2023北京一六六中高二（上）期中

数　学

（考试时长：120分钟）

考查目标

知识：统计、概率、空间向量与立体几何、直线和圆的方程

能力：空间想象能力，抽象概括能力，推理论证能力，运算求解能力，数据处理能力，分析问题和解决问题的能力

一、选择题（本大题共10小题，每小题4分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 直线$x+y-\sqrt{3}=0$的倾斜角为（　）

A. 45°　　B. 135°　　C. 60°　　D. 120°

2. 在三棱柱$ABC-A_1B_1C$中，M，N分别为A_1C_1，B_1B的中点，若$\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AA_1}$则$\left(x,y,z\right)=$（　）

A. $\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

3. 设$A(2,-1)$，$B(4,1)$，则以线段AB为直径的圆的方程是（　）

A. $(x-3)^2+y^2=2$　　B. $(x-3)^2+y^2=8$

C. $(x+3)^2+y^2=2$　　D. $(x+3)^2+y^2=8$

4. 《西游记》《三国演义》《水浒传》和《红楼梦》是中国古典文学瑰宝，并称为中国古典小说四大名著.某中学为了解本校学生阅读四大名著的情况，随机调查了100学生，其中阅读过《西游记》或《红楼梦》的学生共有90位，阅读过《红楼梦》的学生共有80位，阅读过《西游记》且阅读过《红楼梦》的学生共有60位，则该校阅读过《西游记》的学生人数与该校学生总数比值的估计值为

A. 0.5　　B. 0.6　　C. 0.7　　D. 0.8

5. 设$\lambda\in\mathrm{R}$，则“$\lambda=1$”是“直线$3x+\left(\lambda-1\right)y=1$与直线$\lambda x+\left(1-\lambda\right)y=2$平行”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

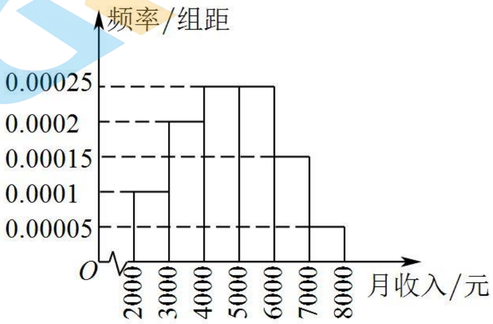
6. 投篮测试中，每人投3次，至少投中2次才能通过测试.已知某同学每次投篮投中的概率为0.6，且各次投篮是否投中相互独立，则该同学通过测试的概率为

A. 0.648　　B. 0.432　　C. 0.36　　D. 0.312

7. 埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥，以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积，则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为（　）

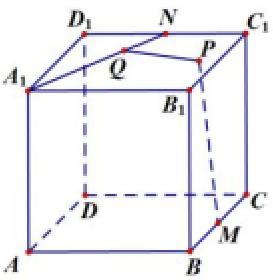
A. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

8. 为征求个人所得税法修改建议，某机构调查了10000名当地职工的月收入情况，并根据所得数据画出了样本的频率分布直方图，下面三个结论：①估计样本的中位数为4800元；②如果个税起征点调整至5000元，估计有50%的当地职工会被征税；③根据此次调查，为使60%以上的职工不用缴纳个人所得税，起征点应调整至5200元·其中正确结论的个数有（　）



A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，点 M，N 分别是棱 BC，C_1D_1 的中点，点 P 在底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内，点 Q 在线段 A_1N 上，若 $PM=\sqrt{5}$，则 PQ 长度的最小值为



A. $\sqrt{2}-1$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}-1$　　D. $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

10. 已知点 M 在圆 C_1: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上，点N在圆 C_2: $(x+1)^2+(y+1)^2=1$ 上，则下列说法错误的是

A. $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 的取值范围为 $[-3-2\sqrt{2},0]$

B. $\left|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right|$ 取值范围为$[0,2\sqrt{2}]$

C. $\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|$ 的取值范围为$[2\sqrt{2}-2,2\sqrt{2}+2]$

D. 若$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{ON}$，则实数$\lambda$的取值范围为$[-3-2\sqrt{2},-3+2\sqrt{2}]$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分）

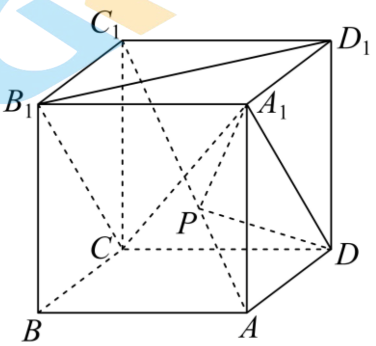
11. 能说明“直线$x-y+m=0$与圆$x^2+y^2+4x-2y=0$有两个不同的交点”是真命题的一个m的值为______.

12. 我国高铁发展迅速，技术先进．经统计，在经停某站的高铁列车中，有 10 个车次的正点率为 0.97，有 20 个车次的正点率为 0.98，有 10 个车次的正点率为 0.99，则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为___________.

13. 已知直线l过点$A(0,0,0)$，点$B(1,1,0)$，则点$C(0,1,1)$到直线l的距离是_________.

14. 已知直线 l 过点（1，1），过点 P（-1，3）作直线 m⊥l，垂足为 M，则点 M 到点 Q（2，4）距离的取值范围为______.

15. 在棱长为 1 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P是对角线AC_1的动点（点P与A,C_1不重合），则下列结论正确的有___________.



①存在点P，使得平面A_1DP // 平面B_1CD_1；

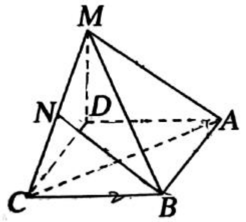
②存在点P，使得$AC_1\perp$平面A_1DP；

③S_1,S_2分别是$\triangle A_1DP$在平面$A_1B_1C_1D_1$，平面BB_1C_1C上的正投影图形的面积，对任意的点P都有$S_1\neq S_2$；

④对任意的点P，$\triangle A_1DP$的面积都不等于$\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

三、解答题（本大题共 6 小题，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16. 如图所示，在四棱锥$M-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为 2 的正方形，侧棱AM的长为 3，且AM和AB,AD的夹角都是$60°$，N是CM的中点，设$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AD},\vec{c}=\overrightarrow{AM}$



（1）用$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为基向量表示出向量$\overrightarrow{BN}$；

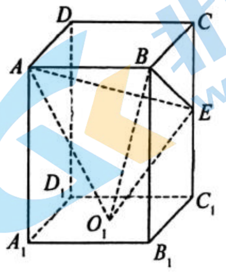
（2）求 BN 的长.

17. 已知$\triangle ABC$的顶点$B(5,1)$，AB 边上的高所在的直线l_1的方程为$x-2y-1=0$，角 A 的平分线所在直线l_2的方程为$2x-y-1=0$.

（1）求直线 AB 的方程；

（2）求点 A 的坐标；求直线 AC 的方程.

18. 正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=4, AA_1=8, E$为CC_1中点，O_1为下底面正方形的中心．求：

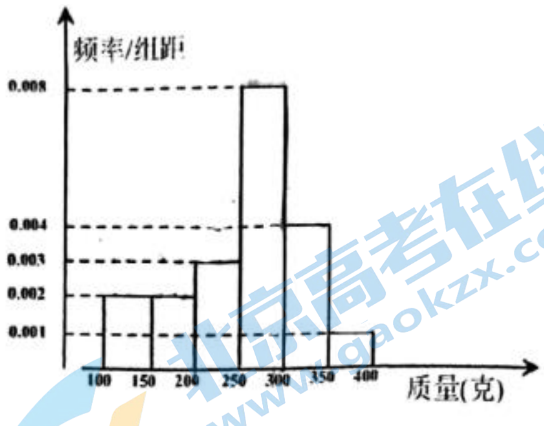


（1）异面直线 AB 与EO_1所成角的余弦值；

（2）直线AO_1与平面 ABE 成角；

（3）点O_1到平面 ABE 的距离.

19. 为了解果园某种水果产量情况，随机抽取 100 个水果测量质量，样本数据分组为$[100,150),[150,200),[200,250),[250,300),[300,350),[350,400]$（单位：克），其频率分布直方图如图所示：



（1）用分层抽样的方法从样本里质量为$[250,300)$，$[300,350)$的水果中抽取 6 个，求质量在$[250,300)$的水果数量；

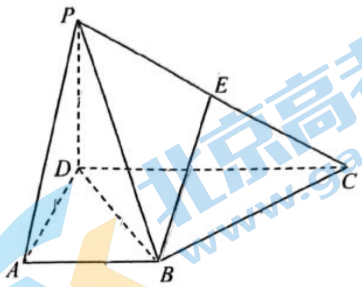
（2）从（1）中得到的 6 个水果中随机抽取 2 个，求至少有 1 个水果质量在$[300,350)$的概率；

（3）果园现有该种水果约 20000 个，其等级规格及销售价格如下表所示，

质量m（单位：克）	$m<200$	$200\le m<300$	$m\ge 300$
等级规格	二等	一等	特等
价格（元/个）	4	7	10

试估计果园该种水果的销售收入.

20. 在四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$底面$ABCD,E$为PC中点，底面$ABCD$是直角梯形，$AB//CD,\angle ADC=90°,AB=AD=PD=1,CD=2$.



（1）求证：$BE//$平面PAD；

（2）求证：$BC\perp$平面PBD；

（3）在线段PC上是否存在一点Q，使得二面角$Q-BD-P$为$45°$？若存在，求$\dfrac{|PQ|}{|PC|}$的值；若不存在，请述明理由.

21. 设n为正整数，集合$A=\{\alpha|\alpha=(t_1,t_2,\cdots,t_n),t_k\in\{0,1\},k=1,2,\cdots,n\}$. 对于集合 A 中的任意元素$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，记

$$M(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[(x_1+y_1-|x_1-y_1|)+(x_2+y_2-|x_2-y_2|)+\cdots+(x_n+y_n-|x_n-y_n|)].$$

（1）当$n=3$时，若$\alpha=(1,1,0)$，$\beta=(0,1,1)$，求$M(\alpha,\alpha)$和$M(\alpha,\beta)$的值；

（2）当$n=4$时，设B是 A 的子集，且满足：对于B中的任意两个不同的元素α,β，$M(\alpha,\beta)=0$. 写出一个集合B，使其元素个数最多，并说明理由.

参考答案

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1.【答案】B

【分析】根据直线方程，可得斜率 k，根据 $k=\tan\alpha$，即可求得答案.

【详解】由直线 $x+y-\sqrt{3}=0$，可得 $y=-x+\sqrt{3}$

所以直线的斜率为 k=-1，设其倾斜角为 α，（$0°\le\alpha<180°$），

则 $\tan\alpha$=-1，解得 α=135°.

故选：B.

2.【答案】A

【分析】利用空间向量的运算法则得到 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$，得到答案.

【详解】$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

$=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AA_1}$，故 $x=1,y=-\frac{1}{2},z=-\frac{1}{2}$.

$(x,y,z)=\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，

故选：A

3.【答案】A

【分析】根据中点公式计算出圆心坐标，根据两点间的距离公式计算出圆的半径，从而可得圆的标准方程.

【详解】AB 的中点坐标为 $(3,0)$，圆的半径为 $r=\frac{|AB|}{2}=\frac{\sqrt{(2-4)^2+(-1-1)^2}}{2}=\sqrt{2}$，

所以圆的方程为 $(x-3)^2+y^2=2$.

故选：A.

【点睛】本题考查了圆的标准方程，意在考查学生的计算能力.属于基础题.

4.【答案】C

【分析】

根据题先求出阅读过西游记的人数，进而得解.

【详解】由题意得，阅读过《西游记》的学生人数为 90-80+60=70，则其与该校学生人数之比为 70÷100=0.7．故选 C.

【点睛】本题考查容斥原理，渗透了数据处理和数学运算素养．采取去重法，利用转化与化归思想解题.

5.【答案】A

【分析】根据直线一般式中平行满足的关系即可求解.

【详解】若直线$3x+(\lambda-1)y=1$与直线$\lambda x+(1-\lambda)y=2$平行，

则$3(1-\lambda)-\lambda(\lambda-1)=0$，解得$\lambda=1$或$\lambda=-3$，

经检验$\lambda=1$或$\lambda=-3$时两直线平行.

故“$\lambda=1$”能得到“直线$3x+(\lambda-1)y=1$与直线$\lambda x+(1-\lambda)y=2$平行”，但是“直线$3x+(\lambda-1)y=1$与直线$\lambda x+(1-\lambda)y=2$平行”不能得到“$\lambda=1$”

故选：A

6.【答案】A

【详解】试题分析：该同学通过测试的概率为$C_3^2\bullet 0.6^2\bullet 0.4+C_3^3\bullet 0.6^3=0.648$，故选 A.

考点：n次独立重复试验.

7.【答案】C

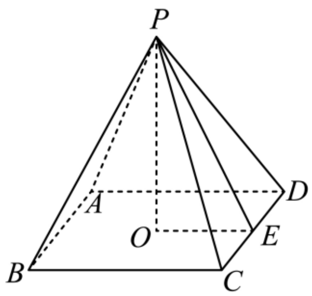
【分析】设$CD=a,PE=b$，利用$PO^2=\frac{1}{2}CD\cdot PE$得到关于$a,b$的方程，解方程即可得到答案.

【详解】如图，设$CD=a,PE=b$，则$PO=\sqrt{PE^2-OE^2}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$，

由题意$PO^2=\frac{1}{2}ab$，即$b^2-\frac{a^2}{4}=\frac{1}{2}ab$，化简得$4(\frac{b}{a})^2-2\cdot\frac{b}{a}-1=0$，

解得$\frac{b}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$（负值舍去）.

故选：C.



【点睛】本题主要考查正四棱锥的概念及其有关计算，考查学生的数学计算能力，是一道容易题.

8.【答案】C

【分析】由图可得各个区间内的频率，然后可逐一判断.

【详解】由图可得，月收入在区间$[2000,3000)$内的频率为0.1，月收入在区间$[3000,4000)$内的频率为0.2，

月收入在区间$[4000,5000)$内的频率为0.25，月收入在区间$[5000,6000)$内的频率为0.25，

月收入在区间$[6000,7000)$内的频率为0.15，月收入在区间$[7000,8000]$内的频率为0.05，

所以中位数为$4000+1000\times\dfrac{0.2}{0.25}=4800$，故①正确；

如果个税起征点调整至5000元，估计有$0.25+0.15+0.05=45\%$的当地职工会被征税，故②错误；

根据此次调查，为使60%以上的职工不用缴纳个人所得税，起征点应调整至$5000+1000\times\dfrac{0.05}{0.25}=5200$元，故③正确；

所以正确结论的个数为2，

故选：C

9.【答案】C

【详解】解：如图，取B_1C_1中点O，则$MO\perp$面$A_1B_1C_1D_1$，即$MO\perp OP$，

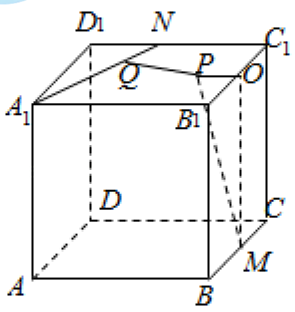
$\because PM=\sqrt{5}$，则$OP=1$，$\therefore$点P在以O为圆心，1以半径的位于平面$A_1B_1C_1D_1$内的半圆上．

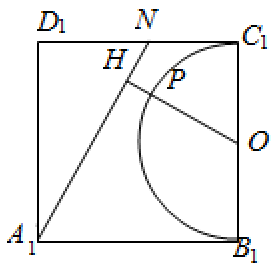
可得O到A_1N的距离减去半径即为PQ长度的最小值，

作$OH\perp A_1N$于H，

$\triangle A_1ON$的面积为$2\times2-\dfrac{1}{2}\times2\times1-\dfrac{1}{2}\times1\times1=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore\dfrac{1}{2}A_1N\times OH=\dfrac{3}{2}$，可得$OH=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，$\therefore PQ$长度的最小值为$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}-1$．





故答案为;C．

点睛：这个题目考查了立体中面面垂直的性质的应用，线面垂直的应用，以及数形结合的应用，较好的考查了学生的空间想像力．一般处理立体的小题，都会将空间中的位置关系转化为平面关系，或者建系来处理．

10.【答案】B

【详解】∵M在圆C_1上，点N在圆C_2上，

∴∠MON≥90°，

$\therefore\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}\leqslant0$，

又OM≤$\sqrt{2}$+1，ON≤$\sqrt{2}$+1，

∴当OM=$\sqrt{2}$+1，ON=$\sqrt{2}$+1时，

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$取得最小值（$\sqrt{2}$+1）$^2\cos\pi=-3-2\sqrt{2}$，故A正确；

设M（1+cosα，1+sinα），

N（﹣1+cosβ，﹣1+sinβ），

则$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$=（cosα+cosβ，sinα+sinβ），

∴$|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}|^2$=2cosαcosβ+2sinαsinβ+2=2cos（α﹣β）+2，

∴0≤$|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}|$≤2，故B错误；

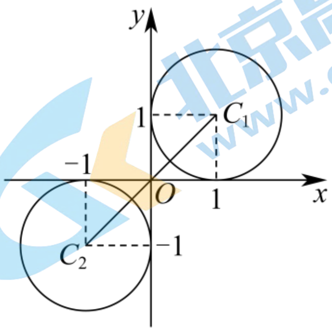
∵两圆外离，半径均为1，$|C_1C_2|=2\sqrt{2}$，

∴$2\sqrt{2}-2$≤|MN|≤$2\sqrt{2}+2$，即$2\sqrt{2}-2$≤$\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|$≤$2\sqrt{2}+2$，故C正确；

∵$\sqrt{2}-1$≤|OM|≤$\sqrt{2}+1$，$\sqrt{2}-1$≤|ON|≤$\sqrt{2}+1$，

∴当$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{ON}$时，$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$≤﹣λ≤$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$，解得$-3-2\sqrt{2}$≤λ≤$-3+2\sqrt{2}$，故D正确．

故选B．



二、填空题（本大题共5小题，每小题5分）

11.【答案】0

【分析】

根据直线与圆相交，利用圆心到直线的距离小于圆的半径，得到$\frac{|-3+m|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<\sqrt{5}$，求得$m$的取值范围，即可求解.

【详解】由题意，圆$x^2+y^2+4x-2y=0$的圆心坐标为$(-2,1)$，半径为$r=\sqrt{5}$，

若直线$x-y+m=0$与圆$x^2+y^2+4x-2y=0$有两个不同的交点，

则满足圆心到直线的距离小于圆的半径，即$\frac{|-3+m|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<\sqrt{5}$，解得$3-\sqrt{10}<m<3+\sqrt{10}$，

所以命题为真命题的一个m的值为0.

故答案为：0.

【点睛】本题主要考查了直线与圆的位置关系的应用，其中解答中熟记直线与圆的位置关系，列出不等式求得m的取值范围是解答的关键，着重考查了推理与计算能力，属于基础题.

12.【答案】0．98.

【分析】本题考查通过统计数据进行概率的估计，采取估算法，利用概率思想解题.

【详解】由题意得，经停该高铁站的列车正点数约为$10\times0.97+20\times0.98+10\times0.99=39.2$，其中高铁个

数为 10+20+10=40，所以该站所有高铁平均正点率约为 $\dfrac{39.2}{40}=0.98$.

【点睛】本题考点为概率统计，渗透了数据处理和数学运算素养．侧重统计数据的概率估算，难度不大．易忽视概率的估算值不是精确值而失误，根据分类抽样的统计数据，估算出正点列车数量与列车总数的比值．

13.【答案】$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

【分析】求出直线 l 的方向向量 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{AC}$，进而求出 $\cos\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\rangle$，再根据点 $C(0,1,1)$ 到直线 l 的距离为 $\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\rangle$ 即可得解.

【详解】解：直线 l 的方向向量 $\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$，

$\overrightarrow{AC}=(0,1,1)$，

则 $\cos\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

又 $\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\sin\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\rangle=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

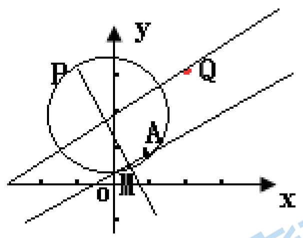
所以点 $C(0,1,1)$ 到直线 l 的距离为 $\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\rangle=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

14.【答案】$[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$

【分析】先根据垂直关系得到点 M 的轨迹为一个圆，然后用$|CQ|$减去圆的半径得$|MQ|$的最小值，加上半径得$|MQ|$的最大值.

【详解】



直线 l 过定点设为 A，则有 A（1，1），设 M（x，y），

因为直线 $m\perp l$，则 $\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{MA}$，所以，$\overrightarrow{MP}\bullet\overrightarrow{MA}=0$，

即 $(-1-x,3-y)(1-x,1-y)=0$，化简为：$x^2+(y-2)^2=2$，

所以，点 M 的轨迹为以 C（0，2）为圆心 $\sqrt{2}$ 为半径的圆，

$\because|CQ|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore |CQ|-\sqrt{2} \le |MQ| \leqslant |CQ|+\sqrt{2}$，即 $\sqrt{2} \le |MQ| \leqslant 3\sqrt{2}$.

故答案为 $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$.

【点睛】一般和圆有关的题很多情况下是利用数形结合来解决的，联立的时候较少；在求圆上的点到直线或者定点的距离时，一般是转化为圆心到直线或者圆心到定点的距离，再加减半径，分别得到最大值和最小值；涉及到圆的弦长或者切线长时，经常用到垂径定理.

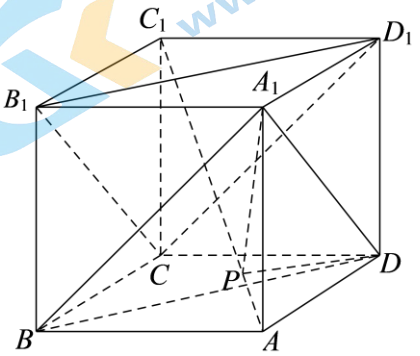
15.【答案】①②④

【分析】当 P 为直线 AC_1 与平面 A_1BD 的交点时，根据面面平行的判定定理即可判断①正确；当 P 为直线 AC_1 与平面 A_1BD 的交点时，根据线面垂直的判定定理即可判断②；计算出 $S_1=S_2$ 的条件即可判断③；求出△ A_1DP 的面积的最小值即可判断④.

【详解】对于①，如图，因为 $B_1D_1//BD$，$B_1C//A_1D$，$B_1D_1 \cap B_1C=B_1$，$BD \cap A_1D=D$，

所以平面 $A_1BD//$ 平面 B_1CD_1，

当直线 AC_1 交平面 A_1BD 于点 P 时，有平面 $A_1DP//$ 平面 B_1CD_1，故①正确；



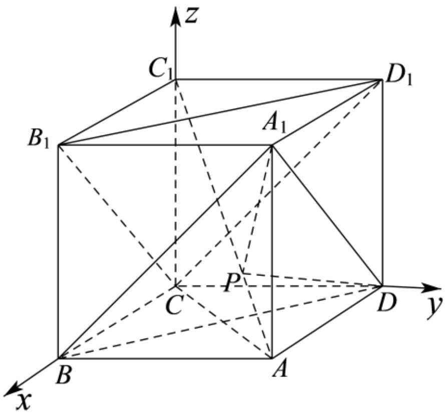
对于②，如图，设正方体的棱长为 2，则 $A(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$A_1(2,2,2)$，$C_1(0,0,2)$，$B(2,0,0)$，

则 $\overrightarrow{AC_1}=(-2,-2,2),\overrightarrow{A_1D}=(-2,0,-2),\overrightarrow{BD}=(-2,2,0)$，

有 $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0$，$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，所以 $\overrightarrow{AC_1}\perp\overrightarrow{A_1D}$，$\overrightarrow{AC_1}\perp\overrightarrow{BD}$，

又 $BD \cap A_1D=D$，BD、$A_1D \subset$ 平面 A_1BD，所以 $AC_1 \perp$ 平面 A_1BD，

当直线 AC_1 交平面 A_1BD 于点 P 时，有 $AC_1 \perp$ 平面 A_1DP，故②正确；



对于③，因为设 $AP = xAC_1$（其中 $0 < x < 1$），

则△ A_1DP 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的正投影面积为 $S_1 = \frac{1}{2}A_1D_1 \times xA_1B_1 = \frac{x}{2}$，

又△ A_1DP 在平面 BB_1C_1C 上的正投影图形的面积与在平面 AA_1D_1D 的正投影图形面积相等，

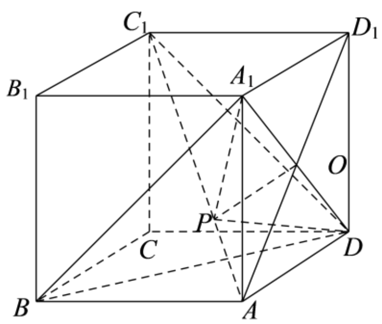
所以 $S_2 = \frac{1}{2}A_1D \cdot \left|x - \frac{1}{2}\right| \cdot AD_1 = \left|x - \frac{1}{2}\right|$，

若 $S_1 = S_2$，则 $\frac{x}{2} = \left|x - \frac{1}{2}\right|$，解得 $x = 1$ 或 $x = \frac{1}{3}$，

因为 $0 < x < 1$，所以 $x = \frac{1}{3}$，故存在点 P，使得 $S_1 = S_2$；故③错误；

对于④，由于 A_1D 固定不变，只要找 AC_1 上的点到 A_1D 的距离最短即可，

取 A_1D 中点 O，连接 OP、OA，



由②的分析可证得 $AC_1 \perp$ 平面 A_1BD，由 $OP \subset$ 平面 A_1BD 得 $AC_1 \perp OP$；

又 $A_1D \perp$ 平面 AC_1D_1，$OP \subset$ 平面 AC_1D_1，所以 $A_1D \perp OP$，

所以 OP 为直线 AC_1 与 A_1D 的公垂线，此时△ A_1DP 的面积最小；

因为在正方体中，易知 $AP = \frac{1}{3}AC_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$，

又 $AO = \frac{1}{2}AD_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $OP = \sqrt{AO^2 - AP^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$，

因此，$S_{\triangle A_1DP}=\frac{1}{2}A_1D\times OP=\frac{\sqrt{3}}{6}>\frac{\sqrt{2}}{6}$；

所以对任意点 P，$\triangle A_1DP$ 的面积都不等于 $\frac{\sqrt{2}}{6}$,故④正确.

故答案为：①②④

三、解答题（本大题共 6 小题，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16.【答案】（1）$\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

（2）$\frac{\sqrt{17}}{2}$

【分析】（1）根据空间向量的线性运算可得解；

（2）利用空间向量的数量积及运算律可得解.

【小问 1 详解】

$\because N$ 是 CM 的中点，

$\therefore \overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

【小问 2 详解】

在正四棱锥 $M-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$AM=3$，且 AM 与 AB，AD 的夹角都是 60°，

则 $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=2$，$\left|\vec{c}\right|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=3$，

$\therefore\left|\overrightarrow{BN}\right|=\sqrt{\overrightarrow{BN}^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}\vec{a}^2+\frac{1}{4}\vec{b}^2+\frac{1}{4}\vec{c}^2-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\cdot\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}}$

$=\sqrt{1+1+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

所以 BN 的长为 $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

17.【答案】（1）$2x+y-11=0$；

（2）$A(3,5)$；$2x-11y+49=0$.

【分析】（1）利用直线垂直的条件求出直线 AB 的斜率，然后根据点斜式可得直线 AB 的方程；

（2）利用直线 AB 及 l_2 的方程可得交点的坐标；由题可得点 $B(5,1)$ 关于直线 l_2 的对称点为 (a,b)，进而即得.

【小问 1 详解】

因为 AB 边上的高所在的直线 l_1 的方程为 $x-2y-1=0$，

所以直线 AB 上的高的斜率 $k=\frac{1}{2}$，直线 AB 的斜率为 $k_{AB}=-2$，又 $B(5,1)$，

所以直线 AB 的方程为 $y-1=-2(x-5)$，即 $2x+y-11=0$；

【小问 2 详解】

因为角 A 的平分线所在直线 l_2 的方程为 $2x-y-1=0$，

由 $\begin{cases}2x+y-11=0\\2x-y-1=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}$，

即 $A(3,5)$；

设点 $B(5,1)$ 关于直线 l_2：$2x-y-1=0$ 的对称点为 (a,b)，

则 $\begin{cases}\frac{b-1}{a-5}\times 2=-1\\2\times\frac{a+5}{2}-\frac{b+1}{2}-1=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-\frac{7}{5}\\b=\frac{21}{5}\end{cases}$，

所以 $\left(-\frac{7}{5},\frac{21}{5}\right)$ 在直线 AC 上，又 $A(3,5)$，

所以直线 AC 的方程为 $y-5=\frac{\frac{21}{5}-5}{-\frac{7}{5}-3}(x-3)$，整理得 $2x-11y+49=0$.

18.【答案】（1）$\frac{\sqrt{6}}{6}$

（2）$\frac{\pi}{6}$

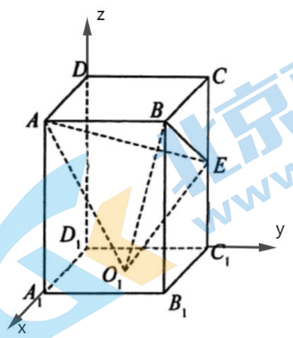
（3）$3\sqrt{2}$

【分析】（1）建立空间直角坐标系，用向量法求异面直线所成角即可；

（2）用向量法求线面角即可；

（3）用向量法求点面距即可.

【小问 1 详解】



在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以点 D_1 为坐标原点，D_1A_1，D_1C_1，D_1D 分别为 x，y，z 轴建立如图空间直角坐标系，

因为 $AB=4$，$AA_1=8$，E 为 CC_1 中点，O_1 为下底面正方形的中心，

所以 $A(4,0,8)$，$B(4,4,8)$，$E(0,4,4)$，$O_1(2,2,0)$，$\overrightarrow{AB}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{EO_1}=(2,-2,-4)$，

$$\therefore \cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EO_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EO_1}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{EO_1}|}=\frac{-8}{4\times\sqrt{4+4+16}}=-\frac{\sqrt{6}}{6},$$

所以异面直线 AB 与 EO_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

【小问 2 详解】

由（1），$\overrightarrow{BE}=(-4,0,-4)$，$\overrightarrow{AB}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{AO_1}=(-2,2,-8)$，

设平面 ABE 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}，即\begin{cases}4y=0\\ -4x-4z=0\end{cases}，$$ 令 $x=1$，则 $y=0$，$z=-1$，

$\therefore \vec{n}=(1,0,-1)$，设直线 AO_1 与平面 ABE 所成角为 α，则

$$\sin\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{AO_1},\vec{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AO_1}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AO_1}||\vec{n}|}=\frac{|-2+8|}{6\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}，又 \alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]，$$

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{6}$，

所以直线 AO_1 与平面 ABE 所成角为 $\frac{\pi}{6}$.

【小问 3 详解】

由（2）可得，$\overrightarrow{AO_1}=(-2,2,-8)$，平面 ABE 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,0,-1)$，

所以点 O_1 到平面 ABE 的距离为 $d=\frac{|\overrightarrow{AO_1}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|-2+8|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$.

19.【答案】（1）4 个

（2）$\frac{3}{5}$

（3）143000

【分析】（1）根据分层抽样的知识求得正确答案.

（2）利用列举法，结合古典概型概率计算公式求得正确答案.

（3）先求得各等级的频率，再计算出销售收入.

【小问 1 详解】

$[250,300)$的频率为$0.008\times50=0.4$；$[300,350)$的频率为$0.004\times50=0.2$；

所以质量在$[250,300)$的水果数量为$6\times\dfrac{0.4}{0.4+0.2}=4$.

【小问 2 详解】

质量在$[250,300)$的水果数量为4，记为$1,2,3,4$，

在$[300,350)$的水果数量为2，记为$5,6$，

从中任取两个，基本事件为：$12,13,14,15,16,23,24,25,26,34,35,36,45,46,56$，共$15$个，

至少有 1 个水果质量在$[300,350)$为$15,16,25,26,35,36,45,46,56$，共$9$个，

故至少有 1 个水果质量在$[300,350)$的概率为$\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$.

【小问 3 详解】

二等品的频率为$0.002\times50\times2=0.2$，

一等品的频率为$0.003\times50+0.008\times50=0.55$，

特等品的频率为$0.004\times50+0.001\times50=0.25$，

所以预计销售收入为$20000\times0.2\times4+20000\times0.55\times7+20000\times0.25\times10=143000$元.

20. 【答案】（1）证明见解析

（2）证明见解析　（3）存在，且$\dfrac{|PQ|}{|PC|}=\sqrt{2}-1$

【分析】（1）要证线面平行，就要证线线平行，由线面平行的性质定理知，这条平行线是过直线BE的平面ABE到平面PAD的交线，由于E是中点，$DC=2AB$，因此辅助线作法易知，只要取PD中点F，AF就是要找的平行线；

（2）建立空间直角坐标系，通过证明$BC\perp DB$以及$PD\perp BC$结合判定定理即可得结果；

（3）设$\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PC}$，$\lambda\in(0,1)$，所以$Q(0,2\lambda,1-\lambda)$，求出两平面$QBD$，$PBD$的法向量，由法向量的夹角与二面角相等或互补可得.

【小问 1 详解】

取PD的中点F，连结EF,AF，因为E为PC中点，所以$EF//CD$，

且$EF=\dfrac{1}{2}CD=1$，在梯形$ABCD$中，$AB//CD$，$AB=1$，

所以$EF//AB$，$EF=AB$，四边形$ABEF$为平行四边形，

所以$BE//AF$，

因为$BE\not\subset$平面PAD，$AF\subset$平面PAD，

所以$BE//$平面PAD.

【小问 2 详解】

如图，以 D 为原点建立空间直角坐标系 $D-xyz$.

则 $A(1,0,0),B(1,1,0),C(0,2,0),P(0,0,1)$.

$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$， $\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DB}=0$， $BC\perp DB$，

又由 $PD\perp$ 平面 $ABCD$， $BC\subset$ 平面 $ABCD$，可得 $PD\perp BC$，

因为 $PD\subset$ 面 PBD， $BD\subset$ 面 PBD， $PD\cap BD=D$，

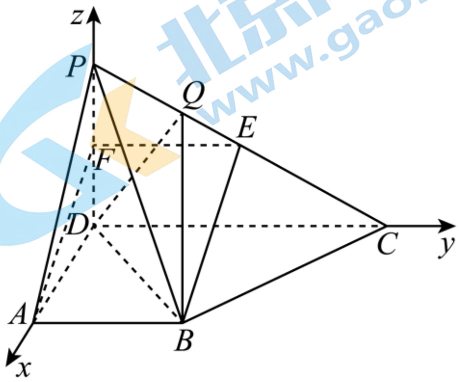
所以 $BC\perp$ 平面 PBD .

【小问 3 详解】

平面 PBD 的法向量为 $\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$，

$\overrightarrow{PC}=(0,2,-1)$，设 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PC}$， $\lambda\in(0,1)$

所以 $Q(0,2\lambda,1-\lambda)$，



设平面 QBD 的法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$，

$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$， $\overrightarrow{DQ}=(0,2\lambda,1-\lambda)$，

由 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0$， $\vec{n}\cdot\overrightarrow{DQ}=0$，得

$$\begin{cases}a+b=0\\2\lambda b+(1-\lambda)c=0\end{cases},$$

令 $b=1$，所以 $\vec{n}=(-1,1,\dfrac{2\lambda}{\lambda-1})$，

所以 $\cos 45^\circ=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2+(\dfrac{2\lambda}{\lambda-1})^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

注意到 $\lambda\in(0,1)$，解得 $\lambda=\sqrt{2}-1$.

所以在线段 PC 上存在一点 Q，使得二面角 $Q-BD-P$ 为 45°，

此时 $\dfrac{|PQ|}{|PC|}=\sqrt{2}-1$

21.【答案】（1） $M(\alpha,\alpha)=2$， $M(\alpha,\beta)=1$

（2）B=$\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$；理由见解析

【分析】（1）根据所给定义计算可得；

（2）根据所给定义及集合的运算性质计算可得；

【小问 1 详解】

解：因为 $\alpha=(1,1,0)$， $\beta=(0,1,1)$，所以

$$M(\alpha,\alpha)=\frac{1}{2}[(1+1-|1-1|)+(1+1-|1-1|)+(0+0-|0-0|)]=2,$$

$$M(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[(1+0-|1-0|)+(1+1-|1-1|)+(0+1-|0-1|)]=1.$$

【小问 2 详解】

解：设 $S_1=\{(x_1,y_1,z_1,w_1)|(x_1,y_1,z_1,w_1)\in A,x_1=1\}$；

$S_2=\{(x_1,y_1,z_1,w_1)|(x_1,y_1,z_1,w_1)\in A,x_1=0,x_2=1\}$；

$S_3=\{(x_1,y_1,z_1,w_1)|(x_1,y_1,z_1,w_1)\in A,x_1=0,x_2=0,x_3=1\}$；

$S_4=\{(x_1,y_1,z_1,w_1)|(x_1,y_1,z_1,w_1)\in A,x_1=0,x_2=0,x_3=0,x_4=1\}$；

$S_5=\{(x_1,y_1,z_1,w_1)|(x_1,y_1,z_1,w_1)\in A,x_1=0,x_2=0,x_3=0,x_4=0\}$.

则 $A=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5$

对于 $S_k\,(k=1,2,3)$ 中的不同元素 α,β，经验证，$M(\alpha,\beta)\geq 1$

所以 $S_k\,(k=1,2,3,4,5)$ 中至多 1 个元素属于 B，

所以集合 B 中至多 5 个元素.

取 $e_1=(1,0,0,0),e_2=(0,1,0,0),e_3=(0,0,1,0),e_4=(0,0,0,1),e_5=(0,0,0,0)$

满足条件．此时集合 B=$\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$

所以集合 B 中至多有 5 个元素.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！