北京市朝阳区 2018-2019 学年度第一学期期末质量检测

高二年级数学参考答案 2019.1

一、选择题（共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

（1）A （2）B （3）D （4）A （5）C

（6）C （7）B （8）D （9）C （10）B

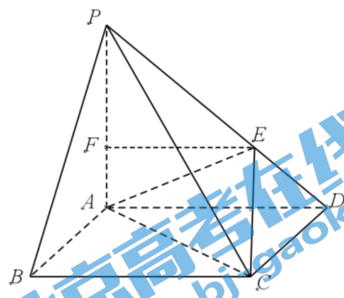
二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（11）$\exists x_0>0$，$x_0\leqslant \ln x_0$ （12）$x\pm 3y=0$ （13）S_3

（14）$\frac{1}{8}$ （15）3，$a_n=\frac{n(n+1)}{2}\ (n\in \mathbf{N}^*)$ （16）①②④

三、解答题（共 4 小题，共 70 分）

（17）（共 18 分）



解：（Ⅰ）因为 $PA\perp AB$，$PA\perp AD$，$AB\cap AD=A$，

所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$． ………………… 4 分

（Ⅱ）（ⅰ）因为 $PF:FA=PE:ED=2:1$，

所以 $\triangle PFE \backsim \triangle PAD$，

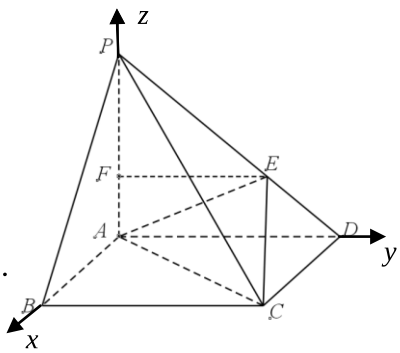
所以 $\angle PFE=\angle PAD$．

所以 $EF\,//\,AD$．

又因为 $EF\not\subset$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$

所以 $EF\,//$ 平面 $ABCD$． …………10 分

（ⅱ）如图，以 A 为坐标原点，建立空间直角坐标系 $A-xyz$．



设 $AD=1$，

则 $\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3})$．

由（Ⅰ）可知，平面 ACD 的一个法向量为 $\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$．

设平面 ACE 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x+y=0, \\ \frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z=0. \end{cases}$

令 $y=-1$，则 $x=1$， $z=2$.

于是 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$.

所以 $\cos\langle \boldsymbol{n}, \overrightarrow{AP}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AP}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

由题知二面角 $D-AC-E$ 为锐角，

所以二面角 $D-AC-E$ 的余弦值 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ………………… 18 分

（18）（共 16 分）

解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时， $f(x)=x^2+x-1$，

所以 $f(x)>0$ 的解集为 $(-\infty,\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2})\cup(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},+\infty)$. ………………… 5 分

（Ⅱ）当 $a=0$ 时， $f(x)<0$ 符合题意.

当 $a\neq 0$ 时，由题意得：

$$\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<0 \\ a^2+4a<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<0 \\ -4<a<0 \end{cases} \Rightarrow -4<a<0 .$$

综上可知，a 的取值范围为 $(-4,0]$. ………………… 10 分

（Ⅲ）原不等式为 $ax^2+ax-1<0$.

（1）当 $a=0$ 时，原不等式为 $-1<0$，所以 $x\in\mathbf{R}$.

（2）当 $a\neq 0$ 时， $\Delta=a^2+4a$.

①当 $a>0$ 时， $\Delta>0$，

由 $ax^2+ax-1<0$ 得 $\dfrac{-a-\sqrt{a^2+4a}}{2a}<x<\dfrac{-a+\sqrt{a^2+4a}}{2a}$.

②当 $-4<a<0$ 时， $\Delta<0$，

由 $ax^2+ax-1<0$ 得 $x\in\mathbf{R}$.

③当 $a=-4$ 时，$\Delta=0$，

由 $ax^2+ax-1<0$ 得 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq-\frac{1}{2}$.

④当 $a<-4$ 时，$\Delta>0$，

由 $ax^2+ax-1<0$ 得 $x<\frac{-a+\sqrt{a^2+4a}}{2a}$ 或 $x>\frac{-a-\sqrt{a^2+4a}}{2a}$.

综上可知，当 $a>0$ 时，解集为 $(\frac{-a-\sqrt{a^2+4a}}{2a},\frac{-a+\sqrt{a^2+4a}}{2a})$；

当 $-4<a\leqslant 0$ 时，解集为 $\mathbf{R}$；

当 $a=-4$ 时，解集为 $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},+\infty)$；

当 $a<-4$ 时，解集为 $(-\infty,\frac{-a+\sqrt{a^2+4a}}{2a})\cup(\frac{-a-\sqrt{a^2+4a}}{2a},+\infty)$. …16 分

（19）（共 18 分）

解：（I）由题意可知，$\begin{cases}c=1,\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $a^2=4$，$b^2=3$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………… 5 分

（II）（ⅰ）当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时，l 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-1)$，

由 $\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-1),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $5x^2-8x=0$，

解得 $x_1=0,x_2=\frac{8}{5}$.

所以 $|PQ|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+3}\times|0-\frac{8}{5}|=\frac{16}{5}$.

又因为原点 O 到直线 PQ 的距离 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 ΔOPQ 的面积为 $S=\frac{1}{2}|PQ|\cdot d=\frac{4}{5}\sqrt{3}$. ………………… 10 分

（ii）猜想：PQ 的取值范围为 $[3,4]$.

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，$P(1,\frac{3}{2})$，$Q(1,-\frac{3}{2})$，此时 $|PQ|=3$.

当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时，设直线 PQ 的方程为 $y=k(x-1)$，

由 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ 3x^2+4y^2=12, \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$.

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，显然 $\Delta>0$，

则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$.

所以 $|PQ|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(\frac{8k^2}{3+4k^2})^2-\frac{4(4k^2-12)}{3+4k^2}}$

$=\frac{12(k^2+1)}{3+4k^2}=\frac{3(3+4k^2)+3}{3+4k^2}=3+\frac{3}{3+4k^2}$.

由 $k^2\geqslant 0$，得 $3<3+\frac{3}{3+4k^2}\leqslant 4$.

综上可知，$|PQ|$ 的取值范围为 $[3,4]$. ………………… 18 分

（20）（共 18 分）

解：（Ⅰ）1，3，5，7，9… 具有性质 L；　1，4，16，64，256…不具有性质 L.

理由如下：

对于数列 1，3，5，7，9…，其通项公式为 $a_n=2n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$，

$a_{n+1}-3a_n=2n+1-3(2n-1)=4-4n<2$，

因此1，3，5，7，$9\cdots$具有性质L.

而对于数列1，4，16，64，$256\cdots$，

由于$a_3-3a_2=16-3\times4=4>2$，

所以数列1，4，16，64，$256\cdots$不具有性质L. ……… 6分

（Ⅱ）因为等差数列$\{a_n\}$具有性质L，所以$a_{n+1}-3a_n<2$.

即$1+nd-3[1+(n-1)d]<2$对$n\in\mathbf{N}^*$均成立.

因此，$(3-2n)d<4$对$n\in\mathbf{N}^*$均成立.

当$n=1$时，$d<4$.

当$n\geqslant2$时，$d>\dfrac{4}{3-2n}$恒成立，

而$\dfrac{4}{3-2n}<0$ $(n\geqslant2$，$n\in\mathbf{N}^*)$，故$d\geqslant0$；

所以$0\leqslant d<4$.

由 $a_1=1$，得 $S_n=n+\dfrac{n(n-1)}{2}d$，

由题意，$n+\dfrac{n(n-1)}{2}d<2n^2+2n$对$n\in\mathbf{N}^*$均成立，

即$(n-1)d<4n+2$对$n\in\mathbf{N}^*$均成立.

当$n=1$时，$d\in\mathbf{R}$；

当$n\geqslant2$时，$d<\dfrac{4n+2}{n-1}$恒成立.

因为$\dfrac{4n+2}{n-1}=4+\dfrac{6}{n-1}>4$，所以$d\leqslant4$.

综上可得，数列$\{a_n\}$的公差d的取值范围是$0\leqslant d<4$. …………………… 12分

（Ⅲ）设数列$\{a_n\}$的公比为q，则$a_n=a_1q^{n-1}=q^{n-1}$.

因为公比为正整数的等比数列$\{a_n\}$具有性质L，

所以$q^n-3q^{n-1}<2$，可得$(q-3)q^{n-1}<2$，故$q-3\leqslant0$.

若不然$q\geqslant4$，此时$(q-3)q^{n-1}\geqslant4^{n-1}$，不满足条件.

又 q 是正整数，

所以 $q=1$， 2， 3．

因为 $\{b_n\}$ 不具有性质 L，

故存在正整数 m， 使得 $b_{m+1}-3b_m\geqslant 2$．

即 $q^{\frac{3}{2}m}-3q^{\frac{3}{2}(m-1)}\geqslant 2$， $(q^{\frac{3}{2}}-3)q^{\frac{3}{2}(m-1)}\geqslant 2$，

所以 $q^{\frac{3}{2}}-3>0$，

故 $q>3^{\frac{2}{3}}>2$．

又 $q\in\{1,2,3\}$，

因此 $q=3$．

当 $q=3$ 时, $a_n=3^{n-1}$， 满足 $a_{n+1}-3a_n<2$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3^{n-1}$． …………… 18 分