

2018 北京临川学校高二（下）期末

数 学（理）

注：本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟

一选择题：（每题 5 分，共 12 题，共 60 分）

1. 下列各函数中，与 $y = x$ 表示同一函数的是（ ）

A. $y = \frac{x^2}{x}$ B. $y = \sqrt{x^2}$ C. $y = (\sqrt{x})^2$ D. $y = \sqrt[3]{x^3}$

2. 设集合 $A = \left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 2\right\}$, $B = \{x \mid x^2 \leq 1\}$, 则 $A \cup B =$ （ ）

A. $\{x \mid -1 \leq x < 2\}$ B. $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x \leq 1\right\}$ C. $\{x \mid x < 2\}$ D. $\{x \mid 1 \leq x < 2\}$

3. 已知命题 $p: \forall x \in R, 2x^2 + 1 > 0$, 则（ ）

A. $\neg p: \exists x \in R, 2x^2 + 1 \leq 0$ B. $\neg p: \forall x \in R, 2x^2 + 1 \leq 0$
C. $\neg p: \exists x \in R, 2x^2 + 1 < 0$ D. $\neg p: \forall x \in R, 2x^2 + 1 < 0$

4. 已知集合 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $B = \{(x, y) \mid y = x\}$, 则 $A \cap B$ 的真子集个数为（ ）

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5 设 $a = 2^{0.5}$, $b = 0.5^2$, $c = \log_2 0.5$, 则 a, b, c 的大小关系为

A. $c > a > b$ B. $c > b > a$ C. $a > b > c$ D. $b > a > c$

6. 已知 $p: x^2 - x < 0$, 那么命题 p 的一个必要不充分条件是（ ）

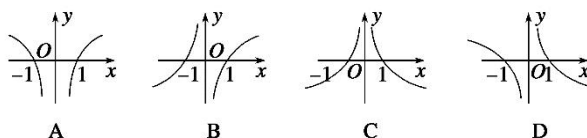
A. $0 < x < 1$ B. $-1 < x < 1$ C. $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{2} < x < 2$

7. 函数 $y = x^2 \lg \frac{x-2}{x+2}$ 的图像（ ）

A. 关于 x 轴对称 B. 关于原点对称
C. 关于直线 $y = x$ 对称 D. 关于 y 轴对称

8. 已知函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, \varphi \in R$), 则 “ $f(x)$ 是奇函数” 是 “ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ” 的 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 函数 $y = \frac{x \ln |x|}{|x|}$ 的图像可能是 ()



10. 若命题 “ $\exists x_0 \in R, x_0^2 + (a-1)x_0 + 1 < 0$ ” 是真命题, 则实数 a 的取值范围是 ()
- A. $[-1, 3]$ B. $(-1, 3)$ C. $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a-2 & x \geq 2, \\ \frac{1}{2}x-1 & x < 2 \end{cases}$ 满足对任意的实数 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, \frac{13}{8}]$
C. $(-\infty, 2]$ D. $[\frac{13}{8}, 2)$

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ $g(x) = x^2 f(x-1)$, 则函数 $g(x)$ 的递减区间是 ()

- A. $(0, 1]$ B. $[0, \frac{1}{2})$
C. $(0, 2]$ D. $[0, 1)$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题 (每题 5 分、共 4 题, 共 20 分)

13. 已知全集 $U=R$, 集合 $A=\{x|x+2 < 0\}$, $B=\{x|x-5 < 0\}$, 那么集合 $(C_U A) \cap B$ 等于_____.
14. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, 若对于任意的实数 $x \geq 0$, 都有 $f(x+2) = f(x)$, 且当 $x \in [0, 2)$ 时, $f(x) = \log_2(x+1)$, 则 $f(-2015) + f(2016)$ 的值为_____.
15. 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + \ln(x+1)$ 的定义域为_____.
16. 定义一种集合运算 $A \otimes B = \{x | x \in (A \cup B), \text{ 且 } x \notin (A \cap B)\}$, 设 $M = \{x | |x| < 2\}$,

$N = \{x \mid x^2 - 4x + 3 < 0\}$, 则 $M \otimes N$ 用区间表示为_____.

三、解答题 (共 6 题, 其中 17 题 10 分, 18-22 每题 12 分, 计 70 分)

17. (本题满分 10 分) 设函数
$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x < 1 \\ \log_4 x, & x \geq 1 \end{cases}$$

(1) 求 $f(-1), f(0), f(2), f(4)$ 的值; (2) 求不等式 $f(x) \leq 2$ 的解集.

18. (本题满分 12 分)

已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x \mid mx + 1 = 0\}$, 且 $A \cup B = A$, 求实数 m 的值组成的集合.

19. (本题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \log_4(ax^2 + 2x + 3)$.

(1) 若 $f(1) = 1$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 是否存在实数 a , 使 $f(x)$ 的最小值为 0? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 请说明理由.

20. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = 4x^2 - kx - 8$.

(1) 若函数 $y = f(x)$ 在区间 $[2, 10]$ 上单调, 求实数 k 的取值范围;

(2) 若 $y = f(x)$ 在区间 $(-\infty, 2]$ 上有最小值 -12 , 求实数 k 的值

21. (本题满分 12 分) 已知命题 p : 曲线 $y = x^2 + (2m - 3)x + 1$ 与 x 轴没有交点; 命题 q : 函数 $f(x) = -(5 - 2m)^x$ 是减函数. 若 p 或 q 为真命题, p 且 q 为假命题, 则实数 m 的取值范围.

22. (12 分) 已知函数 $f(x)$ 对任意实数 x, y 恒有 $f(x + y) = f(x) + f(y)$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$, 且 $f(1) = -2$.

(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-3, 3]$ 上的最大值;

(3) 解关于 x 的不等式 $f(ax^2) - 2f(x) < f(ax) + 4$.

2018 北京临川学校高二（下）期末数学（理）参考答案

一、DAAD CBBB BDBD

二、13. $\{x \mid -2 \leq x < 5\}$ 14. -1 15. $(-1, 2)$ 16. $(-2, 1] \cup [2, 3)$

三、17. 解：(1) $f(-1)=2; f(0)=1; f(2)=1/2; f(4)=1$.

(2) $[-1, 16]$

18. 解 $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$,

$\because A \cup B = A, \therefore B \subseteq A$.

①当 $m=0$ 时, $B=\emptyset, B \subseteq A$, 故 $m=0$;

②当 $m \neq 0$ 时, 由 $mx+1=0$, 得 $x = -\frac{1}{m}$.

$\because B \subseteq A$,

$\therefore -\frac{1}{m}=2$ 或 $-\frac{1}{m}=3$, 得 $m = -\frac{1}{2}$ 或 $m = -\frac{1}{3}$.

$\therefore$ 实数 m 的值组成的集合为 $\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\}$.

19. 解 (1) 因为 $f(1)=1$, 所以 $\log_4(a+5)=1$,

因此 $a+5=4, a=-1$,

这时 $f(x) = \log_4(-x^2+2x+3)$.

由 $-x^2+2x+3>0$ 得 $-1 < x < 3$,

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 3)$.

令 $g(x) = -x^2+2x+3$,

则 $g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上递增, 在 $(1, 3)$ 上递减

又 $y = \log_4 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-1, 1)$,

递减区间是 $(1, 3)$.

(2) 假设存在实数 a , 使 $f(x)$ 的最小值为 0,

则 $h(x) = ax^2+2x+3$ 应有最小值 1,

$$\text{即} \begin{cases} a > 0, \\ \frac{3a-1}{a} = 1, \end{cases} \quad \text{解得 } a = \frac{1}{2}.$$

故存在实数 $a = \frac{1}{2}$ 使 $f(x)$ 的最小值为 0.

20. (解: 易得函数 $f(x) = 4x^2 - kx - 8$ 的图像的对称轴为 $x = \frac{k}{8}$.)

(1) 若 $y=f(x)$ 在区间 $[2, 10]$ 上单调递增, 则 $\frac{k}{8} \leq 2$,

解得 $k \leq 16$;

若 $y=f(x)$ 在区间 $[2, 10]$ 上单调递减, 则 $\frac{k}{8} \geq 10$,

解得 $k \geq 80$.

所以实数 k 的取值范围为 $(-\infty, 16] \cup [80, +\infty)$.

(2) 当 $\frac{k}{8} \leq 2$, 即 $k \leq 16$ 时, $f(x)_{\min} = f\left(\frac{k}{8}\right) = -12$,

解得 $k=8$ 或 $k=-8$, 符合题意;

当 $\frac{k}{8} > 2$, 即 $k > 16$ 时, $f(x)_{\min} = f(2) = -12$,

解得 $k=10$, 不符合题意.

所以实数 k 的值为 8 或 -8.

21. p: $1/2 < m < 5/2$

q: $m < 2$

$\because p \wedge q$ 为真, $p \vee q$ 为假

$\therefore p, q$ 一真一假

(1) p 真 q 假时, $2 \leq m < 5/2$ 或 (2) p 假 q 真时, $m \leq 1/2$

故 $m \in (-\infty, 1/2] \cup [2, 5/2) \dots\dots\dots 12$ 分

22. 解 (1) 取 $x=y=0$, 则 $f(0+0)=2f(0)$,

$\therefore f(0)=0$.

取 $y=-x$, 则 $f(x-x)=f(x)+f(-x)$,

$\therefore f(-x)=-f(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 任取 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$,

则 $x_2 - x_1 > 0$.

$\therefore f(x_2) + f(-x_1) = f(x_2 - x_1) < 0$,

$\therefore f(x_2) < -f(-x_1)$.

又 $\because f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(x_1) > f(x_2)$.

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数.

$\therefore$ 对任意 $x \in [-3, 3]$, 恒有 $f(x) \leq f(-3)$.

$\because f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 3f(1)$

$= -2 \times 3 = -6$,

$$\therefore f(-3) = -f(3) = 6,$$

$\therefore f(x)$ 在 $[-3, 3]$ 上的最大值为 6.

(3) $\because f(x)$ 为奇函数,

$$\therefore \text{整理原不等式得 } f(ax^2) + f(-2x) < f(ax) + f(-2),$$

$$\text{进一步可得 } f(ax^2 - 2x) < f(ax - 2).$$

$$\because f(x) \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 上是减函数, } \therefore ax^2 - 2x > ax - 2,$$

$$\text{即 } (ax - 2)(x - 1) > 0.$$

$$\therefore \text{当 } a = 0 \text{ 时, } x \in (-\infty, 1);$$

$$\text{当 } a = 2 \text{ 时, } x \in \{x \mid x \neq 1 \text{ 且 } x \in \mathbf{R}\};$$

$$\text{当 } a < 0 \text{ 时, } x \in \{x \mid \frac{2}{a} < x < 1\};$$

$$\text{当 } 0 < a < 2 \text{ 时, } x \in \{x \mid x > \frac{2}{a} \text{ 或 } x < 1\};$$

$$\text{当 } a > 2 \text{ 时, } x \in \{x \mid x < \frac{2}{a} \text{ 或 } x > 1\}.$$

综上所述, 当 $a = 0$ 时, $x \in (-\infty, 1)$;

$$\text{当 } a = 2 \text{ 时, } x \in \{x \mid x \neq 1 \text{ 且 } x \in \mathbf{R}\};$$

$$\text{当 } a < 0 \text{ 时, } x \in \{x \mid \frac{2}{a} < x < 1\};$$

$$\text{当 } 0 < a < 2 \text{ 时, } x \in \{x \mid x > \frac{2}{a} \text{ 或 } x < 1\};$$

$$\text{当 } a > 2 \text{ 时, } x \in \{x \mid x < \frac{2}{a} \text{ 或 } x > 1\}.$$