北京一零一中 2023-2024 学年度第一学期高三数学统练二

一、选择题共 10 小题。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知 P 是复平面内表示复数 $a+b\mathrm{i}\ (a,b\in\mathbf{R})$ 的点, 若复数 $a+b\mathrm{i}$ 是虚数, 则点 P (　　)

(A) 在虚轴上　　(B) 不在虚轴上　　(C) 在实轴上　　(D) 不在实轴上

【参考答案】(2023 通州高一下期末 1) D

2. 若 $ab>0$, 且 $a<b$, 则下列不等式一定成立的是 (　　)

(A) $a^2<b^2$　　(B) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　(C) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$　　(D) $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

【参考答案】C

对于 A, 当 $a=-2, b=-1$ 时, 选项 A 错误; 对于 B, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}>0$, 故 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$, 故 B 错误; 对于 C, 由于 $ab>0$, 所以 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2=\frac{b^2+a^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}>0$, 故 C 正确; 对于 D, 当 a 和 b 都为负值时, 选项 D 错误.

3. 下列函数中, 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是 (　　)

(A) $f(x)=-\ln x$　　(B) $f(x)=\frac{1}{2^x}$　　(C) $f(x)=-\frac{1}{x}$　　(D) $f(x)=3^{|x-1|}$

【参考答案】(2023 高考北京 4) C

对于 A, 因为 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, $y=-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x)=-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 故 A 错误; 对于 B, 因为 $y=2^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x)=\frac{1}{2^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 故 B 错误; 对于 C, 因为 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, $y=-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x)=-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 故 C 正确; 对于 D, 因为 $f(\frac{1}{2})=3^{|\frac{1}{2}-1|}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$, $f(1)=3^{|1-1|}=3^0=1$, $f(2)=3^{|2-1|}=3$, 显然 $f(x)=3^{|x-1|}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不单调, D 错误.

4. 已知 $a=\lg\frac{1}{3}$, $b=3^{0.1}$, $c=\sin 3$, 则 (　　)

(A) $a>b>c$　　(B) $b>c>a$　　(C) $b>a>c$　　(D) $c>b>a$

【参考答案】(2023 朝阳高二下期末 5) B

5. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, 下面结论中正确的是 (　　)

(A) 若 $a_2 = a_4$, 则 $a_2 = a_3$

(B) 若 $a_3 > a_1$, 则 $a_4 > a_2$

(C) $\dfrac{a_2 + a_4}{2} \geqslant a_3$

(D) $\dfrac{a_2^2 + a_4^2}{2} \geqslant a_3^2$

【参考答案】(2023 顺义高二下期末 8) D

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90°$, $AC = BC = \sqrt{2}$, P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点, 且 $PC = 1$, 则 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 的最大值为 (　　)

(A) 16　　(B) 10　　(C) 8　　(D) 4

【参考答案】(2023 房山一模 8) D

由题意, $PC = 1$ 可得, 点 P 的轨迹为以 C 为圆心, 1 为半径的圆, 取 AB 的中点 D, 则 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PD}$, 所以 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|_{\max} = 2|\overrightarrow{PD}|_{\max} = 2(|CD| + 1) = 2 \times (\frac{1}{2}\sqrt{2+2} + 1) = 4$.

7. 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为非零向量, $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$, 则 “$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 夹角为钝角” 是 “$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| < \sqrt{2}|\boldsymbol{a}|$” 的 (　　)

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

【参考答案】(2023 东城高一下期末 8) A

8. 中国传统折扇文化有着极其深厚的底蕴, 一般情况下, 折扇可看作是由从一个圆面中剪下的扇形制作而成. 设制作扇子的扇形面积为 S_1, 圆面中剩下部分的面积为 S_2, 当 $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ 时, 扇面看上去形状较为美观. 那么, 此时制作扇子的扇形圆心角约为 (　　)

(A) π　　(B) $\dfrac{5\pi}{6}$　　(C) $\dfrac{3\pi}{4}$　　(D) $\dfrac{2\pi}{3}$

【参考答案】(2023 顺义高一上期末 10) C

设扇子的扇形的圆心角为 α_1, 圆面中剩下部分的圆心角为 α_2, 半径为 r, 则 $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\frac{1}{2}\alpha_1 r^2}{\frac{1}{2}\alpha_2 r^2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, 即 $\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\alpha_2$, 又 $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$, $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\alpha_2 + \alpha_2 = 2\pi$, 故 $\alpha_2 = \dfrac{4\pi}{\sqrt{5}+1} = (\sqrt{5}-1)\pi$, 所以 $\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\alpha_2 = (3-\sqrt{5})\pi$, $\alpha_1 = (3-\sqrt{5}) \times 180° \approx 137.5° \approx \dfrac{3\pi}{4}$.

9. 二维码与生活息息相关, 我们使用的二维码主要是 21×21 大小的, 即 441 个点, 根据 0 和 1 的二进制编码, 一共有 2^{441} 种不同的码, 假设我们 1 秒钟用掉 1 万个二维码, 1 万年约为

3×10^{11} 秒, 那么大约可以用 (　　)

(参考数据: $\lg 2\approx0.3$, $\lg 3\approx0.5$)

(A) 10^{117} 万年　　(B) 117 万年　　(C) 10^{205} 万年　　(D) 205 万年

【参考答案】A

由题意大约能用 $\dfrac{2^{441}}{3\times10^{11}\times10^{4}}$ 万年, 则 $\lg\dfrac{2^{441}}{3\times10^{15}}=441\lg2-\lg3-15\approx441\times0.3-0.5-15\approx117$, 所以 $\dfrac{2^{441}}{3\times10^{11}\times10^{4}}\approx10^{117}$.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 总存在 $m\in\mathbf{N}^*$, 使得 $S_n=a_m$, 则称 $\{a_n\}$ 为 "回旋数列". 有以下四个结论:

①若 $a_n=2023n$, 则 $\{a_n\}$ 为 "回旋数列";

②设 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且公比 q 为有理数, 则 $\{a_n\}$ 为 "回旋数列";

③设 $\{a_n\}$ 为等差数列, 当 $a_1=1, d<0$ 时, 若 $\{a_n\}$ 为 "回旋数列", 则 $d=-1$;

④若 $\{a_n\}$ 为 "回旋数列", 则对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 总存在 $m\in\mathbf{N}^*$, 使得 $a_n=S_m$.

其中正确结论的个数是 (　　)

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

【参考答案】B

①由 $a_n=2023n$ 可得 $S_n=2023(1+2+3+\cdots+n)=2023\times\dfrac{n(n+1)}{2}$, 由 $S_n=a_m$ 可得 $2023\times\dfrac{n(n+1)}{2}=2023m$, 取 $m=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 即可, 则 $\{a_n\}$ 为 "回旋数列", 故①正确; ②当 $q=1$ 时, $S_n=na_1$, $a_m=a_1$, 由 $S_n=a_m$ 可得 $na_1=a_1$, 故当 $n=2$ 时, 很明显 $na_1=a_1$ 不成立, 故 $\{a_n\}$ 不是 "回旋数列", ②错误; ③ $\{a_n\}$ 是等差数列, 故 $a_m=1+(m-1)d$, $S_n=n+\dfrac{n(n-1)}{2}d$, 因为数列 $\{a_n\}$ 是 "回旋数列", 所以 $1+(m-1)d=n+\dfrac{n(n-1)}{2}d$, 即 $m=\dfrac{n-1}{d}+\dfrac{n(n-1)}{2}+1$, 其中 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为非负整数, 所以要保证 $\dfrac{n-1}{d}$ 恒为整数, 故 d 为所有非负整数的公约数, 且 $d<0$, 所以 $d=-1$, 故③正确; ④由①可得当 $a_n=2023n$ 时, $\{a_n\}$ 为 "回旋数列", 取 $a_2=2023\times2$, $S_m=2023\times\dfrac{m(m+1)}{2}$, 显然不存在 m, 使得 $S_m=a_2=2023\times2$, 故④错误.

二、填空题共 5 小题。

11. 命题 "$\forall\, x\in\mathbf{R}, 2kx^2+kx-\dfrac{3}{8}<0$" 是假命题, 则实数 k 的取值范围是 ________ .

【参考答案】$(-\infty,-3]\cup(0,+\infty)$.

12. 若函数 $f(x)=\lg(x^2-ax+1)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是 ________ .

【参考答案】(2023 东城高二下期末 14) $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

因为函数 $f(x)=\lg(x^2-ax+1)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 所以由 $\Delta=(-a)^2-4\geqslant 0$ 得 $a\geqslant 2$ 或 $a\leqslant -2$.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{5}$, $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, 且 $\lambda>0$, 则 $\lambda=$ __________ ; $\boldsymbol{b}=$ __________ .

【参考答案】2, (2, 4).

由已知得, $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=2$, 所以 $\boldsymbol{b}=(2,4)$.

14. 已知角 α,β 的顶点与坐标原点 O 重合, 始边落在 x 轴的非负半轴上. 角 α 的终边绕原点 O 逆时针旋转 $\dfrac{3\pi}{4}$ 后与角 β 的终边重合, 且 $cos(\alpha+\beta)=1$, 则角 α 的一个取值为 __________ .

【参考答案】(2023 昌平高一下期末 15) $-\dfrac{3\pi}{8}$.

依题意, $\beta=\alpha+\dfrac{3\pi}{4}$, 因此 $\cos(\alpha+\beta)=\cos(2\alpha+\dfrac{3\pi}{4})=1$, 则 $2\alpha+\dfrac{3\pi}{4}=2k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 解得 $\alpha=k\pi-\dfrac{3\pi}{8}, k\in\mathbf{Z}$, 当 $k=0$ 时, $\alpha=-\dfrac{3\pi}{8}$, 所以角 α 的一个取值为 $-\dfrac{3\pi}{8}$.

15. 对于满足一定条件的连续函数 $f(x)$, 存在一个点 x_0, 使得 $f(x_0)=x_0$, 那么我们称该函数为 “不动点” 函数, 而称 x_0 为该函数的一个不动点, 现新定义: 若 x_0 满足 $f(x_0)=-x_0$, 则称 x_0 为 $f(x_0)$ 的次不动点. 有下面四个结论:

①定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数既不存在不动点, 也不存在次不动点;

②定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数既存在不动点, 也存在次不动点;

③当 $1\leqslant a\leqslant\dfrac{3}{2}$ 时, 函数 $f(x)=\log_2(4^x-a\cdot 2^x+1)$ 在 $[0,1]$ 上仅有一个不动点和一个次不动点;

④不存在正整数 a, 使得函数 $f(x)=\sqrt{e^x-\dfrac{1}{2}x-a}$ 在区间 $[0,1]$ 上存在不动点.

其中, 所以正确结论的序号为 __________ .

【参考答案】②③.

对于①: 取函数 $f(x)=x^2$, $f(0)=0$, 0 既是 $f(x)$ 的不动点, 又是 $f(x)$ 的次不动点, 故①错误; 对于②: 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数满足 $f(0)=0$, 故②正确; 对于③: 当 $\log_2(4^x-a\cdot 2^x+1)=x$ 时, $4^x-a\cdot 2^x+1=2^x$, 即 $a=2^x+\dfrac{1}{2^x}-1$. 令 $2^x=t$, $t\in[1,2]$, $a=t+\dfrac{1}{t}-1$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递增, $a=2^x+\dfrac{1}{2^x}-1$ 在 $[0,1]$ 上单调递增, 满足 $\log_2(4^x-a\cdot 2^x+1)=x$ 有唯一解; 当 $\log_2(4^x-a\cdot 2^x+1)=-x$ 时, $4^x-a\cdot 2^x+1=\dfrac{1}{2^x}$, 即 $a=2^x+\dfrac{1}{2^x}-\dfrac{1}{2^{2x}}$. 令 $2^x=t$, $t\in[1,2]$, $a=t+\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2}$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递增, $a=2^x+\dfrac{1}{2^x}-\dfrac{1}{2^{2x}}$ 在 $[0,1]$ 上单调递

增, 满足 $\log_{\frac{1}{2}}(4^x - a\cdot 2^x + 1) = x$ 有唯一解; 综上 $1 \leqslant a \leqslant \frac{3}{2}$ 时函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上仅有一个不动点和一个次不动点, 故③正确; 对于④: 假设函数 $f(x) = \sqrt{e^x - \frac{1}{2}x - a}$ 在区间 $[0,1]$ 上存在不动点, 则 $f(x) = x$ 在 $[0,1]$ 上有解, 即 $a = e^x - \frac{1}{2}x - x^2$ 在 $[0,1]$ 上有解, 令 $m(x) = e^x - \frac{1}{2}x - x^2$, 则 $m'(x) = e^x - \frac{1}{2} - 2x$, 再令 $n(x) = e^x - \frac{1}{2} - 2x$, 则 $n'(x) = e^x - 2$, 令 $n'(x) = 0$, 解得 $x = \ln 2$, 所以 $n(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2, 1)$ 上单调递增, 所以 $n(x)_{\min} = n(\ln 2) = 2 - \frac{1}{2} - 2\ln 2 = \frac{3}{2} - 2\ln 2 = \ln e^{\frac{3}{2}} - \ln 4 = \ln\sqrt{e^3} - \ln\sqrt{16} > 0$, 所以 $m'(x) > 0$ 在 $[0,1]$ 上恒成立, 所以 $m(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增, 所以 $m(x)_{\min} = m(0) = 1$, $m(x)_{\max} = m(1) = e - \frac{3}{2}$, 所以实数 a 满足 $1 \leqslant a \leqslant e - \frac{3}{2}$, 存在正整数 $a = 1$ 满足条件, 故④错误.

三、解答题共 6 小题。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16. 已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $S_3 = 18$, 且 a_1, a_2, a_4 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

【参考答案】(2023 石景山高二下期末 17)

(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 由 $S_3 = 18$, 得 $3a_1 + 3d = 18$, 即 $a_1 + d = 6$,

由 a_1, a_2, a_4 成等比数列, 得 $(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d)$, 即 $a_1^2 + 2a_1 d + d^2 = a_1^2 + 3a_1 d$,

又 $d \neq 0$ 得 $a_1 = d$, 所以 $a_1 = 3, d = 3$,

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n$.

(2) 由 $a_n = 3n$, 得 $S_n = \frac{n(3n+3)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}$, 所以 $\frac{1}{S_n} = \frac{2}{3n(n+1)} = \frac{2}{3}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$,

$T_n = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n} = \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{2n}{3(n+1)}$.

17. 已知函数 $f(x) = a\sin(2x - \frac{\pi}{6}) - 2\cos^2(x + \frac{\pi}{6})$ $(a > 0)$, 且满足 __________ .

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式及最小正周期;

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) = 1$ 在区间 $[0, m]$ 上有两个不同解, 求实数 m 的取值范围.

从① $f(x)$ 的最大值为 1; ② $f(x)$ 的图象与直线 $y = -3$ 的两个相邻交点的距离等于 π; ③ $f(x)$ 的图象过点 $(\frac{\pi}{6}, 0)$ 这三个条件中选择一个, 补充在上面问题中并作答.

【参考答案】

(1) 因为 $f(x) = a\sin(2x - \frac{\pi}{6}) - \cos 2(x + \frac{\pi}{6}) - 1 = a\sin(2x - \frac{\pi}{6}) - \cos(2x + \frac{\pi}{3}) - 1$

$= a\sin(2x - \frac{\pi}{6}) - \cos[(2x - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{2}] - 1 = (a+1)\sin(2x - \frac{\pi}{6}) - 1$,

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$.

因为 $a>0$, 所以函数 $f(x)$ 的最大值和最小值分别为 $a, -a-2$.

若选①, 则 $a=1$, 函数 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$.

若选②, 则 -3 为函数 $f(x)$ 的最小值, 从而 $a=1$, 函数 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$.

若选③, $(a+1)\sin(2\times\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6})-1=0$, 从而 $a=1$, 函数 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$.

(2) 由 (1) 知函数 $f(x)$ 的最大值为 1.

因为关于 x 的方程 $f(x)=1$ 在区间 $[0,m]$ 上有两个不同解,

当 $x\in[0,m]$ 时, $2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6}, 2m-\frac{\pi}{6}]$.

所以 $\frac{5\pi}{2}\leqslant 2m-\frac{\pi}{6}<\frac{9\pi}{2}$, 解得 $\frac{4\pi}{3}\leqslant m<\frac{7\pi}{3}$.

所以, 实数 m 的取值范围是 $[\frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3})$.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos 2B=-\frac{1}{2}$, $c=8$, $b=7$.

(1) 求 $\sin C$;

(2) 若角 C 为钝角, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

【参考答案】(2023 房山二模 16)

(1) 方法一 (使用二倍角公式):

在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $\cos 2B=-\frac{1}{2}$, 所以 $1-2\sin^2 B=-\frac{1}{2}$.

因为 $0<B<\pi$, $\sin B>0$, 所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 得 $\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{8}{\sin C}$, 解得 $\sin C=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

方法二 (使用特殊角):

在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $c>b$, 所以 $C>B$. 所以 $0<B<\frac{\pi}{2}$, $0<2B<\pi$.

因为 $\cos 2B=-\frac{1}{2}$, 所以 $2B=\frac{2\pi}{3}$, $B=\frac{\pi}{3}$, 所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(以下同方法一)

(2) 方法一 (使用角 C 余弦定理):

因为 $\sin^2 C+\cos^2 C=1$, C 为钝角, 所以 $\cos C=-\sqrt{1-(\frac{4\sqrt{3}}{7})^2}=-\frac{1}{7}$.

由 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$, 得 $8^2=a^2+7^2-2a\cdot 7\cdot(-\frac{1}{7})$.

整理得 $a^2+2a-15=0$, 解得 $a=3$ 或 $a=-5$ (舍), 所以 $a=3$.

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=3+7+8=18$.

方法二 (使用角 B 余弦定理):

在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $\cos 2B = -\frac{1}{2}$, 所以 $2\cos^2 B - 1 = -\frac{1}{2}$, $\cos B = \frac{1}{2}$.

由 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$, 得 $7^2 = a^2 + 8^2 - 2a \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$.

整理得 $a^2 - 8a + 15 = 0$, 解得 $a = 5$ 或 $a = 3$.

当 $a = 3$ 时, $\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab} = \frac{7^2 + 3^2 - 8^2}{2ab} < 0$. 角 C 为钝角.

当 $a = 5$ 时, $\cos C = \frac{7^2 + 5^2 - 8^2}{2ab} > 0$. $\cos A = \frac{7^2 + 8^2 - 5^2}{2ab} > 0$ 不符合题意.

所以 $a = 3$, $\triangle ABC$ 的周长为 $a + b + c = 3 + 7 + 8 = 18$.

19. 已知函数 $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $y = 2x + m$, 求 x_0, m 的值;

(2) 设函数 $g(x) = 1 + x\ln x$, 证明: $g(x)$ 的图象在 $f(x)$ 的图象的上方.

【参考答案】(2023 大兴高二下期中 21)

(1) 因为 $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$,

所以 $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$.

依题设, $1 + \frac{1}{x_0^2} = 2$, $x_0 - \frac{1}{x_0} = 2x_0 + m$, 且 $x_0 > 0$.

解得 $x_0 = 1$, $m = -2$.

(2) 令 $h(x) = 1 + x\ln x - x + \frac{1}{x}$, $x > 0$.

证明 $g(x)$ 的图象在 $f(x)$ 图象的上方,

等价于证明对任意的 $x > 0$, $h(x) > 0$ 恒成立,

等价于证明当 $x > 0$, $h(x)$ 的最小值大于零.

因为 $h'(x) = \ln x - \frac{1}{x^2}$, $x > 0$,

所以 $h''(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}$,

且当 $x > 0$ 时, $h''(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} > 0$.

所以 $h'(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $h'(1) = -1 < 0$, $h'(\sqrt{e}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} > 0$,

所以 $h'(x)$ 在区间 $(1, \sqrt{e})$ 上存在唯一零点 x_0,

所以 $\ln x_0 - \frac{1}{x_0^2} = 0$, 即 $\ln x_0 = \frac{1}{x_0^2}$.

所以 $h(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $h(x) \geqslant h(x_0)$.

因为 $h(x_0)=1+x_0\ln x_0-x_0+\dfrac{1}{x_0}$, 且 $\ln x_0=\dfrac{1}{x_0^2}$,

所以 $h(x_0)=1-x_0+\dfrac{2}{x_0}=\dfrac{-x_0^2+x_0+2}{x_0}=\dfrac{-(x_0-2)(x_0+1)}{x_0}$.

因为 $x_0\in(1,\sqrt{\mathrm{e}})$, 所以 $-(x_0-2)(x_0+1)>0$.

所以 $h(x_0)=\dfrac{-(x_0-2)(x_0+1)}{x_0}>0$.

所以 $h(x)\geqslant h(x_0)>0$.

所以对任意的 $x>0$, $h(x)>0$ 恒成立,

即 $g(x)$ 的图象在 $f(x)$ 图象的上方.

20. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x-x-1$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(2) 设 $g(x)=f'(x)$, 求证: 当 $x\in[0,\pi)$ 时, $g(x)\leqslant 0$;

(3) 对任意的 $m,n\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, 判断 $f(m+n)-f(m)$ 与 $f(n)$ 的大小关系, 并证明结论.

【参考答案】(2023 大兴高二下期中 20)

(1) 由 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x-x-1$,

得 $f'(x)=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)-1$.

因为 $f(0)=0$, $f'(0)=0$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=0$.

(2) 依题意, $g(x)=f'(x)=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)-1$.

所以 $g'(x)=-2\mathrm{e}^x\sin x$.

当 $x\in[0,\pi)$ 时, $\mathrm{e}^x>0$, $\sin x\geqslant 0$,

所以 $g'(x)\leqslant 0$.

所以函数 $g(x)$ 在区间 $[0,\pi)$ 上单调递减.

因为 $g(0)=0$,

所以当 $x\in[0,\pi)$ 时, $g(x)\leqslant g(0)=0$.

(3) 不妨假设 $n\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 取定, 令 $h(x)=f(x+n)-f(x)-f(n)$, $x\in[0,\dfrac{\pi}{2})$,

则 $h'(x)=f'(x+n)-f'(x)$, $x\in[0,\dfrac{\pi}{2})$, $x+n\in(0,\pi)$.

由 (2) 知, $g(x)=f'(x)$ 在区间 $[0,\pi)$ 上单调递减,

因为 $0\leqslant x<x+n<\pi$, 所以 $h'(x)=f'(x+n)-f'(x)<0$.

从而 $h(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减.

因为 $h(0)=-f(0)=0$,

所以当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时, $h(x)<h(0)=0$, 即 $f(x+n)-f(x)-f(n)<0$.

综上, 对任意的 $m,n\in(0,\frac{\pi}{2})$, 有 $f(m+n)-f(m)<f(n)$.

21. 设 $m,n\in\mathbf{N}^*$, 已知由自然数组成的集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ $(a_1<a_2<\cdots<a_n)$, 集合 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 是 S 的互不相同的非空子集, 定义 $n\times m$ 数表:

$$\chi=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}, \text{其中 } x_{ij}=\begin{cases} 1, & a_i\in S_j, \\ 0, & a_i\notin S_j, \end{cases}$$

设 $d(a_i)=x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{im}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 令 $d(S)$ 是 $d(a_1),d(a_2),\cdots,d(a_n)$ 中的最大值.

(1) 若 $m=3$, $S=\{1,2,3\}$, 且 $\chi=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 S_1,S_2,S_3 及 $d(S)$;

(2) 若 $S=\{1,2,\cdots,n\}$, 集合 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 中的元素个数均相同, 若 $d(S)=3$, 求 n 的最小值;

(3) 若 $m=7$, $S=\{1,2,\cdots,7\}$, 集合 $S_1,S_2,\cdots,S_7$ 中的元素个数均为 3, 且 $S_i\cap S_j\neq\varnothing$ $(1\leqslant i<j\leqslant 7)$, 求证: $d(S)$ 的最小值为 3.

【参考答案】(2023 朝阳高一下期末 21)

(1) $S_1=\{1,3\}$, $S_2=\{2\}$, $S_3=\{1,2\}$, $d(S)=2$.

(2) 设 $a_i\in S$ 使得 $d(a_i)=d(S)=3$,

则 $d(a_i)=x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{im}\leqslant m$,

所以 $m\geqslant 3$.

所以 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 至少有 3 个元素个数相同的非空子集.

当 $n=1$ 时, $S=\{1\}$, 其非空子集只有自身, 不符题意.

当 $n=2$ 时, $S=\{1,2\}$, 其非空子集只有 $\{1\},\{2\},\{1,2\}$, 不符题意.

当 $n=3$ 时, $S=\{1,2,3\}$, 元素个数为 1 的非空子集有 $\{1\},\{2\},\{3\}$,

元素个数为 2 的非空子集有 $\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}$.

当 $\{S_1,S_2,S_3\}=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ 时, $d(1)=d(2)=d(3)=1$, 不符题意.

当 $\{S_1,S_2,S_3\}=\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$ 时, $d(1)=d(2)=d(3)=2$, 不符题意.

当 $n=4$ 时, $S=\{1,2,3,4\}$, 令 $S_1=\{1,2\}$, $S_2=\{1,3\}$, $S_3=\{1,4\}$,

则 $\chi=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $d(S)=d(1)=3$.

所以 n 的最小值为 4.

(3) 由题可知, $S_j=\{i\mid x_{ij}=1,1\leqslant i\leqslant 7\}$, 记 $|S_j|$ 为集合 $S_j\ (j=1,2,\cdots,7)$ 中的元素个数,

则 $|S_j|=x_{1j}+x_{2j}+\cdots+x_{7j}=3$ 为数表 χ 第 j 列之和.

因为 $d(i)=x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{i7}\ (i=1,2,\cdots,7)$ 是数表 χ 第 i 行之和,

所以 $d(1)+d(2)+\cdots+d(7)=|S_1|+|S_2|+\cdots+|S_7|=3\times 7=21$.

因为 $d(i)\leqslant d(S)\ (i=1,2,\cdots,7)$, 所以 $21=d(1)+d(2)+\cdots+d(7)\leqslant 7d(S)$.

所以 $d(S)\geqslant 3$.

当 $S_1=\{1,2,3\}$, $S_2=\{1,4,5\}$, $S_3=\{1,6,7\}$, $S_4=\{2,4,6\}$, $S_5=\{3,4,7\}$, $S_6=\{3,5,6\}$, $S_7=\{2,5,7\}$ 时,

$$\chi=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&1\\1&0&0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0&1&1\\0&0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&1&0&1\end{pmatrix},$$

$d(S)=3$. 所以 $d(S)$ 的最小值为 3.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！