

门头沟区 2018 年高三综合练习 (一)

数 学 (理)

2018.4

一、选择题 (本大题共 8 个小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。)

1. 设全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $A = \{1, 3\}$, $B = \{3, 5\}$, 则 $C_U(A \cap B)$ 为
- A. $\{0, 4\}$ B. $\{1, 5\}$ C. $\{2, 0, 4\}$ D. $\{2, 0, 5\}$

2. 复数 z 满足 $\frac{z}{i} = 2 - 3i$, 复数 z 对应的点在复平面的
- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 对于函数 $f(x) = \sin x + x + c$ ($c \in \mathbb{Z}$), 计算 $f(1)$ 和 $f(-1)$, 所得出的正确结果一定不可能是

- A. 4 和 6 B. 3 和 1 C. 2 和 4 D. 1 和 2

4. 抛物线 $y^2 = 8x$ 焦点 F 到双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的一条渐近线的距离是

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 3 D. $\sqrt{3}$

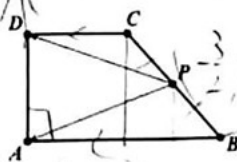
5. 中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题: “三百七十八里关, 初步健步不为难, 次日脚痛减一半, 六朝才得到其关, 要见次日行里数, 请公仔细算相还。” 其大意为: “有一个人走 378 里路, 第一天健步行走, 从第二天起脚痛每天走的路程为前一天的一半, 走了 6 天后到达目的地。” 则该人第五天走的路程为

- A. 48 里 B. 24 里 C. 12 里 D. 6 里

6. 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 90^\circ$, 且 $AB = 2CD = 2AD = 2$, P

是 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PA}$ 为

- A. $\frac{9}{4}$ B. 3 C. 2 D. $\frac{5}{2}$



7. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的部分图像如图所示, 则

“ $m \geq 2$ ”是“函数 $f(x) \leq m$ 对 $x \in [0, 8]$ 恒成立”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件



8. 某电力公司在工程招标中是根据技术、商务、报价三项评分标准进行综合评分的, 按照综合得分的高低进行综合排序, 综合排序高者中标。

分值权重表如下:

总分	技术	商务	报价
100%	50%	10%	40%

技术标、商务标基本都是由公司的技术、资质、资信等实力来决定的。报价表则相对灵活, 报价标的评分方法是: 基准价的基准分是 68 分, 若报价每高于基准价 1%, 则在基准分的基础上扣 0.8 分, 最低得分 48 分; 若报价每低于基准价 1%, 则在基准分的基础上加 0.8 分, 最高得分为 80 分。若报价低于基准价 15% 以上 (不含 15%) 每再低 1%, 在 80 分基础上扣 0.8 分。

在某次招标中, 若基准价为 1000 (万元)。甲、乙两公司综合得分如下表:

公司	技术	商务	报价
甲	80 分	90 分	A_1 分
乙	70 分	100 分	A_2 分

甲公司报价为 1100 (万元), 乙公司的报价为 800 (万元) 则甲、乙公司的综合得分, 分别是

- A. 73, 75.4 B. 73, 80 C. 74.6, 76 D. 74.6, 75.4

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 满分 30 分.)

9. $(x^2 - \frac{1}{x})^6$ 的展开式中 x^6 的系数是 15.

10. 某高中校高一、高二、高三三个年级人数分别为 300, 300, 400 通过分层抽样从中抽取 40 人进行问卷调查, 现在从答卷中随机抽取一张, 恰好是高三学生的答卷的概率是 $\frac{1}{4}$.

11. 直线 $\begin{cases} x = t \cos \frac{\pi}{3} \\ y = t \sin \frac{\pi}{3} \end{cases}$ (t 为参数) 截圆 $C: \rho = 4 \cos \theta$ 所得的弦长为 $2\sqrt{3}$.

12. 某程序框图如图所示, 则输出的结果 S 是 $\frac{1}{2}$.

13. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上的点 P 若满足

$PF_1 \perp PF_2$, F_1, F_2 为椭圆的两个焦点, 称这样的点 P 为椭圆的“焦垂点”. 椭圆

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 有 4 个“焦垂点”; 请你写出椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上有 4 个“焦垂点”时所满足的条件 $a^2 - 2b^2 > 0$.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x| & x \geq a \\ -(x-3a+1)^2 + (2a-1)^2 + a & x < a \end{cases}$, 若存在正实数 b 使得

$g(x) = f(x) - b$ 有四个不同的零点, 则正实数 a 的取值范围 $(\frac{1}{2}, 1)$.

三、解答题：(本大题共6小题，满分80分.)

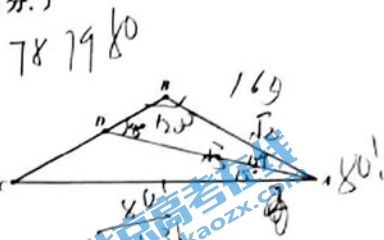
15. (本小题满分13分)

在 $\triangle ABC$ 中， $B=120^\circ$ ， $AB=\sqrt{2}$ ，

$\angle A$ 的角平分线 $AD=\sqrt{3}$ ，

(1) 求 $\angle ADB$ 的大小；

(2) 求 AC 的长。



16. (本小题满分13分) 2022年第24届冬奥会将在北京举行。为了推动我国冰雪运动的发展，京西某区兴建了“腾越”冰雪运动基地。通过对来“腾越”参加冰雪运动的100名运动员随机抽样调查，他们的身份分布如下：

身份	小学生	初中生	高中生	大学生	职工	合计
人数	40	20	10	20	10	100

注：将频率视为概率

(1) 求来“腾越”参加冰雪运动的人员中，小学生的概率；

(2) 设 X 表示来“腾越”参加运动的3人中是大学生的人数，求 X 的分布列及期望 EX 。

$$P(X=0) = \frac{C_2^0 C_1^3}{C_3^{100}} = \frac{1 \cdot 1}{100 \cdot 99 \cdot 98} = \frac{1}{970200}$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 C_1^2}{C_3^{100}} = \frac{2 \cdot 1}{100 \cdot 99 \cdot 98} = \frac{2}{970200}$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 C_1^1}{C_3^{100}} = \frac{1 \cdot 1}{100 \cdot 99 \cdot 98} = \frac{1}{970200}$$

$$P(X=3) = \frac{C_2^3 C_1^0}{C_3^{100}} = \frac{1 \cdot 1}{100 \cdot 99 \cdot 98} = \frac{1}{970200}$$

$$EX = 0 \cdot \frac{1}{970200} + 1 \cdot \frac{2}{970200} + 2 \cdot \frac{1}{970200} + 3 \cdot \frac{1}{970200} = \frac{6}{970200} = \frac{1}{161700}$$

17. (本小题满分13分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中,

$AB \parallel CD$, $AB = 2CD = 2BC = 2AD = 4$,
 $\angle DAB = 60^\circ$, $AE = BE$

$\triangle PAD$ 为正三角形, 且平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$,

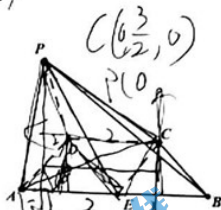
平面 $PEC \cap$ 平面 $PAD = l$.

(1) 求证: $l \parallel EC$;

(2) 求二面角 $P-EC-D$ 的余弦值;

(3) 是否存在线段 PC (端点 P, C 除外) 上一点 M , 使得 $DE \perp AM$.

若存在, 指出点 M 的位置, 若不存在, 请说明理由.



18. (本题满分13分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 三点

$P_1(1, \frac{3}{2})$, $P_2(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_3(-1, -\frac{3}{2})$ 中恰有二点在椭圆 C 上, 且离心率 $e = \frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 P 为椭圆 C 上任一点, A_1, A_2 为椭圆 C 的左右顶点, M 为 PA_1 中点,

求证: 直线 PA_2 与直线 OM 它们的斜率之积为定值;

(3) 若椭圆 C 的右焦点为 F , 过 $B(4, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 D, E .

求证: 直线 FD 与直线 FE 关于直线 $x=1$ 对称.

$$\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{b^2} = 1$$

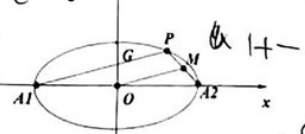
$$\frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1$$



$$\frac{1}{4a^2} = \frac{2}{2} = 8a^2$$

$$\frac{1}{4a^2} = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

19. (本题满分 14 分) 已知 $f(x) = \frac{be^x + a \ln(x+2)}{x+2}$ 在 $(-1, f(-1))$ 处的

切线方程为 $y = x + \frac{1}{e} + 1$.

(1) 求 $y = f(x)$ 的解析式;

(2) 设 $h(x) = (x+2)e^x - \frac{1}{x+2}$ ($x > -2$), 求 $h(x)$ 零点的个数;

(3) 求证: $y = f(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增.

20. (本题满分 14 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, |a_{n+1} - a_n| = p^n, n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 若 $p = 1$, 写出 a_4 的所有值;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且 $a_1, 2a_2, 3a_3$ 成等差数列, 求 p 的值;

(3) 若 $p = \frac{1}{2}$, 且 $\{a_{2n-1}\}$ 是递增数列, $\{a_{2n}\}$ 是递减数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.