

数 学（理）

2019.1

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡收回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

(1) 若集合 $A = \{x | x^2 + 2x < 0\}$, $B = \{x | |x| > 1\}$, 则 $A \cap B =$

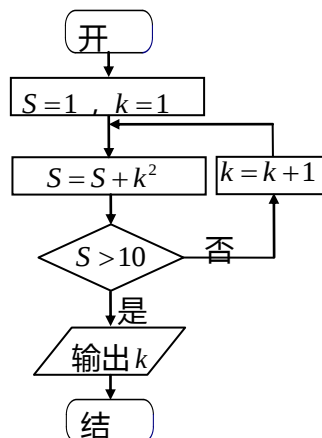
- A. $\{x | -2 < x < -1\}$ B. $\{x | -1 < x < 0\}$
C. $\{x | 0 < x < 1\}$ D. $\{x | 1 < x < 2\}$

(2) 设 x, y 满足 $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0, \\ x + y + 1 \leq 0, \\ y + 1 \geq 0, \end{cases}$ 那么 $2x - y$ 的最大值为

- A. -3 B. -2 C. -1 D. 1

(3) 右图是一个算法流程图，则输出的 k 的值为

- A. 2
B. 3
C. 4
D. 5



(4) 设 $\mathbf{a}$ 是单位向量， $\mathbf{b}$ 是非零向量，则 “ $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ” 是 “ $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 1$ ” 的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

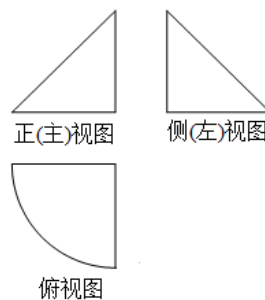
(5) 设 P, Q 分别为直线 $\begin{cases} x = t, \\ y = 15 - 2t \end{cases}$ (t 为参数) 和曲线 $C: \begin{cases} x = 1 + \sqrt{5} \cos \theta, \\ y = -2 + \sqrt{5} \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 上的点，则 $|PQ|$ 的最小值为

- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $4\sqrt{5}$

(6) 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 公比 $q > 1$, 且 $a_5 = b_5$, 则

- A. $a_3 + a_7 > b_4 + b_6$ B. $a_3 + a_7 \geq b_4 + b_6$
C. $a_3 + a_7 < b_4 + b_6$ D. $a_3 + a_7 = b_4 + b_6$

(7) 《九章算术》是我国古代数学著作, 书中有如下问题: “今有委米依垣内角, 下周八尺, 高五尺, 问: 积及米几何?” 其意思为: 在屋内墙角处堆放米, 米堆底部的弧长为 8 尺, 米堆的高为 5 尺, 问米堆的体积及堆放的米各为多少?



已知米堆所形成的几何体的三视图如图所示, 一斛米的体积约为 1.62 立方尺, 由此估算出堆放的米约有

- A. 21 斛 B. 34 斛
C. 55 斛 D. 63 斛

(8) 设点 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的左、右焦点, 点 P 是椭圆 C 上任意一点, 若使得 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = m$ 成立的点恰好是 4 个, 则实数 m 的值可以是

- A. $\frac{1}{2}$ B. 3 C. 5 D. 8

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

(9) 已知复数 z 满足 $(1-i)z = 2i$ (i 是虚数单位), 则复数 z 的共轭复数 $\bar{z} =$ _____.

(10) 已知点 F 为抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点, 则点 F 坐标为 _____; 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2} = 1$ ($a > 0$) 的一个焦点与点 F 重合, 则该双曲线的渐近线方程是 _____.

(11) 已知 $(x - \frac{a}{x})^7$ 展开式中 x^5 的系数为 21, 则实数 a 的值为 _____.

(12) 能说明 “若点 $M(a, b)$ 与点 $N(3, -1)$ 在直线 $x + y - 1 = 0$ 的同侧, 则 $a^2 + b^2 > 2$ ” 是假命题的一个点 M 的坐标为 _____.

(13) 已知函数 $f(x) = \sin x$, 若对任意的实数 $\alpha \in (-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6})$, 都存在唯一的实数 $\beta \in (0, m)$, 使 $f(\alpha) + f(\beta) = 0$, 则实数 m 的最大值是 _____.

(14) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x > 1, \\ x + \frac{a}{2}, & x \leq 1, \end{cases}$ 其中 $a > 0$, 且 $a \neq 1$.

(i) 当 $a = 2$ 时, 若 $f(x) < f(2)$, 则实数 x 的取值范围是 _____;

(ii) 若存在实数 m 使得方程 $f(x) - m = 0$ 有两个实根, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

(15) (本小题满分 13 分)

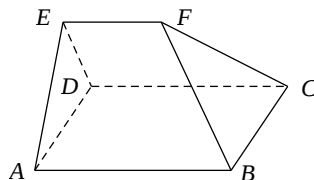
若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=1, c=\sqrt{6}$, 且 $\angle A$ 为锐角.

(I) 求 $\cos A$ 的值;

(II) 求 $\frac{\sin 2A}{\sin C}$ 的值.

(16) (本小题满分 14 分)

如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 是矩形, 平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$,
 $AB = 2AD = 2EF = 4, AE = DE = \sqrt{2}$.



(I) 求证: $AB \parallel EF$;

(II) 求直线 BF 与平面 ADE 所成角的正弦值;

(III) 求平面 BCF 与平面 ADE 所成锐二面角的余弦值.

(17) (本小题满分 13 分)

某汽车品牌为了了解客户对于其旗下的五种型号汽车的满意情况, 随机抽取了一些客户进行回访, 调查结果如下表:

汽车型号	I	II	III	IV	V
回访客户 (人数)	250	100	200	700	350
满意率	0.5	0.3	0.6	0.3	0.2

满意率是指: 某种型号汽车的回访客户中, 满意人数与总人数的比值.

假设客户是否满意互相独立, 且每种型号汽车客户对于此型号汽车满意的概率与表格中该型号汽车的满意率相等.

(I) 从所有的回访客户中随机抽取 1 人, 求这个客户满意的概率;

(II) 从 I 型号和 V 型号汽车的所有客户中各随机抽取 1 人, 设其中满意的人数为 ξ , 求 ξ 的分布列和期望;

(III) 用 “ $\eta_1=1$ ”, “ $\eta_2=1$ ”, “ $\eta_3=1$ ”, “ $\eta_4=1$ ”, “ $\eta_5=1$ ” 分别表示 I, II, III, IV, V 型号汽车让客户满意, “ $\eta_1=0$ ”, “ $\eta_2=0$ ”, “ $\eta_3=0$ ”, “ $\eta_4=0$ ”, “ $\eta_5=0$ ” 分别表示 I, II, III, IV, V 型号汽车让客户不满意. 写出方差 $D\eta_1, D\eta_2, D\eta_3, D\eta_4, D\eta_5$ 的大小关系.

(18) (本小题满分 13 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, \sqrt{2})$, 离心率为 $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$. 记椭圆 C 的右焦点为 F , 过点 F 且斜率为 k 的直线交椭圆于 P, Q 两点.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 若线段 PQ 的垂直平分线与 x 轴交于点 $M(x_0, 0)$, 求 x_0 的取值范围.

(19) (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + 2ax$.

(I) 若 $a = -1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 若 $f(x) \leq x$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.



长按识别关注

(20) (本小题满分 14 分)

已知集合 $A = \{x | x = 2n+1, n \in \mathbf{N}^*\}$, $B = \{x | x = 2^{n-1}, n \in \mathbf{N}^*\}$, $C = A \cup B$. 对于数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1$, 且对于任意 $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}^*$, 有 $a_n = \min\{x \in C | x > a_{n-1}\}$. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

(I) 写出 a_7 , a_8 的值;

(II) 数列 $\{a_n\}$ 中, 对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 存在 $k_n \in \mathbf{N}^*$, 使 $a_{k_n} = 2^{n-1}$, 求数列 $\{k_n\}$ 的通项公式;

(III) 数列 $\{a_n\}$ 中, 对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 存在 $k \in \mathbf{N}^*$, 有 $a_{k+1} = 2n+1$. 求使得 $S_{k+1} > 27a_{k+1}$ 成立的 k 的最小值.

数学试题答案

一、选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	B	C	B	C	A	B

二、填空题(本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

9. $-1-i$

10. $(2,0); y=\pm x$

11. -3

12. $(1,1)[\text{或}(\sqrt{2},0),(0,\sqrt{2}),(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})]$ (答案不唯一)

13. $\frac{3\pi}{4}$

14. $(-\infty,2); (0,1)\cup(1,2)$

三、解答题(本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。)

(15) (本小题满分 13 分)

解：因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{6} \times \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以 } \sin A = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

因为 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 为锐角，

$$\text{所以 } \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 1^2 + (\sqrt{6})^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = 3, \text{ 所以 } a = \sqrt{3}.$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 所以 } \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a}{c}.$$

$$\text{所以 } \frac{\sin 2A}{\sin C} = \frac{2 \sin A \cdot \cos A}{\sin C} = \frac{2a}{c} \cdot \cos A = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

(16) (本小题满分 14 分)

证明：(I) 在五面体 $ABCDEF$ 中，因为四边形 $ABCD$ 是矩形，

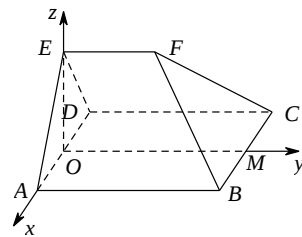
所以 $AB \parallel CD$.

因为 $AB \not\subset$ 平面 $CDEF$, $CD \subset$ 平面 $CDEF$,

所以 $AB \parallel$ 平面 $CDEF$.

因为 $AB \subset$ 平面 $ABFE$, 平面 $ABFE \cap$ 平面 $CDEF = EF$,

所以 $AB \parallel EF$4 分



(II) 取 AD 的中点 O , BC 的中点 M , 连接 OE, OM .

因为四边形 $ABCD$ 是矩形, 所以 $OM \perp AD$.

因为 $AE = DE = \sqrt{2}$, O 是 AD 的中点, 所以 $OE \perp AD$, 且 $OE = 1$.

因为平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $ADE \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $OE \subset$ 平面 ADE ,

所以 $OE \perp$ 平面 $ABCD$.

如图, 建立空间直角坐标系 $O-xyz$, 依题意得 $O(0,0,0), B(1,4,0), F(0,2,1)$.

所以 $\overrightarrow{BF} = (-1, -2, 1)$, 平面 ADE 的法向量为 $\mathbf{m} = (0, 1, 0)$.

设直线 BF 与平面 ADE 所成角为 α , 则

$$\sin \alpha = |\cos \langle \mathbf{m}, \overrightarrow{BF} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BF}|}{|\mathbf{m}| |\overrightarrow{BF}|} = \frac{|-2|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

所以直线 BF 与平面 ADE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

.....9 分

(III) 由 $C(-1, 4, 0)$, 得 $\overrightarrow{BC} = (-2, 0, 0)$.

设平面 BCF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则有

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -2x = 0, \\ -x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

令 $y = 1$, 则 $\mathbf{n} = (0, 1, 2)$.

因为平面 ADE 的法向量为 $\mathbf{m} = (0, 1, 0)$,

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

所以平面 BCF 与平面 ADE 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$14 分

(17) (本小题满分 13 分)

解: (I) 由题意知, 样本中的回访客户的总数是 $250+100+200+700+350=1600$,

满意的客户人数 $250 \times 0.5 + 100 \times 0.3 + 200 \times 0.6 + 700 \times 0.3 + 350 \times 0.2 = 555$,

故所求概率为 $\frac{555}{1600} = \frac{111}{320}$ 4 分

(II) $\xi = 0, 1, 2$.

设事件 A 为“从 I 型号汽车所有客户中随机抽取的人满意”,

事件 B 为“从 V 型号汽车所有客户中随机抽取的人满意”, 且 A 、 B 为独立事件.

根据题意, $P(A)$ 估计为 0.5, $P(B)$ 估计为 0.2.

则 $P(\xi = 0) = P(\bar{A}\bar{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = 0.5 \times 0.8 = 0.4$;

$$P(\xi = 1) = P(\bar{A}B + A\bar{B}) = P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) = P(A)(1 - P(B)) + (1 - P(A))P(B)$$
$$= 0.5 \times 0.8 + 0.5 \times 0.2 = 0.5$$
;

$P(\xi = 2) = P(AB) = P(A)P(B) = 0.5 \times 0.2 = 0.1$.

ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	0.4	0.5	0.1

ξ 的期望 $E(\xi) = 0 \times 0.4 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.1 = 0.7$ 11 分

(III) $D\eta_1 > D\eta_3 > D\eta_2 = D\eta_4 > D\eta_5$ 13 分

(18) (本小题满分 13 分)

解: (I) 由题意可知
$$\begin{cases} b = \sqrt{2}, \\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a^2 = 6, \\ b^2 = 2, \\ c^2 = 4. \end{cases}$$

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

..... 5 分

(II) 依题意, $F(2,0)$, 直线 PQ 的方程为 $y = k(x-2)$.

$$\text{联立方程组} \begin{cases} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1, \\ y = k(x-2). \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并整理得 } (3k^2+1)x^2 - 12k^2x + 12k^2 - 6 = 0.$$

$$\Delta = (-12k^2)^2 - 4(12k^2-6)(3k^2+1) = 24(k^2+1) > 0,$$

$$\text{设 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), \text{ 故 } x_1 + x_2 = \frac{12k^2}{3k^2+1}, y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) - 4k = \frac{-4k}{3k^2+1},$$

$$\text{设 } PQ \text{ 的中点为 } N, \text{ 则 } N\left(\frac{6k^2}{3k^2+1}, \frac{-2k}{3k^2+1}\right).$$

因为线段 PQ 的垂直平分线与 x 轴交于点 $M(x_0, 0)$,

① 当 $k=0$ 时, 那么 $x_0=0$;

$$\text{② 当 } k \neq 0 \text{ 时, } k_{MN} \cdot k = -1, \text{ 即 } \frac{\frac{-2k}{3k^2+1}}{\frac{6k^2}{3k^2+1} - x_0} \cdot k = -1.$$

$$\text{解得 } x_0 = \frac{4k^2}{3k^2+1} = \frac{4}{3+\frac{1}{k^2}}.$$

$$\text{因为 } k^2 > 0, \text{ 所以 } 3+\frac{1}{k^2} > 3, 0 < \frac{4}{3+\frac{1}{k^2}} < \frac{4}{3}, \text{ 即 } x_0 \in (0, \frac{4}{3}).$$

综上, x_0 的取值范围为 $[0, \frac{4}{3})$.

..... 13 分

(19) (本小题满分 13 分)

解: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$(I) a = -1 \text{ 时, } f(x) = \ln x + x^2 - 2x, f'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 2,$$

$$f'(1) = 1, \text{ 且 } f(1) = -1.$$

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - (-1) = x - 1$, 即 $x - y - 2 = 0$. …… 5 分

(II) 若 $f(x) \leq x$ 恒成立, 即 $f(x) - x \leq 0$ 恒成立.

设 $g(x) = f(x) - x = \ln x - ax^2 + (2a-1)x$, 只要 $g(x)_{\max} \leq 0$ 即可;

$$g'(x) = \frac{-2ax^2 + (2a-1)x + 1}{x}.$$

①当 $a = 0$ 时, 令 $g'(x) = 0$, 得 $x = 1$.

$x, g'(x), g(x)$ 变化情况如下表:

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	极大值	↘

所以 $g(x)_{\max} = g(1) = -1 < 0$, 故满足题意.

②当 $a > 0$ 时, 令 $g'(x) = 0$, 得 $x = -\frac{1}{2a}$ (舍) 或 $x = 1$;

$x, g'(x), g(x)$ 变化情况如下表:

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	极大值	↘

所以 $g(x)_{\max} = g(1) = a - 1$, 令 $a - 1 \leq 0$, 得 $0 < a \leq 1$.

③当 $a < 0$ 时, 存在 $x = 2 - \frac{1}{a} > 1$, 满足 $g(2 - \frac{1}{a}) = \ln(2 - \frac{1}{a}) > 0$, 所以 $f(x) < 0$ 不能恒成立, 所以 $a < 0$ 不满足题意.

综上, 实数 a 的取值范围为 $[0,1]$.

…… 13 分

(20) (本小题满分 14 分)

解: (I) $A = \{x | x = 2n + 1, n \in \mathbf{N}^*\} = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots, 2n + 1, \dots\}$,

$$B = \{x | x = 2^{n-1}, n \in \mathbf{N}^*\} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots, 2^{n-1}, \dots\},$$

$$C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 16, \dots\}.$$

因为 $a_1 = 1$ ，且对于任意 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$ ， $a_n = \min\{x \in C | x > a_{n-1}\}$ ，

所以 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 5, a_6 = 7, a_7 = 8, a_8 = 9$. …… 4 分

(II) 对于任意 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$ ，有 $a_n = \min\{x \in C | x > a_{n-1}\}$ ，

所以对于任意 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$ ，有 $a_n > a_{n-1}$ ，即数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列.

因为对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ，存在 $k_n \in \mathbf{N}^*$ ，使 $a_{k_n} = 2^{n-1}$ ，

所以 $k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < \dots$.

因为 $a_{k_n} = 2^{n-1}$ ， $a_{k_{n+1}} = 2^n$ ，所以对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ，有 $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 4$ ，所以，当 $n \geq 2$ 时，有

$$k_{n+1} - k_n = \frac{2^n - 2^{n-1}}{2} + 1 = 2^{n-2} + 1,$$

$$\text{即 } k_3 - k_2 = 2^0 + 1,$$

$$k_4 - k_3 = 2^1 + 1,$$

$$k_5 - k_4 = 2^2 + 1,$$

……………

$$k_n - k_{n-1} = 2^{n-3} + 1,$$

所以当 $n \geq 3$ 时，

$$\text{有 } k_n - k_2 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-3} + (n-2) = \frac{1-2^{n-2}}{1-2} + (n-2) = 2^{n-2} + n - 3 (n \geq 3),$$

$$\text{所以 } k_n = 2^{n-2} + n - 1 (n \geq 3).$$

$$\text{又 } k_1 = 1, k_2 = 2,$$

$$\text{数列 } \{k_n\} \text{ 的通项公式为: } k_n = \begin{cases} 1, & n=1, \\ 2^{n-2} + n - 1, & n \geq 2 \end{cases}. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

(III) 若 $\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists k \in \mathbf{N}^*$ ，有 $a_{k+1} = 2n+1$ ，

令 $2^{m-1} \leq 2n$, $m \in \mathbf{N}^*$, 解得 $m-1 \leq \log_2(2n)$, 即 $m \leq \log_2 n + 2$,

得 $m_{\max} = [\log_2 n + 2] = [\log_2 n] + 2$, 其中 $[\log_2 n + 2]$ 表示不超过 $\log_2 n + 2$ 的最大整数,

所以 $k+1 = n + m_{\max} = n + ([\log_2 n] + 2)$, $k = n + ([\log_2 n] + 1)$.

$$S_{k+1} = [3+5+7+\cdots+(2n+1)] + [1+2+\cdots+2^{[\log_2 n]+1}] = n(n+2) + (2^{[\log_2 n]+2} - 1),$$

依题意 $S_{k+1} > 27a_{k+1}$,

$$n(n+2) + 2^{[\log_2 n]+2} - 1 > 27(2n+1),$$

$$\text{即 } n^2 - 52n - 28 + 2^{[\log_2 n]+2} > 0,$$

$$(n-26)^2 + 4 \times 2^{[\log_2 n]} > 704.$$

当 $[\log_2 n] = 0$ 时, 即 $n = 1$ 时, $(n-26)^2 + 4 \times 2^{[\log_2 n]} = 629 < 704$, 不合题意;

当 $[\log_2 n] = 1$ 时, 即 $n = 2, 3$ 时, $(n-26)^2 + 4 \times 2^{[\log_2 n]} \leq 24^2 + 8 < 704$, 不合题意;

当 $[\log_2 n] = 2$ 时, 即 $4 \leq n \leq 7$ 时, $(n-26)^2 + 4 \times 2^{[\log_2 n]} \leq 22^2 + 16 < 704$, 不合题意;

当 $[\log_2 n] = 3$ 时, 即 $8 \leq n \leq 15$ 时, $(n-26)^2 + 4 \times 2^{[\log_2 n]} \leq 18^2 + 4 \times 8 < 704$, 不合题意;

当 $[\log_2 n] = 4$ 时, 即 $16 \leq n \leq 31$ 时, $(n-26)^2 + 4 \times 2^{[\log_2 n]} \leq 10^2 + 4 \times 16 < 704$, 不合题意;

当 $[\log_2 n] = 5$ 时, 即 $32 \leq n \leq 63$ 时,

$$\text{由 } (n-26)^2 + 4 \times 2^{[\log_2 n]} \leq 37^2 + 4 \times 32 = 1497, 1497 > 704,$$

此时, $(n-26)^2 > 576$.

而 $n = 50$ 时, $(n-26)^2 = 576$. 所以 $n > 50$.

$$\text{又当 } n = 51 \text{ 时, } (51-26)^2 + 4 \times 2^{[\log_2 51]} = 753 > 704;$$

$$\text{所以 } k = n + [\log_2 n] + 1 \geq 51 + [\log_2 51] + 1 = 51 + 5 + 1 = 57.$$

综上所述, 符合题意的 k 的最小值为 $k = 57$.

…… 14 分