

2022 北京东城高二（下）期末

数 学

一、选择题：共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x | x > 2\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

- A. $\emptyset$ B. $\{3\}$ C. $\{2, 3\}$ D. $(2, 3)$

2. $(x^2 + \frac{1}{x})^6$ 的展开式中常数项为()

- A. 30 B. 20 C. 15 D. 10

3. 已知函数 $f(x) = \ln(3x)$, 则 $f'(3) = (\quad)$

- A. 3 B. 1 C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{9}$

4. 若函数 $f(x) = \log_2(x+a)$ 的图象过点 $(-2, 0)$, 则 $a = (\quad)$

- A. 3 B. 1 C. -1 D. -3

5. 某校为全体高中学生开设了 15 门校本课程, 其中人文社科类 6 门, 科学技术类 6 门, 体育美育类 3 门. 学校要求每位高中学生需在高中三年内选学其中的 8 门课程. 从全校高中学生中随机抽取一名学生, 设该学生选择的人文社科类的校本课程为 X 门, 则下列概率中等于 $\frac{C_6^5 C_9^3}{C_{15}^8}$ 的是()

- A. $P(X \leq 3)$ B. $P(X = 3)$ C. $P(X \leq 5)$ D. $P(X = 5)$

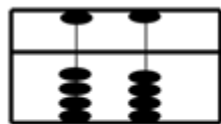
6. 设 $a < b < 0$, 给出下列四个结论: ① $a + b < ab$; ② $2a < 3b$; ③ $a^2 < b^2$; ④ $a|a| < b|b|$. 其中正确的结论的序号为()

- A. ①② B. ①④ C. ②③④ D. ①②③

7. 已知函数 $f(x) = x^3 - \sin x$, 若对于任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 满足 $x_1 + x_2 = 0$, 且 $x_1 \neq x_2$, 则一定有()

- A. $f(x_1) + f(x_2) = 0$ B. $f(x_1) - f(x_2) = 0$
C. $f(x_1) < f(x_2)$ D. $f(x_1) > f(x_2)$

8. 算盘是中国古代的一项重要发明, 迄今已有 2600 多年的历史. 现有一算盘, 取其两档(如图一), 自右向左分别表示十进制数的个位和十位, 中间一道横梁把算珠分为上下两部分, 梁上一珠拨下, 记作数字 5, 梁下四珠, 上拨一珠记作数字 1 (如图二算盘表示整数 51). 若拨动图 1 的两枚算珠, 则可以表示不同整数的个数为()



十位 个位

图一



十位 个位

图二

- A. 6 B. 8 C. 10 D. 15

9. “ $x < 0$ ”是“ $x + \frac{4}{x} \leq -4$ ”的()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

10. “字节”(Byte, B) 常用于表示存储容量或文件的大小. 随着网络存储信息量的增大, 我们还用千($K, kilo$)、兆($M, mega$)、吉($G, giga$)、太($T, tera$)、拍($P, peta$)等单位表示存储容量. 各单位数量级之间的换算关系如下:
 $1KB = 1024B$; $1MB = 1024KB$; $1GB = 1024MB$; $1TB = 1024GB$; $1PB = 1024TB = xB$. 已知 x 是一个 m 位整数, 则 $m = (\quad)$

(参考数据: $\lg 2 \approx 0.3010$)

A. 8 B. 9 C. 15 D. 16

二、填空题: 共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

11. (4 分) 函数 $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ 的定义域为 _____.

12. (4 分) 已知事件 A, B 相互独立, $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.4$, 则 $P(B|A) = \underline{\hspace{1cm}}$.

13. (4 分) 设函数 $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^3$, 当自变量 x 从 0 变到 1 时, 它们的平均变化率分别记为 m_1 , m_2 , m_3 , 则 m_1, m_2, m_3 之间的大小关系为 _____ (用“>”“<”“=”连接); 三个函数中在 $x=1$ 处的瞬时变化率最大的是 _____.

14. (4 分) 将若干红球与黄球放进一个不透明的袋子中, 这些球的大小与重量完全相同. 已知袋子中红球与黄球个数之比为 6:4, 其中 $\frac{1}{3}$ 的红球印有商标, $\frac{3}{4}$ 的黄球印有商标. 现从袋子中随机抽取一个小球, 则小球印有商标的概率为 _____.

15. (4 分) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 给出下列三个条件:

① $\forall x \in D$, 有 $f(x) + f(-x) = 0$;

② $\forall x \in D$, 有 $f'(x) \leq 0$;

③ $\exists x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$.

试写出一个同时满足条件①②③的函数 $f(x)$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{1cm}}$.

16. (4 分) 合理使用密码是提升网络空间安全的重要手段. 密码安全性强弱与其长度、使用字符种类数及排列规律等相关, 其中字符可以是数字、字母及一些特殊符号等. 某密码的安全性评分主要分为以下四个方面:

长度	小于等于 4 个字符	5 至 7 个字符	大于等于 8 个字符
	得 5 分	得 10 分	得 30 分
字母	不含字母	含字母, 全用小写或全用大写	含字母, 既含小写又含大写
	得 0 分	得 10 分	得 25 分
特殊符号	不含符号	含 1 个符号	含大于 1 个符号
	得 0 分	得 10 分	得 25 分
数字	不含数字	含 1 至 2 个数字	含大于等于 3 个数字
	得 0 分	得 10 分	得 20 分

设密码安全性评分为 x , 若 $x \geq 80$ 为安全性较强; $60 \leq x < 80$ 为安全性中等; $x < 60$ 为安全性较弱.

现有一个长度大于 8 个字符的密码, 其安全性评分为 85 分, 给出如下判断:

- ①该密码既含有小写字母又含有大写字母；
 ②该密码至少含有 3 个数字；
 ③该密码含多于 1 个特殊符号；
 ④该密码一定同时含有字母，特殊符号和数字.

其中所有正确判断的序号是 ____.

三、解答题：共 5 小题，共 46 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17. (9 分) 已知函数 $f(x) = e^x - 3x + 1$.

- (1) 求曲线 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程；
 (2) 求 $f(x)$ 的最小值.

18. (9 分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \geq 0 \\ -x^2 - 2x + 1, & x < 0 \end{cases}$.

- (1) 求 $f(f(-1))$ 的值；
 (2) 求不等式 $f(x) > 1$ 的解集；
 (3) 当 $x_0 < 0$ 时，是否存在使得 $f(x_0) - f(-x_0) = 0$ 成立的 x_0 值？若存在，直接写出 x_0 的值；若不存在，说明理由.

19. (9 分) 毛猴是老北京的传统手工艺品，制作材料都取自中药材，工序大致分为三步，第一步用蝉蜕做头和四肢；第二步用辛夷做身子；第三步用木通做道具. 已知小萌同学在每个环节制作合格的概率分别为 $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ ，只有当每个环节制作都合格时，这件作品才算制作成功，

- (1) 求小萌同学制作一件作品成功的概率；
 (2) 若小萌同学制作了 3 件作品，假设每次制作成功与否相互独立. 设其中成功的作品数为 X . 求 X 的分布列及期望.



20. (9 分) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- (1) 求 $f(x)$ 的极大值；
 (2) 若 $f(x)$ 图象上的点都在直线 $y = kx - 1$ 的下方，求 k 的取值范围.

21. (10 分) 设 A 是非空实数集，且 $0 \notin A$. 若对于任意的 $x, y \in A$ ，都有 $xy \in A$ ，则称集合 A 具有性质 P_1 ；若对于任意的 $x, y \in A$ ，都有 $\frac{x}{y} \in A$ ，则称集合 A 具有性质 P_2 .

- (1) 写出一个恰含有两个元素且具有性质 P_1 的集合 A ；
 (2) 若非空实数集 A 具有性质 P_2 ，求证：集合 A 具有性质 P_1 ；

(3) 设全集 $U = \{x | x \neq 0, x \in \mathbb{R}\}$, 是否存在具有性质 P_1 的非空实数集 A , 使得集合 $\complement_U A$ 具有性质 P_2 ? 若存在, 写出这样的一个集合 A ; 若不存在, 说明理由.

参考答案

一、选择题：共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【分析】根据集合的交集运算，可直接求得答案.

【解答】解：由于集合 $A = \{1, 2, 3\}$ ， $B = \{x | x > 2\}$ ，

故 $A \cap B = \{3\}$ ，

故选：B.

【点评】本题考查集合的运算，考查交集定义、不等式性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

2. 【分析】求出展开式的通项公式，令 x 的指数为 0，由此即可求解.

【解答】解：展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_6^r (x^2)^{6-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = C_6^r x^{12-3r}$ ， $r = 0, 1, \dots, 6$ ，

令 $12 - 3r = 0$ ，解得 $r = 4$ ，

所以 $(x^2 + \frac{1}{x})^6$ 的展开式中常数项为 $C_6^4 = 15$ ，

故选：C.

【点评】本题考查了二项式定理的应用，考查了学生的运算能力，属于基础题.

3. 【分析】利用对数函数的求导公式和复合函数的求导法则求得导函数，再代入 x 的值求导数值，即可得答案.

【解答】解：由题意， $f(x) = \ln(3x)$ ，

则 $f'(x) = 3 \times \frac{1}{3x} = \frac{1}{x}$ ，

故 $f'(3) = \frac{1}{3}$

故选：C.

【点评】本题考查复合函数的导数计算，注意导数的计算公式，属于基础题.

4. 【分析】因为函数图象过一点，代入该点的坐标解方程即得解.

【解答】解：由已知得 $f(-2) = \log_2(-2 + a) = 0$ ，所以 $-2 + a = 1$ ，

解得 $a = 3$ ，

故选：A.

【点评】本题主要考查了对数函数的图象和性质，属于基础题.

5. 【分析】利用超几何分布的概率公式求解.

【解答】解：某校开设了 15 门校本课程，要求每位高中学生需在高中三年内选学其中的 8 门课程，则有 C_{15}^8 种选法，

因为人文社科类 6 门，该学生选择的人文社科类的校本课程为 5 门，则有 C_6^5 种选法，

然后从其他 9 门课程中选 3 门有 C_9^3 选法，

所以该学生选择的人文社科类的校本课程为 5 门的概率为 $\frac{C_6^5 C_9^3}{C_{15}^8}$ ，

故选：D.

【点评】本题考查超几何分布的概率公式，属于基础题。

6. 【分析】根据数的性质以及不等式性质可判断①③；举反例可判断②，根据不等式性质可判断④。

【解答】解：∵ $a < b < 0$ ，∴ $a + b < 0$ ， $ab > 0$ ，∴ $a + b < ab$ ，故①正确；

不妨取 $a = -3$ ， $b = -2$ ，满足 $a < b < 0$ ，但 $2a = 3b$ ，故②错误；

由 $a < b < 0$ ，可得 $|a| > |b|$ ，∴ $a^2 > b^2$ ，故③错误；

由 $a < b < 0$ ，可知 $-a > -b > 0$ ，而 $|a| > |b| > 0$ ，

故 $-a|a| > -b|b| > 0$ ，即 $a|a| < b|b|$ ，故④正确，

故选：B。

【点评】本题主要考查不等式的基本性质，考查逻辑推理能力，属于基础题。

7. 【分析】由题可得函数为奇函数可判断A，利用特值可判断BCD。

【解答】解：∵ $f(x) = x^3 - \sin x$ ，

∴ $f(-x) = -x^3 + \sin x = -f(x)$ ，函数为奇函数，

又 $x_1 + x_2 = 0$ ， $x_1 \neq x_2$ ，

∴ $f(x_2) = -f(x_1)$ ，即 $f(x_1) + f(x_2) = 0$ ，故A正确；

当 $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ ， $x_2 = \frac{\pi}{6}$ 时，

$$f(x_1) = \left(-\frac{\pi}{6}\right)^3 - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{\pi}{6}\right)^3，$$

$$f(x_2) = \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 - \sin\frac{\pi}{6} = \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 - \frac{1}{2}，$$

此时 $f(x_1) - f(x_2) \neq 0$ ， $f(x_1) > f(x_2)$ ，

当 $x_1 = \frac{\pi}{6}$ ， $x_2 = -\frac{\pi}{6}$ 时， $f(x_1) < f(x_2)$ ，

故BCD不合题意。

故选：A。

【点评】本题考查了函数的单调性，奇偶性问题，考查特殊值法的应用，是基础题。

8. 【分析】根据分类加法和分步乘法计数原理即可求得。

【解答】解：拨动两枚算珠可分为以下三类：

(1) 在个位上拨动两枚，可表示2个不同整数。

(2) 同理在十位上拨动两枚，可表示2个不同整数。

(3) 在个位、十位上分别拨动一枚，由分步乘法计数原理易得，可表示 $2 \times 2 = 4$ 个不同整数。

所以，根据分类加法计数原理，一共可表示 $2 + 2 + 4 = 8$ 个不同整数。

故选：B。

【点评】本题以算盘为载体，考查简单的归纳推理、算盘的算法等基础知识，考查运算求解能力，是基础题。

9. 【分析】先判断当 $x < 0$ 时，一定有 $x + \frac{4}{x} \leq -4$ 成立，再利用反证的思想说明当 $x + \frac{4}{x} \leq -4$ 时，一定有 $x < 0$ 成立，即可判断出答案。

【解答】解：当 $x < 0$ 时， $-x > 0$ ，故 $(-x) + \frac{4}{(-x)} \geq 2\sqrt{(-x) \cdot \frac{4}{(-x)}} \geq 4$ ，

当且仅当 $x = -2$ 时取等号，故 $x + \frac{4}{x} \leq -4$ ，

当 $x + \frac{4}{x} \leq -4$ 时，一定有 $x < 0$ 成立，否则 $x > 0$ ，则 $x + \frac{4}{x} \geq 4$ 成立，与 $x + \frac{4}{x} \leq -4$ 矛盾，

故“ $x < 0$ ”是“ $x + \frac{4}{x} \leq -4$ ”的充要条件，

故选：C.

【点评】本题主要考查了充要条件的判断，属于基础题.

10. 【分析】计算 $1PB = 2^{50}B$ ，利用对数转化为 10 进制，即可得出结论.

【解答】解：因为 $1PB = 2^{10}TB = 2^{20}GB = 2^{30}MB = 2^{40}KB = 2^{50}B$ ，

且 $\lg 2^{50} = 50 \times \lg 2 \approx 15$ ，

所以 $2^{50} \approx 10^{15}$ ，

又因为 x 是一个 m 位整数，所以 $m = 16$ 。

故选：D.

【点评】本题考查了进位制的应用问题，也考查了运算求解能力，是中档题.

二、填空题：共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.

11. 【分析】根据函数解析式列出不等式组，求得答案.

【解答】解：由 $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ 可知： $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ ，故 $x \geq 1$ ，

即函数 $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ 的定义域为 $[1, +\infty)$ ，

故答案为： $[1, +\infty)$ 。

【点评】本题考查了求函数的定义域问题，考查二次根式的性质，是基础题.

12. 【分析】求出 A ， B 同时发生的概率，再根据条件概率的计算公式进行计算即可.

【解答】解：由题意可得，事件 A ， B 相互独立，

则 $P(AB) = P(A)P(B) = 0.7 \times 0.4 = 0.28$ ，

故 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.28}{0.7} = 0.4$ ，

故答案为：0.4.

【点评】本题主要考查条件概率公式，属于基础题.

13. 【分析】(1) 根据平均变化率的定义求解即可.

(2) 求导判断在 $x=1$ 处的导函数的值的大小即可.

【解答】解： $\because m_1 = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1$ ， $m_2 = \frac{g(1)-g(0)}{1-0} = 1$ ， $m_3 = \frac{h(1)-h(0)}{1-0} = 1$ ，故 $m_1 = m_2 = m_3$ 。

$\because f'(x) = 1$ ， $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ， $h'(x) = 3x^2$ ，

故 $f'(1) = 1$, $g'(1) = \frac{1}{2}$, $h'(x) = 3$,

故三个函数中在 $x=1$ 处的瞬时变化率最大的是 $h(x)$,

故答案为: $m_1 = m_2 = m_3$; $h(x)$.

【点评】本题主要考查了平均变化率的计算, 导数的计算公式, 属于基础题.

14. 【分析】小球印有商标有两个来源, 其一是红球印有商标, 其二是黄球印有商标, 分别计算其概率, 再根据全概率公式计算印有商标的概率.

【解答】解: 设抽取一个小球为红球为事件 A_1 , 红球印有商标为事件 B_1 ,

抽取一个小球为黄球为事件 A_2 , 黄球印有商标为事件 B_2 ,

小球印有商标为事件 A , 则 $P(A_1) = \frac{3}{5}$, $P(A_2) = \frac{2}{5}$, $P(B_1|A_1) = \frac{1}{3}$, $P(B_2|A_2) = \frac{3}{4}$,

则 $P(A) = P(A_1) \cdot P(B_1|A_1) + P(A_2) \cdot P(B_2|A_2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点评】本题考查全概率公式理解与应用, 属于中档题.

15. 【分析】根据条件分析函数的奇偶性、单调性判断即可.

【解答】解: 根据①可知, 函数 $f(x)$ 在定义域内是奇函数.

根据②可知 $f'(x) \leq 0$ 恒成立.

根据③可知 $f(x)$ 在整个区间上不是单调递减.

故可找到一个满足条件的函数: $f(x) = \frac{1}{x}$

故答案为: $\frac{1}{x}$ (答案不唯一).

【点评】本题主要考查函数的单调性, 属于基础题.

16. 【分析】根据密码的评分为 85 分写出密码的可能组成方式, 逐项判断可得结果.

【解答】解: 根据题意, 因为该密码为一个长度大于 8 个字符, 且该密码的得分为 85 分, 有 2 种情况:

(1) 该密码含字母, 全用小写或全用大写, 且含大于 1 个符号, 含大于等于 3 个数字,

(2) 该密码含字母, 既含小写又含大写, 且含 1 个符号, 含大于等于 3 个数字,

则①错, ②对, ③错, ④对.

故答案为: ②④.

【点评】本题考查合情推理的应用, 注意密码安全性评分的规则, 属于基础题.

三、解答题: 共 5 小题, 共 46 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

17. 【分析】(1) 利用导数的几何意义求解即可;

(2) 对函数求导后, 令 $f'(x) = 0$, 求出函数的极值点, 再求出函数的单调区间, 从而可求出函数的最小值.

【解答】解: (1) 由 $f(x) = e^x - 3x + 1$, 得 $f'(x) = e^x - 3$,

$\therefore f'(0) = e^0 - 3 = -2$ ，又 $f(0) = e^0 + 1 = 2$ ，

$\therefore$ 切线方程为 $y - 2 = -2x$ ，即 $2x + y - 2 = 0$ ；

(2) 函数的定义域为 R ，由 (1) 可知 $f'(x) = e^x - 3$ ，

令 $f'(x) = 0$ ，得 $e^x - 3 = 0$ ， $\therefore x = \ln 3$ ，

当 $x < \ln 3$ 时， $f'(x) < 0$ ，当 $x > \ln 3$ 时， $f'(x) > 0$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, \ln 3)$ 上单调递减，在 $(\ln 3, +\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x = \ln 3$ 时， $f(x)$ 取得最小值，为 $f(\ln 3) = e^{\ln 3} - 3\ln 3 + 1 = 3 - 3\ln 3 + 1 = 4 - 3\ln 3$ 。

【点评】本题考查利用导数研究过曲线上某点处的切线方程，训练了利用导数求极值，考查运算求解能力，是中档题。

18. 【分析】(1) 根据分段函数的解析式，先求 $f(-1)$ 得值，进而求得 $f(f(-1))$ 的值；

(2) 根据 x 的取值范围，分段解不等式，可得答案；

(3) 根据函数解析式，可直接写出满足条件的值。

【解答】解：(1) 因为函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \geq 0 \\ -x^2 - 2x + 1, & x < 0 \end{cases}$ ，所以 $f(-1) = -1 + 2 + 1 = 2$ ，

所以 $f(f(-1)) = f(2) = 2^2 = 4$ ；

(2) 当 $x \geq 0$ 时，令 $2^x > 1$ ，解不等式得 $x > 0$ ；

当 $x < 0$ 时，令 $-x^2 - 2x + 1 > 1$ ，解不等式得 $-2 < x < 0$ ；

所以不等式 $f(x) > 1$ 的解集为 $\{x | x > 0 \text{ 或 } -2 < x < 0\}$ ；

(3) 当 $x_0 = -1$ 时，满足 $x_0 < 0$ 时，使得 $f(x_0) - f(-x_0) = 0$ 成立，

即当 $x_0 < 0$ 时，存在使得 $f(x_0) - f(-x_0) = 0$ 成立的 x_0 值。

【点评】本题考查了分段函数的应用问题，也考查了分类讨论思想，是中档题。

19. 【分析】(1) 利用相互独立事件的概率乘法公式计算即可得出；(2) 先确定 $X \sim B(3, \frac{2}{5})$ ，写出 X 的可能值，再求出对应的概率即可作答。

【解答】解：(1) 根据题意知，由相互独立事件的概率乘法公式得小萌同学制作一作品成功的概率为：

$$P = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}.$$

(2) 根据题意知， X 的可能值为：0，1，2，3，显然 $X \sim B(3, \frac{2}{5})$ ，

$$\text{则 } P(X=0) = C_3^0 \left(\frac{2}{5}\right)^0 \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}, \quad P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{125}, \quad P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{36}{125},$$

$$P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^0 = \frac{8}{125},$$

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
-----	---	---	---	---

P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$
-----	------------------	------------------	------------------	-----------------

所以 X 的数学期望: $E(X) = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$.

【点评】本题考查离散型随机变量的期望与方差, 属于基础题.

20. 【分析】(1) 求出函数的导数, 判断其正负, 判断函数的单调性, 确定极值点, 从而求得极值;

(2) 结合 (1) 作出函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的大致图象, 利用导数的几何意义求出直线 $y = kx - 1$ 和 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 图象相切时的斜率值, 再根据 $f(x)$ 图象上的点都在直线 $y = kx - 1$ 的下方, 即可确定 k 的取值范围.

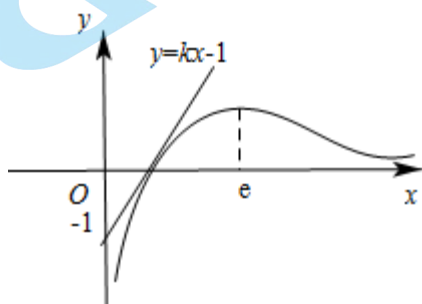
【解答】解: (1) 由题意得, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, (x > 0)$,

当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增, 当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减,

故 $x = e$ 是函数的极大值点, 函数的极大值为 $f(e) = \frac{1}{e}$;

(2) 由 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 可知, 当 x 趋近于 0 时, $f(x) < 0$,

当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$, 结合 (1), 作出函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的大致图象如图:



直线 $y = kx - 1$ 过定点 $(0, -1)$, 先求直线 $y = kx - 1$ 和 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 图象相切时的斜率值;

设切点为 (x_0, y_0) , 则 $k = \frac{y_0 + 1}{x_0} = f'(x_0)$, $\therefore \frac{y_0 + 1}{x_0} = \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2}$, 而 $y_0 = \frac{\ln x_0}{x_0}$,

故 $\frac{\ln x_0 + x_0}{x_0^2} = \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2}$, 则 $2\ln x_0 + x_0 = 1$,

由于函数 $y = 2\ln x + x - 1, (x > 0)$ 是单调增函数, 且 $x = 1$ 时, $y = 0$,

故由 $2\ln x_0 + x_0 = 1$ 可得 $x_0 = 1$, 则 $y_0 = \frac{\ln 1}{1} = 0$, 此时 $k = f'(1) = 1$,

即直线 $y = kx - 1$ 和曲线 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 相切时, 切点为 $(1, 0)$,

若 $f(x)$ 图象上的点都在直线 $y = kx - 1$ 的下方, 则 $k > 1$,

故 k 的取值范围是 $(1, +\infty)$.

【点评】本题考查利用导数研究函数的极值, 考查学生的运算能力, 属于中档题.

21. 【分析】(1) 根据题意直接写出即可.

(2) 根据性质 P_2 可知 $1 \in A$, 分别说明集合 A 中元素为 1 个、2 个、大于 2 个时, 集合中元素满足性质 P_1 即可.

(3) 由题意可知 $1 \in C_U A$, 且 $C_U A$ 不是单元素集 $\{1\}$, 令 $a \in A$, $b \in C_U A$, $c \in C_U A$, 且 $c \neq 1$, 则可分别说明当 $a \in C_U A$ 与当 $ac \in A$ 时矛盾.

【解答】解: (1) 由题意可得恰含有两个元素且具有性质 P_1 的集合 $A = \{-1, 1\}$,

(2) 若集合 A 具有性质 P_2 , 不妨设 $a \in A$,

由非空数集 A 具有性质 P_2 , 有 $\frac{a}{a} = 1 \in A$.

① 若 $A = \{1\}$, 易知此时集合 A 具有性质 P_1 .

② 若实数集 A 只含有两个元素, 不妨设 $A = \{1, a_1\}$,

由 $\frac{1}{a_1} = a_1$, 且 $a_1 \neq 1$, 解得 $a_1 = -1$, 此时集合 A 具有性质 P_1 .

③ 若实数集 A 含有两个以上的元素, 不妨设不为 1 的元素 $a_1, a_2 \in A$,

则有 $\frac{1}{a_1} \in A$, 由于集合 A 具有性质 P_2 ,

所以有 $a_2 \div \frac{1}{a_1} = a_1 a_2 \in A$, 这说明集合 A 具有性质 P_1 ;

(3) 不存在具有性质 P_1 的非空实数集 A , 使得集合 $C_U A$ 具有性质 P_2 ,

由于非空实数集 A 具有性质 P_1 , 令集合 $B = C_U A$,

依题意不妨设 $b \in B$, $a \in A$,

因为集合 B 具有性质 P_2 , 所以 $\frac{b}{b} = 1 \in B$,

若 $B = \{1\}$, 则 $\frac{1}{a} \notin A$, 否则 $1 \in A$, 这与 $B = \{1\}$ 矛盾,

故集合 B 不是单元素集 $\{1\}$,

令 $c \in B$, 且 $c \neq 1$,

① 若 $ac \in B$, 可得 $\frac{ac}{c} \in B$, 即 $a \in B$, 这与 $B = C_U A$ 矛盾;

② 若 $ac \in A$, 由于 $a \in A$, 所以 $\frac{1}{a} \in B$, 因此 $c \div \frac{1}{a} = ac \in B$, 这与 $ac \in A$ 矛盾,

综上可得: 不存在具有性质 P_1 的非空实数集 A , 使得集合 $C_U A$ 具有性质 P_2 .

【点评】本题考查了集合的基本性质, 属于中档题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜



京考一点通