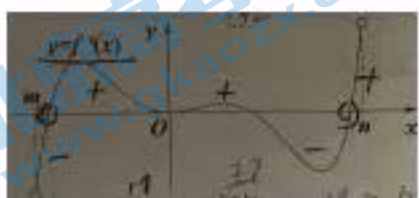


学校_____ 班级_____ 姓名_____ 成绩_____

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

- 已知复数 $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = -2 + 3i$, 则 $z_1 + z_2$ 在复平面内对应的点在 ()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- 已知 $a < b < 0$, 则下列不等式成立的是 ()
A. $a^2 < b^2$ B. $a^2 < ab$ C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $\frac{b}{a} < 1$
- 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公比为 q , 若 $a_1 + a_3 = 5$, $q = 2$, 则 S_4 等于 ()
A. 7 B. 13 C. 15 D. 31
- 已知关于 x 的不等式 $ax^2 - x + c < 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 2\}$, 则 $a + c$ 等于 ()
A. -1 B. 1 C. -3 D. 3
- 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 (m, n) , 导函数 $f'(x)$ 在 (m, n) 上的小强数学图象如图所示, 则 $f(x)$ 在 (m, n) 内的极小值点的个数为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 90$, 则 $a_2 + a_8$ 等于 ()
A. 18 B. 30 C. 36 D. 45
- 用边长为 18cm 的正方形铁皮做一个无盖的铁盒, 在铁皮的四角各截去一个面积相等的小正方形, 然后把四边折起, 就能焊成铁盒, 当铁盒的容积最大时, 截去的小正方形的边长为 ()
A. 1cm B. 2cm C. 3cm D. 4cm
- 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_n = -2a_{n-1} + 3 (n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbb{N}^*)$, 则下列说法错误的是 ()
A. $a_4 = -7$ B. $a_4 - 1$ 是 $a_2 - 1$ 与 $a_6 - 1$ 的等比中项
C. 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是等比数列 D. 在 $\{a_n\}$ 中, 只有有限个大于 0 的项

9.中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题：有一个人走了 378 里路，第一天健步行走，从第二天起，由于脚痛，每天走的路程是前一天的一半，走了 6 天后到达目的地，则此人第二天走的路程为（ ）

- A.96 里 B. 189 里 C.192 里 D.288 里

10.已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数， $f(-1)=0$ ，当 $x<0$ 时， $xf'(x)+f(x)<0$ ，则小强数学使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是（ ）

- A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.

11. 复数 $i(1-i)$ 的实部为_____.

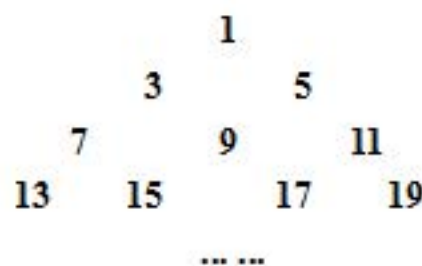
12. 已知 $x>0$ ，则 $x+\frac{4}{x}$ 的最小值为_____.

13. 已知函数 $f(x)=x^3+ax$ 在 R 上单调递增，则实数 a 的取值范围是_____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2$ ，则 a_4 =_____.

15. 已知函数 $f(x)=xe^x-m$ ，则 $f(x)$ 的单调递减区间是_____；若 $f(x)$ 有两个不同的零点，则实数 m 的取值范围是_____.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=2n-1$ ，把 $\{a_n\}$ 中的各项按照一定的顺序排列成如图所示的三角形矩阵.



①数阵中第 5 行所有项的和为_____；

②2019 是数阵中第 i 行的第 j 列，则 $i+j$ =_____.

三、解答题：本大题共 4 小题，共 36 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (本小题 8 分) 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x + 6$.

(I) 求 $f(x)$ 的极值；

(II) 求 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值与最小值，并写出相应的 x 的值。

18. (本小题 9 分) 已知关于 x 的不等式 $(x-a)(x-2a) > 0$ 的解集为 M .

(I) 当 $a=1$ 时，求 M ；

(II) 当 $a \in \mathbb{R}$ 时，求 M .

19. (本小题 9 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_3 + a_5 = 8$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 设 $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{a_n} + a_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

20. (本小题 10 分) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程;

(II) 若小强数学不等式 $f(x) < g(x)$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(III) 若直线 $y = -a$ 与曲线 $y = f(x) - g(x)$ 相切, 求 a 的值.

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z_1 = 3 - 4i$ ， $z_2 = -2 + 3i$ ，则 $z_1 + z_2$ 在复平面内对应的点在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

解析： $z_1 + z_2 = 1 - i$ ，对应点 $(1, -1)$ ，选 D.

2. 已知 $a < b < 0$ ，则下列不等式成立的是 ()

- A. $a^2 < b^2$ B. $a^2 < ab$ C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $\frac{b}{a} < 1$

解析：令 $a = -2$ ， $b = -1$ ，排除 A、B、C，选 D.

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，公比为 q ，若 $a_1 + a_3 = 5$ ， $q = 2$ ，则 S_4 等于 ()

- A. 7 B. 13 C. 15 D. 31

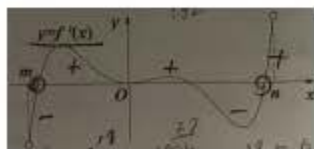
解析： $a_1(1 + q^2) = 5$ ，即 $a_1 = 1$ ，则 $S_4 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$ ，选 C.

4. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 - x + c < 0$ 的小强数学解集为 $\{x | -1 < x < 2\}$ ，则 $a + c$ 等于 ()

- A. -1 B. 1 C. -3 D. 3

解析： -1、2 为方程 $ax^2 - x + c = 0$ 的根，将 -1 代入， $a + 1 + c = 0$ ，即 $a + c = -1$ ，选 A.

5. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 (m, n) ，导函数 $f'(x)$ 在 (m, n) 上的图象如图所示，则 $f(x)$ 在 (m, n) 内的极小值点的个数为 ()



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

解析：极小值点导数左负右正，选 B.

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 90$ ，则 $a_2 + a_8$ 等于 ()

- A. 18 B. 30 C. 36 D. 45

解析：由题 $5a_5 = 90$ ， $a_5 = 18$ ， $a_2 + a_8 = 2a_5 = 36$ ，选 C.

7. 用边长为 18cm 的正方形铁皮做一个无盖的铁盒, 在铁皮的四角各截去一个面积相等的小正方形, 然后把四边折起, 就能焊成铁盒, 当铁盒的容积最大时, 截去的小正方形的边长为 ()

A. 1cm

B. 2cm

C. 3cm

D. 4cm

解析: $V = 4x(9-x)^2 (0 < x < 9)$, 将四个选项代入比较大小, (也可求导) 选 C.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_n = -2a_{n-1} + 3 (n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbb{N}^*)$, 则下列说法错误的是 ()

A. $a_4 = -7$

B. $a_4 - 1$ 是 $a_2 - 1$ 与 $a_6 - 1$ 的等比中项

C. 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是等比数列

D. 在 $\{a_n\}$ 中, 只有有限个大于 0 的项

解析: $a_n + x = -2(a_{n-1} + x)$, 解得 $x = -1$, 即 $\frac{a_n - 1}{a_{n-1} - 1} = -2$, 通过叠加法, 求得 $a_n = (-2)^{n-1} + 1$, 对于 D, 偶数项为负, 有无限个大于 0 的项, 选 D.

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

11. 复数 $i(1-i)$ 的实部为_____.

解析: 原式 $= 1 + i$, 实部为 1.

12. 已知 $x > 0$, 则 $x + \frac{4}{x}$ 的最小值为_____.

解析: 均值不等式, $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{4} = 4$, 当且仅当 $x = 2$ 时取等. (求导也没人反对)

13. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是_____.

解析: 由题, $f'(x) = 3x^2 + a \geq 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒成立, 故 $a \geq 0$, a 的取值范围是 $[0, +\infty)$.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2$, 则 $a_4 =$ _____.

解析: $a_4 = S_4 - S_3 = 16 - 9 = 7$.

15. 已知函数 $f(x) = xe^x - m$, 则 $f(x)$ 的单调递减区间是_____; 若 $f(x)$ 有两个不同的零点, 则实数 m 的取值范围是_____.

解析: $f(x) = (x+1)e^x$, 故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1)$;

有两个不同零点, 则 $f(1) = e - m < 0$, $m > e$, 则 m 的取值范围是 $(e, +\infty)$.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = 2n - 1$ ，把 $\{a_n\}$ 中的各项按照一定的顺序排列成如图所示的三角形矩阵.



①数阵中第 5 行所有项的和为_____;

②2019 是数阵中第 i 行的第 j 列, 则 $i + j =$ _____.

解析: ① $21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125$;

② $2n - 1 = 2019$, $n = 1010$, $1 + 2 + 3 + \dots + 44 = 990$, 故 $i = 44 + 1 = 45$, $j = 2019 - 991 + 1 = 29$, $i + j = 74$.

三、解答题: 本大题共 4 小题, 共 36 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题 8 分) 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x + 6$.

(I) 求 $f(x)$ 的极值;

(II) 求 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值与最小值, 并写出相应的 x 的值.

解析: 略

18. (本小题 9 分) 已知关于 x 的不等式 $(x - a)(x - 2a) > 0$ 的解集为 M .

(I) 当 $a = 1$ 时, 求 M ;

(II) 当 $a \in \mathbb{R}$ 时, 求 M .

解析: (I) $\{x | x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$;

(II) ①当 $a = 0$ 时, 此时关于 x 的不等式为 $x^2 > 0$, $M = \{x | x \neq 0\}$;

②当 $a > 0$ 时, 此时 $M = \{x | x < a \text{ 或 } x > 2a\}$;

③当 $a < 0$ 时, 此时 $M = \{x | x < 2a \text{ 或 } x > a\}$.

19. (本小题 9 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_3 + a_5 = 8$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = (\frac{1}{3})^{a_n} + a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

解析: (I) $a_n = n(n \in N^*)$;

(II) 分组求和 $b_n = (\frac{1}{3})^{a_n} + a_n = (\frac{1}{3})^n + n$, $S_n = \frac{\frac{1}{3}[1 - (\frac{1}{3})^n]}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} (n \in N^*)$.

20. (本小题 10 分) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g(x) = ax$, $a \in R$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程;

(II) 若小强数学不等式 $f(x) < g(x)$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(III) 若直线 $y = -a$ 与曲线 $y = f(x) - g(x)$ 相切, 求 a 的值.

解析: 定义域 $(0, +\infty)$.

(I) $x - y - 1 = 0$;

(II) 参变分离, 即 $\frac{\ln x}{x^2} < a$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 令 $h(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $h'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$,

$(0, \sqrt{e})$ 增, $(\sqrt{e}, +\infty)$ 减, $h(x)_{\max} = h(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$, 故 a 的取值范围为 $(\frac{1}{2e}, +\infty)$;

(III) 由题, 设切点为 x_0 , 则 $\begin{cases} \frac{\ln x_0}{x_0} - ax_0 = -a \\ \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} - a = 0 \end{cases}$, 解得 $a = 1$.