月23日下午15:00—17:00】

南充市高2021届第二次高考适应性考试

理科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

C 1. 已知集合 $A=\{x|x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 2\}$，$B=\{x|x^2-x-2<0\}$，则 $A\cap B=$

A. R　　B. $\varnothing$　　C. $(-1,0]$　　D. $(2,+\infty)$

D 2. 设复数 z 满足 $\frac{z+1}{z}=i$，则下列说法正确的是　$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

A. z 为纯虚数　　B. z 的虚部为 $-\frac{1}{2}i$　　C. $\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$　　D. $|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

B 3. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_{11}=55$，那么 $a_6=$

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

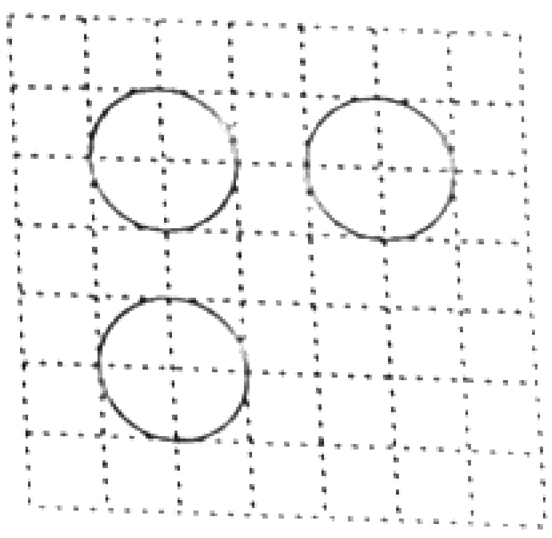
D 4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$，$E$ 为 AD 的中点. 若 $\overrightarrow{EB}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则　$\frac{3}{4}AB-\frac{1}{4}AC$

A. $y=3x$　　B. $x=3y$　　C. $y=-3x$　　D. $x=-3y$

A 5. 已知点 $A(3,2)$，抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，点 M 在抛物线 C 上，当 $\triangle MAF$ 的周长最小时，点 M 的坐标为

A. $(1,2)$　　B. $(2,1)$　　C. $(0,0)$　　D. $(3,2\sqrt{3})$

D 6. 如图，边长为1的正方形网格中，实线画出的是某种装饰品的三视图. 已知该装饰品由木质毛坯切削得到，则所用毛坯可以是



A. 棱长都为2的四面体

B. 棱长都为2的直三棱柱

C. 底面直径和高都为2的圆锥

D. 底面直径和高都为2的圆柱

7. 已知二元一次不等式组 $\begin{cases} x+y-2\geq 0, \\ x-y+2\geq 0, \\ x+2y-2\geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域为 D，命题 p：点 $(0,1)$ 在区域 D 内；命题 q：点 $(1,1)$ 在区域 D 内，则下列命题中，真命题是

A. $p\wedge q$　　　　B. $(\neg p)\wedge q$　　　　C. $p\wedge(\neg q)$　　　　D. $(\neg p)\wedge(\neg q)$

8. 在发生某公共卫生事件期间，有专业机构认为该事件在一段时间内没有发生大规模群体感染的标志是"连续 10 日，每天新增疑似病例不超过 7 人"．过去 10 日，甲、乙、丙、丁四地新增疑似病例数据信息如下：

甲地：总体平均数为 3，中位数为 4；乙地：总体平均数为 1，总体方差大于 0；

丙地：总体平均数为 2，总体方差为 3；丁地：中位数为 2，众数为 3．

则甲、乙、丙、丁四地中，一定没有发生大规模群体感染的是

A. 甲地　　　　B. 乙地　　　　C. 丙地　　　　D. 丁地

9. 被誉为"中国现代数学之父"的著名数学家华罗庚先生倡导的"0.618 优选法"在生产和科研实践中得到了非常广泛的应用．0.618 就是黄金分割比 $m=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的近似值，黄金分割比还可以表示成 $2\sin 18^{\circ}$，则 $\frac{m\sqrt{4-m^2}}{2\sin^2 63^{\circ}-1}=$

A. 2　　　　B. 4　　　　C. $\sqrt{5}-1$　　　　D. $\sqrt{5}+1$

10. 定义在 R 上的函数 $f(x)=-3^{|x+m|}+2$ 为偶函数，$a=f(\log_2\frac{1}{2})$，$b=f((\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}})$，$c=f(m)$，则

A. $c<a<b$　　　　B. $a<c<b$　　　　C. $a<b<c$　　　　D. $b<a<c$

11. 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右顶点为 A，抛物线 $C:y^2=12ax$ 的焦点为 F．若在双曲线的渐近线上存在一点 P，使得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PF}=0$，则双曲线 E 的离心率的取值范围是

A. $(1,2)$　　　　B. $(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}]$　　　　C. $(2,+\infty)$　　　　D. $[\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty)$

12. 设函数 $f(x)=\frac{x+e^{|x|}}{e^{|x|}}$ 的最大值为 M，最小值为 N，下述四个结论：

①$M-N=\frac{2}{e}$　　②$M+N=4$　　③$MN=1-\frac{1}{e^2}$　　④$\frac{M}{N}=\frac{e+1}{e-1}$

其中所有正确结论的序号是

A. ①④　　　　B. ①②④　　　　C. ①③④　　　　D. ①②③

二、填空题：本大题共4小题，每小……

13. 已知二项式$(1-2x)^n$的展开式中，只有第5项的二项式系数最大，……数和为 729 6

14. 某工厂为了对新研发的一种新产品进行合理定价，将该产品按事先拟定的价格进行试销，得到如下数据：

单价(元)	8	8.2	8.4	8.6	8.8	9
销量(件)	90	84	83	80	75	68

由表中数据求得线性回归直线方程为$\hat{y}=-20x+\hat{a}$，当销售量为50件时，单价约为 10 元。

250 9.3

15. 已知数列$\{a_n\}$为正项的等比数列，$a_1=1$，$a_5=81$，记数列$\left\{\frac{2}{a_n}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，则使不等式$\left|\frac{1}{3}T_n-1\right|>\frac{1}{2021}$成立的正整数$n$的最大值为 6 。

$-\frac{1}{3^n}$

16. 已知圆O的半径为5，该圆内有一个以圆心O为中心的等边$\triangle ABC$（三顶点A,B,C在圆O内或圆O上），以AB,BC,CA为底边的三个等腰三角形的三个顶点D,E,F都在圆O上，以AB,BC,CA为折痕将这三个等腰三角形折起，使D,E,F三点重合于点S，得一个三棱锥$S-ABC$，当$\triangle ABC$的边长变化时，关于三棱锥$S-ABC$的描述正确有 ② （填序号）.

①当$\triangle ABC$的三个顶点A,B,C在圆O上时，三棱锥$S-ABC$是正三棱锥；

②当三棱锥$S-ABC$为正四面体时，其内切球半径r等于$\frac{5\sqrt{2}}{8}$；

③当$\triangle ABC$的边长为$2\sqrt{3}$时，三棱锥$S-ABC$的高等于$\sqrt{15}$（以ABC为底面）；

④当三棱锥$S-ABC$的体积取得最大值时，$\triangle ABC$的边长为$4\sqrt{3}$.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共60分

17.（本题满分12分）

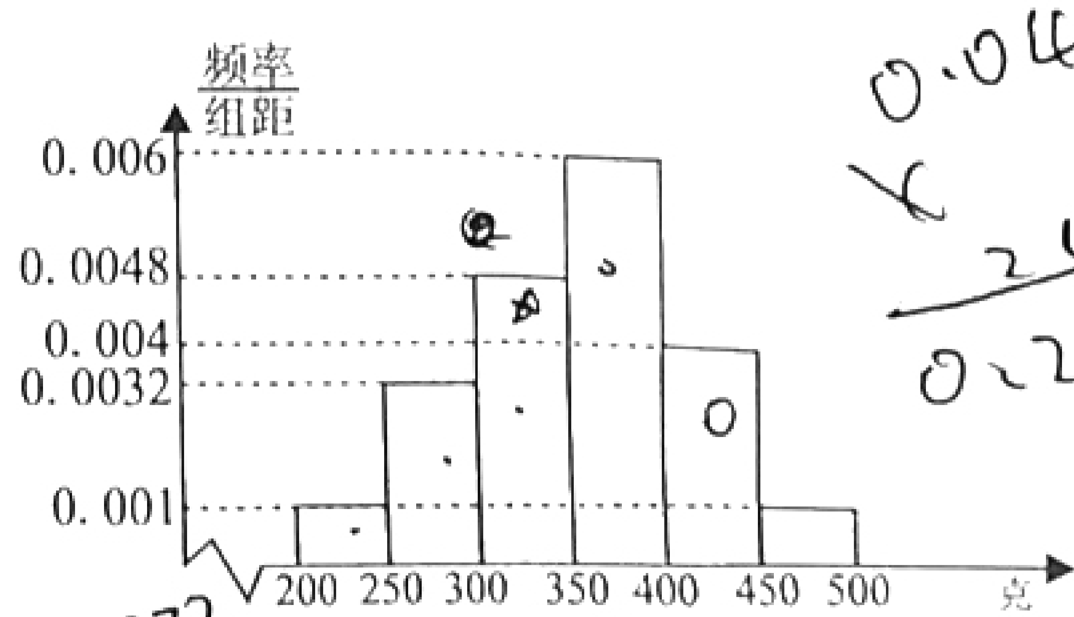
已知函数$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos 2x$，$x\in R$.

(1)求函数$f(x)$在$(0,\pi)$上的单调区间；

(2)在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$f(\frac{A}{2})=1$，$a=3$，求$\triangle ABC$的周长的取值范围.

18.（本题满分12分）

2020年，我国已经实现全面脱贫的历史性战略任务。但巩固脱贫成果还有很多工作要继续，利用互联网电商进行产品的销售就是一种有效的方式。某村盛产脐橙，为了更好销售，现从脐橙树上随机摘下100个脐橙进行测重，其质量分布在区间$[200,500]$（单位：克），统计质量的数据作出其频率分布直方图如图所示：



0.048 × 5 24 0.24

0.032 5 160 0.005 0.6 0.45 0.24

$\bar{x}=354.5$　$\begin{array}{r}55000\\ \times 3\\ \hline 165000\end{array}$

(1) 按分层抽样的方法从质量落在 $[350,400)$，$[400,450)$ 的脐橙中随机抽取 5 个，再从这 5 个脐橙中随机抽 2 个，求这 2 个脐橙质量落在 $[400,450)$ 的个数 X 的分布列和期望值；

(2) 以各组数据的中间数值代表这组数据的平均水平，以频率代表概率，已知该村的脐橙种植地上大约还有 100000 个脐橙待出售，某电商提出两种收购方案：

A. 所有脐橙均以 7 元/千克收购；

B. 低于 350 克的脐橙以 2 元/个收购，其余的以 3 元/个收购。

请你通过计算为该村选择收益较好的方案。

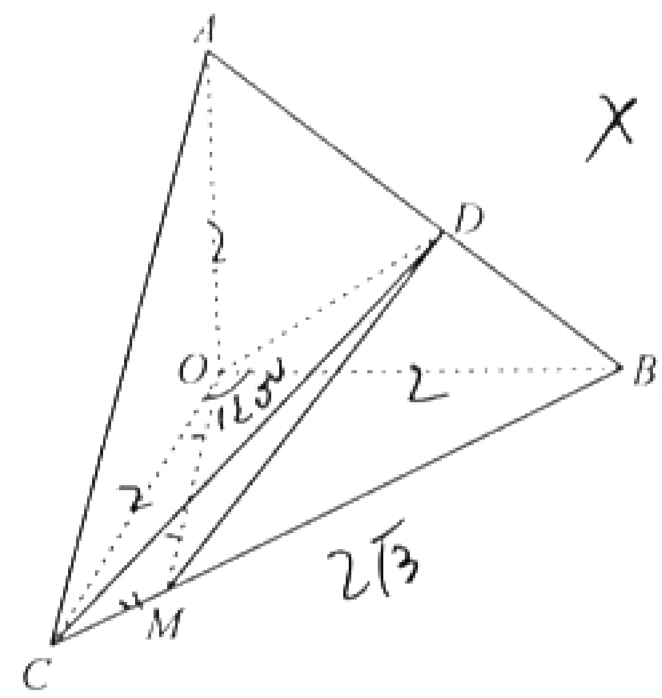
(参考数据：$(225\times0.05+275\times0.16+325\times0.24+375\times0.3+425\times0.2+475\times0.05=354.5)$

19. (本题满分 12 分)

如图，在 $Rt\triangle AOB$ 中，$AO=OB=2$，$\triangle AOC$ 通过 $\triangle AOB$ 以 OA 为轴顺时针旋转 $120°$ 得到($\angle BOC=120°$)。点 D 为斜边 AB 上一点，点 M 为线段 BC 上一点，且 $CM=OM$。

(1) 证明：$OM\perp$ 平面 AOB；

(2) 当直线 MD 与平面 AOB 所成的角取最大值时，求二面角 $B-OD-C$ 的正弦值。



20. (本题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，以上顶点和右焦点为直径端点的圆与直线 $x+y-2=0$ 相切。

$(0,b)$　$\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 是否存在斜率为 2 的直线，使得当直线与椭圆 C 有两个不同的交点 M、N 时，能在直线 $y=\frac{5}{3}$ 上找到一点 P，在椭圆 C 上找到一点 Q，满足 $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{NQ}$？若存在，求出直线方程；若不存在，说明理由。

$\cos 120°=\frac{4+4-BC^2}{8}$

21. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x\ln(x+a)$，$a\in R$。

(1) 若 $f(x)$ 不存在极值点，求实数 a 的取值范围；

(2) 若 $a\leqslant0$，证明 $f(x)<e^x+\sin x-1$。

$\frac{1}{x+a}x$　$\theta=120$　$BC=2\sqrt{3}$

(二) 选考题：共 10 分。

请考生在 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. (本题满分 10 分) 选修 4-4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的方程为 $x^2+(y-2)^2=3$。以坐标原点为极点、x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\in R)$，其中 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$。

(1) 求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

(2) 若曲线 C_1 与 C_2 只有一个公共点 A，直线 C_3：$x=2\sqrt{3}$，曲线 C_2 和 C_3 的交点为 B，求 $\frac{|AB|}{|OA|}$ 的值。

23. (本题满分 10 分) 选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x+a|+|x+3|$。

(1) 当 $a=-1$ 时，求不等式 $f(x)\geqslant x+9$ 的解集；

(2) 若 $f(x)\leqslant|x-4|$ 的解集中包含 $[0,1]$，求 a 的取值范围。

$8+12=20$

南充市高 2021 届第二次高考适应性考试

理科数学试题参考答案

一、选择题：

1.C　2.D　3.B　4.D　5.A　6.D　7.B　8.C　9.A　10.C　11.B　12.C

二、填空题：

13. 1；　14. 10；　15. 6；　16. ②③④

三、解答题

17.解:(1) $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$ --2 分

当 $x\in R$ 时，由 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le 2x-\dfrac{\pi}{6}\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$；得 $k\pi-\dfrac{\pi}{6}\le x\le k\pi+\dfrac{\pi}{3},k\in Z$.

因为 $x\in(0,\pi)$，所以函数 $f(x)$ 在（$0,\pi$）上的单调增区间是 $(0,\dfrac{\pi}{3}],[\dfrac{5\pi}{6},\pi)$ ----------------4 分

从而在（0，π）单调递减区间是 $[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}]$.--5 分

所以函数 $f(x)$ 在（$0,\pi$）上的单调增区间是 $(0,\dfrac{\pi}{3}],[\dfrac{5\pi}{6},\pi)$，单调递减区间是 $[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}]$-----6 分

（2）由（1）有 $f(\dfrac{A}{2})=2\sin(A-\dfrac{\pi}{6})=1$，得 $\sin(A-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$，因为 A 为锐角，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$---7 分

根据余弦定理得 $b^2+c^2-bc=9$, 则 $(b+c)^2-3bc=9$，又 $bc\le(\dfrac{b+c}{2})^2$

所以 $(b+c)^2-\dfrac{3(b+c)^2}{4}\le 9$，得 $b+c\le 6$，当且仅当 $b=c=3$ 时取等号--------------------10 分

又 $b+c>a=3$，所以 $a+b+c\in(6,9]$，即ΔABC 周长的取值范围是（6,9]-----------------12 分

18.解：（1）从直方图可知，脐橙质量在[350，400)，[400,450）内的个数之比为 3:2，所以按分层抽样的方法抽取的 5 个脐橙，在[350,400）内的有 3 个，在[400,450）内的有 2 个--------2 分

可知 X 的取值为 0,1,2：且 $p(X=0)=\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=\dfrac{3}{10}$; $p(X=1)=\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\dfrac{3}{5}$； $p(X=2)=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{1}{10}$.

------------------------------------4 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
p	0.3	0.6	0.1

数学期望 $E(X)=0\times 0.3+1\times 0.6+2\times 0.1=0.8$ --6 分

（2）方案 B 好.理由如下

由频率直方图可知，脐橙质量落在区间[200，250)，[250，300)，[300，350)，[350,400)，[400,450)，[450,500）的频率依次为 0.05,0.16,0.24,0.3,0.2,0.05.

且各段脐橙的个数依次为 5000,16000,24000,30000,20000,5000 个------------------------------7 分

若按方案 A 收购，总收益为：

$(225\times 5000+275\times 16000+325\times 24000+375\times 30000+425\times 20000+475\times 5000)\times 7\div 1000=248150$ 元

--9 分

若按方案 B 收购，总收益为：（5000+16000+24000）×2+55000×3=255000 元，------------11 分
因为方案 B 的收益比方案 A 收益高，故该村选择方案 B 出售.--------------------------------12 分

19.解：（1）证明：在△OBC 中，根据题意可知 OB=OC，∠OCB=30°，因为 CM=OM,

所以∠COM=∠OCB=30°,因为∠BOC=120°，所以 $OM\perp OB$------------------------------2 分

又根据题意 OA⊥OB，OA⊥OC，OB⋂OC=O，所以 OA⊥平面 OBC，而 OM⊂平面 OBC，
所以 OA⊥OM，--4 分
又 OA⋂OB=O，所以 OM⊥平面 AOB--5 分
（2）由（1）OM⊥平面 AOB，所以 OD 为 MD 在平面 OAB 内的射影，∠MDO 为直线 MD 与平面 AOB 所成的角--6 分
当且仅当 OD⊥AB 时，∠MDO 最大，此时 D 为 AB 的中点---------------------------------7 分
以 O 为坐标原点，OM,OB,OA 分别为 x, y, z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系.
得 O（0,0,0），B（0,2,0），C（$\sqrt{3}$，-1,0），A(0,0,2)，D(0，1，1).

$\overrightarrow{OC}=(\sqrt{3},-1,0),\overrightarrow{OD}=(0,1,1)$，设平面 OCD 的法向量为 $\overrightarrow{m}=(x_1,y_1,z_1)$，由 $\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{OD}=0,\end{cases}$

得 $\begin{cases}\sqrt{3}x_1-y_1=0,\\ y_1+z_1=0,\end{cases}$ 取 $x_1=1$，得 $\overrightarrow{m}=(1,\sqrt{3},-\sqrt{3})$ --9 分

易知平面 ODB 的一个法向量 $\overrightarrow{n}=(1,0,0)$ --10 分

所以 $\cos<\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}>=\dfrac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{7}\times 1}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ ---11 分

得 $\sin<\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}>=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，即二面角 B-0D-C 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$ ---------------------------12 分

20.解:(1)由椭圆的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得 $a=\sqrt{2}c$，从而 $b=c$ --1 分

椭圆的上顶点为（0，b），右焦点为（b,0）,所以，以上顶点和右焦点为直径的圆的方程为

$(x-\dfrac{b}{2})^2+(y-\dfrac{b}{2})^2=\dfrac{b^2}{2}$ ---2 分

由该圆与直线 $x+y-2=0$ 相切得：$\dfrac{|b-2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}b$，解得 $b=1$，从而 $c=1,a=\sqrt{2}$，---4 分

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$---5 分

（2）不存在.理由如下：

设直线方程为 $y=2x+t$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),P(x_3,\dfrac{5}{3}),Q(x_4,y_4)$，MN 的中点为 $D(x_0,y_0)$，

由 $\begin{cases}y=2x+t,\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 x 得 $9y^2-2ty+t^2-8=0$，$\Delta=4t^2-36(t^2-8)>0$ 可得 $t\in(-3,3)$.

且 $y_1+y_2=\dfrac{2t}{9}$，故 $y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{t}{9}$ --8 分

由 $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{NQ}$，得 $(x_1-x_3,y_1-\frac{5}{3})=(x_4-x_2,y_4-y_2)$，所以 $y_4=y_1+y_2-\frac{5}{3}=\frac{2t}{9}-\frac{5}{3}$ -----10 分

因为 $t\in(-3,3)$，所以 $-\frac{7}{3}<y_4<-1$，--11 分

但 $y_4\in[-1,1]$，所以不存在斜率为 2 的直线满足条件---12 分

21.解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-a,+\infty)$，且 $f'(x)=\ln(x+a)+\frac{x}{x+a}$

设 $g(x)=\ln(x+a)+\frac{x}{x+a}$，则 $g'(x)=\frac{x+2a}{(x+a)^2}$.--1 分

①当 $-2a\le -a$，即 $a\ge 0$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-a,+\infty)$ 上单调递增.

又 $g(1)=\ln(1+a)+\frac{1}{1+a}>0,g(e^{-2}-a)=-1-e^2a<0$，所以 $g(x)$ 在（$-a,+\infty$）上恰有唯一零点 x_0，

且当 $x\in(-a,x_0)$ 时，$f'(x)=g(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)=g(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.所以 x_0 是函数 $f(x)$ 的极小值点，不符合题意.-------------------------------------3 分

②当 $-2a>-a$，即 $a<0$ 时，由 $g'(x)=0$，得 $x=-2a$. $x\in(-a,-2a)$ 时，$g'(x)<0,g(x)$ 递减；

$x\in(-2a,+\infty)$ 时，$g'(x)>0,g(x)$ 递增.--4 分

当 $g(-2a)=\ln(-a)+2\ge 0$，即 $a\le -e^{-2}$ 时，$f'(x)=g(x)\ge g(-2a)\ge 0$ 恒成立，

即 $f(x)$ 在 $(-a,+\infty)$ 上单调递增，无极值点.符合题意.---------------------------------------5 分

当 $g(-2a)=\ln(-a)+2<0$，即 $-e^{-2}<a<0$ 时，因为 $g(1-a)=1-a>0$，所以在（$-2a,+\infty$）上恰有一个零点 x_1，且 $x\in(-2a,x_1),f'(x)<0;x\in(x_1,+\infty),f'(x)>0$，易知此时 x_1 是函数 $f(x)$ 的一个极小值点，不符合题意.---6 分

综上，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-e^{-2}]$--7 分

（2）因为 $a\le 0,x>-a$，所以 $x>0$，要证明 $f(x)<e^x+\sin x-1$，只需证明

$x\ln x<e^x+\sin x-1$---8 分

当 $0<x\le 1$ 时，因为 $x\ln x\le 0,e^x+\sin x-1>0$，所以 $x\ln x<e^x+\sin x-1$ 成立；-------9 分

当 $x>1$ 时，设 $h(x)=e^x+\sin x-x\ln x-1,x>1$，则 $h'(x)=e^x-\ln x+\cos x-1$，

记 $u(x)=h'(x)$，则 $u'(x)=e^x-\frac{1}{x}-\sin x$，因为 $x>1$，所以 $u'(x)>e-1-1>0$，

所以 $u(x)$ 在（1，$+\infty$）上单调递增.---10 分

$u(x)>u(1)=e+\cos 1-1>0$，即 $h'(x)>0$.

所以 $h(x)$ 在（1，$+\infty$）上单调递增，$h(x)>h(1)=e+\sin 1-1>0$，即 $x\ln x<e^x+\sin x-1$.

--11 分

综上，若 $a \le 0$, 则 $f(x) < e^x + \sin x - 1$ --12 分

22.解：（1）将 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$ 代入曲线 C_1 的直角坐标方程得曲线 C_1 的极坐标方程为：

$\rho^2 - 4\rho\sin\theta + 1 = 0$ --3 分

曲线 C_2 的极坐标方程是 $\theta = \alpha(\rho \in R), \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$，得曲线 C_2 的直角坐标方程是

$y = \tan\alpha \cdot x$ --5 分

（2）因为曲线 C_1 与 C_2 只有一个公共点 A，那么 $\rho^2 - 4\rho\sin\alpha + 1 = 0$ 的判别式 $16\sin^2\alpha - 4 = 0$，

可得 $\sin\alpha = \pm\frac{1}{2}$，因为 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$，所以 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 此时得 $\rho_A = 1$ ----------------------7 分

直线 C_3 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta = 2\sqrt{3}$，联立 C_2 与 C_3 的极坐标方程得 $\rho\cos\alpha = 2\sqrt{3}$，

所以 $\rho_B = 4$ --8 分

$|AB| = \rho_B - \rho_A = 3$，所以 $\frac{|AB|}{|OA|} = 3$ --10 分

23.解：（1）当 $a = -1$ 时，$f(x) = \begin{cases} -2x - 2, x \le -3, \\ 4, -3 < x < 1, \\ 2x + 2, x \ge 1, \end{cases}$ ----------------------------1 分

当 $x \le -3$, 由 $-2x - 2 \ge x + 9$，得 $x \le -\frac{11}{3}$ --2 分

当 $-3 < x < 1$，由 $4 \ge x + 9$，得不等式无解--3 分

当 $x \ge 1$，由 $2x + 2 \ge x + 9$，得 $x \ge 7$ --4 分

所以不等式 $f(x) \ge x + 9$ 的解集是 $(-\infty, -\frac{11}{3}] \cup [7, +\infty)$ ----------------------5 分

（2）$f(x) \le |x - 4|$ 等价于 $|x + a| \le |x - 4| - |x + 3| \le 7$

即 $-7 - a \le x \le 7 - a$ --7 分

根据题意得 $\begin{cases} -7 - a \le 0, \\ 7 - a \ge 1, \end{cases}$ --9 分

解得 $-7 \le a \le 6$, 所以 a 的取值范围是[-7，6]--10 分