# 高三考试数学试卷

**注意事项：**

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

4. 本试卷主要考试内容：集合、常用逻辑用语、不等式、函数、导数、三角函数、解三角形、复数、平面向量。

## 一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{-1,3,7\}$，$B=\{4,7\}$，$C=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 6\}$，则 $(A\cup B)\cap C=$

A. $\{-1,3\}$　　B. $\{-1,3,4\}$

C. $\{3,4,7\}$　　D. $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 6\}$

2. 命题"$\exists n\in\mathbf{N}$，$\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{2}$"的否定为

A. $\forall n\in\mathbf{N}$，$\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{2}$　　B. $\forall n\in\mathbf{N}$，$\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{2}$

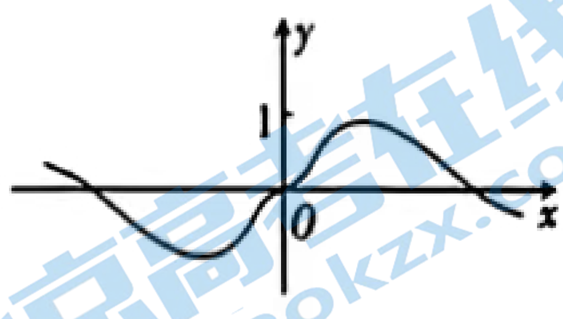
C. $\exists n\in\mathbf{N}$，$\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{2}$　　D. $\exists n\notin\mathbf{N}$，$\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{2}$

3. 已知复数 $z$ 满足 $z(1+3\mathrm{i})=4+\mathrm{i}$，则 $z=$

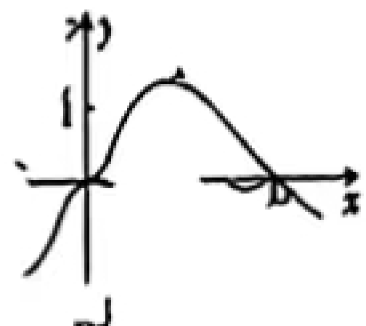
A. $-\frac{1}{8}-\frac{11}{8}\mathrm{i}$　　B. $-\frac{1}{8}+\frac{11}{8}\mathrm{i}$

C. $\frac{7}{10}+\frac{11}{10}\mathrm{i}$　　D. $\frac{7}{10}-\frac{11}{10}\mathrm{i}$

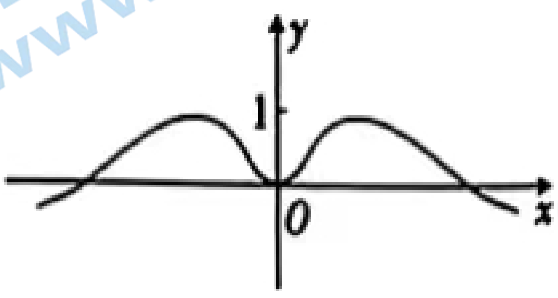
4. 函数 $f(x)=\frac{2x\sin x}{x^2+1}$ 在区间 $[-4,4]$ 上的大致图象是



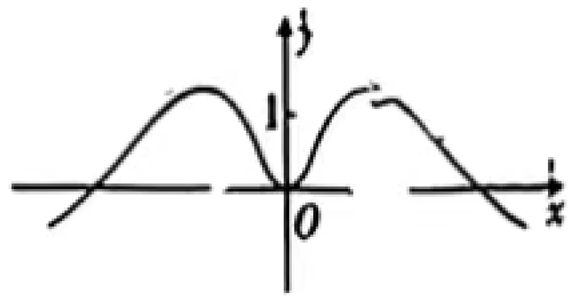
A



B



C



D

5. 某质点的位移 $y$(单位：m)与时间 $t$(单位：s)满足函数关系式 $y=t^3+3t^2-t$，当 $t=t_0$ 时，该质点的瞬时速度大于 8 m/s，则 $t_0$ 的取值范围是

A. $(\frac{1}{3},+\infty)$ B. $(1,+\infty)$ C. $(\frac{1}{2},+\infty)$ D. $(\frac{3}{2},+\infty)$

6. 在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FA}$，$E$ 是边 $AB$ 的中点，$EF$ 与 $AD$ 交于点 $P$，若$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，则 $m+n=$

A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{6}{7}$ D. 1

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2\times 3^x-a-5, x<0,\\ \ln(x^2-4x-a), x\geqslant 0,\end{cases}$ 则“$-5<a<-3$”是“$f(x)$有 3 个零点”的

A. 充要条件 B. 必要不充分条件

C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 若函数 $f(x)=2\sin(\omega x-\frac{\pi}{3})(\omega>0)$在$(0,\pi)$内恰好存在 8 个 $x_0$，使得$|f(x_0)|=1$，则 $\omega$ 的取值范围为

A. $[\frac{19}{6},\frac{7}{2})$ B. $(\frac{19}{6},\frac{7}{2}]$ C. $[\frac{7}{2},\frac{25}{6})$ D. $(\frac{7}{2},\frac{25}{6}]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知向量$\overrightarrow{OA}=(1,2)$，$\overrightarrow{AB}=(-3,1)$，$\overrightarrow{OC}=(m,4)$，$OA\perp OC$，则

A. $\overrightarrow{OB}=(-2,3)$ B. $\overrightarrow{AC}=(9,2)$

C. $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}|=\sqrt{34}$ D. $\overrightarrow{OB}$在$\overrightarrow{OC}$上的投影向量为$\frac{7}{40}\overrightarrow{OC}$

10. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$满足 $f(xy)=f(x)f(y)-f(x)-f(y)+2$，$f(0)<2$，$f(0)\neq f(1)$，且 $f(x)>0$，则

A. $f(0)=1$ B. $f(-1)=2$

C. $f(-x)=2f(x)$ D. $f(-x)=f(x)$

11. 若函数 $f(x)=\sin^2x+a\sin 2x$ 的最小值为 $m$，则

A. 当 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$f(x)$的图象关于点$(\frac{\pi}{12},0)$对称

B. 当 $a=1$ 时，$m=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

C. 存在实数 $a$ 与 $m$，使得 $a^2+m^2=1$

D. 当 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，将曲线 $y=f(x)$向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，得到曲线 $y=\frac{1}{2}+\cos(2x-\frac{\pi}{6})$

12. 已知实数 $a,b,c$ 满足 $c>1$，且 $c^2+ab=c+abc$，则下列结论正确的是

A. $|a|+|b|>2$

B. 若 $c=a+b$，则 $3a+4b$ 的最小值为 $7+4\sqrt{3}$

C. $\log_2|a|+\log_2|b|-\log_2(1+c^2)$的最大值为$-1$

D. 若 $4c^2-a^4-b^4=6$，则 $c$ 的最小值为$\sqrt{3}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．把答案填在答题卡中的横线上．

13. 已知一个扇形的圆心角为$\frac{\pi}{9}$，弧长为$\frac{\pi}{3}$，则该扇形的面积为___▲___．

14. 若函数$f(x)=x+\frac{2}{x}+1$，$f(\lg m)=6$，$f(\lg 2+\lg n)=4$，则$f(\lg\frac{1}{m})=$___▲___，$n$的值为___▲___．

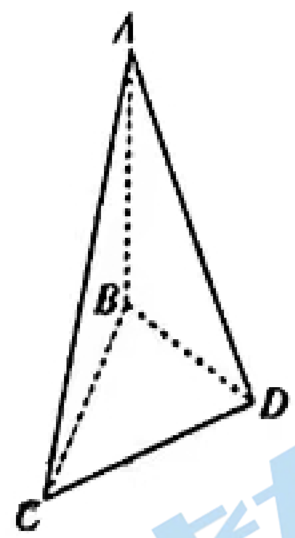
15. $a,b,c$分别为$\triangle ABC$内角$A,B,C$的对边．已知$a^2+b^2=\frac{5}{2}c^2$，则$\cos C$的最小值为___▲___．

16. 已知函数$f(x)$，$g(x)$的导函数都存在，若$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)<10x$，且$f(2)g(2)-f(1)g(1)$为整数，则$f(2)g(2)-f(1)g(1)$的可能取值的最大值为___▲___．

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．(10分)

山东省滨州市的黄河楼位于新湖水面内东南方向的东关岛上，渤海五路以西，南环路以北．整个黄河楼颜色质感为灰红，意味黄河楼气势恢宏，更在气势上体现黄河的宏壮．如图，小张为了测量黄河楼的实际高度$AB$，选取了与楼底$B$在同一水平面内的两个测量基点$C,D$，现测得$\angle BCD=30^\circ$，$\angle BDC=95^\circ$，$CD=116$ m，在点$D$处测得黄河楼顶$A$的仰角为$45^\circ$，求黄河楼的实际高度(结果精确到0.1 m，取$\sin 55^\circ=0.82$)．




18．(12分)

已知函数$f(x)=2x^3-ax+7$．

(1)求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程．

(2)证明：(1)中的切线经过定点．

(3)若$f(x)$在$(1,+\infty)$上有极值，求$a$的取值范围，并指出该极值是极大值还是极小值．

19.（12 分）

已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$的图象经过点 $A(\frac{\pi}{3},-2)$，且 $f(x)$图象上相邻的两条对称轴之间的距离是$\frac{\pi}{2}$.

(1)求 $f(x)$的单调递增区间；

(2)若$\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$|f(x)-m|\leqslant 2$，求 $m$ 的取值范围.

20.（12 分）

已知 $p(\alpha)=[\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)]^2-3\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)$.

(1)设 $p(\alpha)=2$，求 $\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})$的值；

(2)若 $\sin\alpha$ 是方程 $x^4+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{81}=\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{27}x$ 的实根，且 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，求 $p(\alpha)$的值.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=2^{1+ax}-x(a\neq 0)$.

(1)若 $a=-1$，求 $f(x)$在$[-1,1]$上的值域；

(2)若函数 $y=f(f(x))-x$ 恰有两个零点，求 $a$ 的取值范围.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=x(a+\ln x)$.

(1)讨论函数 $y=f(-x)$的单调性；

(2)若 $a=0$，证明：$\forall x\in(1,+\infty)$，$2\ln x f(\ln x)<x$（提示：$e^4>54$）ɔ4>54>54>54>54

# 高三考试数学试卷参考答案

1. B　因为 $A\cup B=\{-1,3,4,7\}$，所以 $(A\cup B)\cap C=\{-1,3,4\}$.

2. A　存在量词命题的否定是全称量词命题.

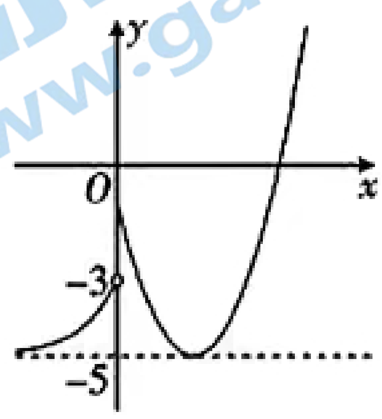
3. D　由题意可得 $z=\frac{4+i}{1+3i}=\frac{(4+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{4-12i+i-3i^2}{1-9i^2}=\frac{7}{10}-\frac{11}{10}i$.

4. C　因为 $f(-x)=\frac{2(-x)\sin(-x)}{(-x)^2+1}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，故而排除 A，B；因为当 $0<x<\pi$ 时，$f(x)=\frac{2x\sin x}{x^2+1}\leqslant\frac{2x\sin x}{2x}=\sin x\leqslant 1$，所以 $f(x)<1$，故选 C.

5. B　$y'=3t^2+6t-1$，因为当 $t=t_0$ 时，该质点的瞬时速度大于 8 m/s，所以 $3t_0^2+6t_0-1>8$，显然 $t_0$ 不是负数，所以 $t_0>1$.

6. A　因为 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$，所以 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. 因为 $A$，$P$，$D$ 三点共线，所以 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\lambda\overrightarrow{AC}$. 因为 $\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FA}$，所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. 因为 $E$ 是边 $AB$ 的中点，所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. 因为 $E$，$P$，$F$ 三点共线，所以 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AE}+(1-k)\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}k\overrightarrow{AB}+\frac{1-k}{3}\overrightarrow{AC}$，则 $\begin{cases}\frac{2}{3}\lambda=\frac{1}{2}k,\\ \frac{1}{3}\lambda=\frac{1-k}{3},\end{cases}$ 解得 $k=\frac{4}{7}$，从而 $m=\frac{2}{7}$，$n=\frac{1}{7}$，故 $m+n=\frac{3}{7}$.

7. B　由 $f(x)=0$，得 $a=\begin{cases}2\times 3^x-5, x<0,\\ x^2-4x-1, x\geqslant 0,\end{cases}$ 作出函数 $g(x)=\begin{cases}2\times 3^x-5, x<0,\\ x^2-4x-1, x\geqslant 0\end{cases}$ 的图象，如图所示. 由图可知，当 $a\in(-5,-3)$ 时，直线 $y=a$ 与 $g(x)$ 的图象有 3 个交点.



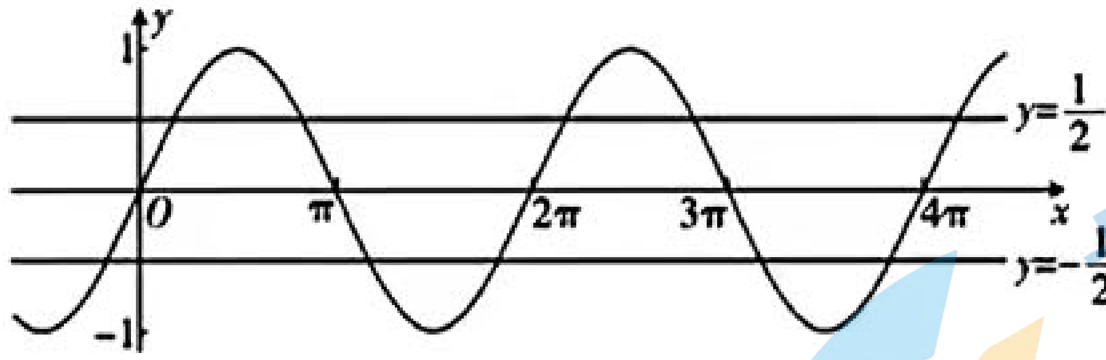

因为 $x^2-4x-a>0$ 对 $x\geqslant 0$ 恒成立，所以 $(x-2)^2-4>a$ 对 $x\geqslant 0$ 恒成立，所以 $a<-4$.

故当 $f(x)$ 有 3 个零点时，$a\in(-5,-4)$. 所以“$-5<a<-3$”是“$f(x)$ 有 3 个零点”的必要不充分条件.

8. D　由 $|f(x_0)|=1$，得 $\sin(\omega x_0-\frac{\pi}{3})=\pm\frac{1}{2}$，

因为 $x\in(0,\pi)$，$\omega>0$，所以 $\omega x-\frac{\pi}{3}\in(-\frac{\pi}{3},\omega\pi-\frac{\pi}{3})$，

依题意可得，$\frac{19\pi}{6}<\omega\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{23\pi}{6}$，解得 $\omega\in(\frac{7}{2},\frac{25}{6}]$.




9. AC　$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(-2,3)$，A 正确. 因为 $OA\perp OC$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=m+8=0$，则 $m=-8$，所以 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-9,2)$，B 错误. 因为 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}=(5,-3)$，所以 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}|=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$，C 正确. $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 上的投影向量为 $\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}\cdot\frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}=\frac{16+12}{(-8)^2+4^2}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{7}{20}\overrightarrow{OC}$，D 错误.

10. ABD　令 $x=y=0$，得 $f(0)=[f(0)]^2-2f(0)+2$，因为 $f(0)<2$，所以 $f(0)=1$. 令 $x=y=1$，得 $f(1)=[f(1)]^2-2f(1)+2$，因为 $f(0)\neq f(1)$，所以 $f(1)=2$. 令 $x=y=-1$，得 $f(1)=[f(-1)]^2-2f(-1)+2$，即 $[f(-1)]^2=2f(-1)$，因为 $f(x)>0$，所以 $f(-1)>0$，所以 $f(-1)=2$. 令 $y=-1$，得 $f(-x)=f(-1)f(x)-f(-1)-f(x)+2$，则 $f(-x)=2f(x)-2-f(x)+2$，即 $f(-x)=f(x)$.

11. BCD　当 $a=1$ 时，$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}+\sin 2x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2x+\varphi)$，则 $m=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，所以 B 正确.

当 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}+\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，则 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{12},\frac{1}{2})$ 对称，所以 A 错误. 当 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$m=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$，此时 $a^2+m^2=1$，所以 C 正确. 当 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，将曲线 $y=\frac{1}{2}+\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到曲线 $y=\frac{1}{2}+\sin(2x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})$，因为 $\sin(2x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})=\cos(2x-\frac{\pi}{6})$，所以 D 正确.

12. ABD　因为 $c^2+ab=c+abc$，所以 $c(c-ab)-(c-ab)=0$，即 $(c-ab)(c-1)=0$，因为 $c>1$，所以 $c=ab>1$，则 $|a|+|b|\geqslant 2\sqrt{|ab|}>2$，所以 $|a|+|b|>2$，A 正确. 若 $c=a+b>1$，则 $ab=a+b$，且 $a,b$ 均为正数，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，则 $3a+4b=(3a+4b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=\frac{3a}{b}+\frac{4b}{a}+7\geqslant 2\sqrt{\frac{3a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}+7=7+4\sqrt{3}$，当且仅当 $\frac{3a}{b}=\frac{4b}{a}$，即 $a=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$，$b=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ 时，等号成立，则 $3a+4b$ 的最小值为 $7+4\sqrt{3}$，B 正确. 因为 $c=ab>1$，所以 $\log_2|a|+\log_2|b|-\log_2(1+c^2)=\log_2\frac{|ab|}{1+c^2}=\log_2\frac{c}{1+c^2}=\log_2\frac{1}{\frac{1}{c}+c}$，因为 $c>1$，所以 $\frac{1}{c}+c>2$，所以 $\log_2|a|+\log_2|b|-\log_2(1+c^2)<\log_2\frac{1}{2}=-1$，C 错误. 由 $4c^2-a^4-b^4=6$，得 $4c^2=a^4+b^4+6\geqslant 2\sqrt{a^4b^4}+6=$

$2a^2b^2+6=2c^2+6$，则 $c^2\geqslant 3$，由 $c>1$，得 $c\geqslant\sqrt{3}$，则 $c$ 的最小值为 $\sqrt{3}$，D 正确.

13. $\frac{\pi}{2}$　因为 $r=\frac{l}{|\alpha|}=3$，所以该扇形的面积为 $\frac{1}{2}lr=\frac{\pi}{2}$.

14. $-4$；5 或 50　因为 $f(x)=x+\frac{2}{x}+1$，所以 $f(-x)=-x-\frac{2}{x}+1$，所以 $f(x)+f(-x)=2$，所以 $f(\lg\frac{1}{m})=f(-\lg m)=2-6=-4$. 由 $f(x)=x+\frac{2}{x}+1=4$，解得 $x=1$ 或 2，所以 $\lg 2+\lg n=\lg(2n)=1$ 或 2，所以 $2n=10$ 或 100，所以 $n$ 的值为 5 或 50.

15. $\frac{3}{5}$　由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-\frac{2}{5}(a^2+b^2)}{2ab}=\frac{\frac{3}{5}(a^2+b^2)}{2ab}\geqslant\frac{\frac{3}{5}\times 2ab}{2ab}=\frac{3}{5}$.

16. 14　由 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)<10x$，得 $[f(x)g(x)]'<(5x^2)'$.

设函数 $h(x)=f(x)g(x)-5x^2$，则 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-10x<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(1)>h(2)$，即 $f(1)g(1)-5\times 1^2>f(2)g(2)-5\times 2^2$，则 $f(2)g(2)-f(1)g(1)<15$. 因为 $f(2)g(2)-f(1)g(1)$ 为整数，所以 $f(2)g(2)-f(1)g(1)$ 的可能取值的最大值为 14.

17. 解：$\angle CBD=180^\circ-\angle BCD-\angle BDC=55^\circ$，…………………………………… 1 分

在△$BCD$ 中，由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$，…………………………… 4 分

则 $BD=\frac{CD\sin\angle BCD}{\sin\angle CBD}=\frac{116\times\sin 30^\circ}{\sin 55^\circ}=\frac{58}{0.82}\approx 70.73$ m. …………………………… 7 分

在 Rt△$ABD$ 中，$AB\perp BD$，$\angle ADB=45^\circ$，…………………………………… 8 分

所以 $AB=BD\tan\angle ADB=BD\approx 70.73$ m，

故黄河楼的实际高度约为 70.7 m. …………………………………………………… 10 分

18. (1)解：$f'(x)=6x^2-a$，…………………………………………………………… 1 分

则 $f'(1)=6-a$. ………………………………………………………………………… 2 分

又 $f(1)=9-a$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(9-a)=(6-a)(x-1)$，

即 $y=(6-a)x+3$. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)证明：令 $x=0$，得 $y=3$，…………………………………………………………… 5 分

所以(1)中的切线经过定点，且定点的坐标为 $(0,3)$. ……………………………… 6 分

(3)解：因为 $f'(x)=6x^2-a$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，……………………………… 7 分

所以 $f'(1)=6-a<0$，……………………………………………………………………… 9 分

解得 $a>6$，即 $a$ 的取值范围为 $(6,+\infty)$. ………………………………………… 10 分

当 $1<x<\sqrt{\frac{a}{6}}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\sqrt{\frac{a}{6}}$ 时，$f'(x)>0$. ……………………… 11 分

所以 $f(x)$ 在 $x=\sqrt{\frac{a}{6}}$ 处取得极小值，即 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有极小值. ……… 12 分

19. 解：(1)由题意可得 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$，则 $\omega=2$. ……………………… 2 分

因为 $f(x)$ 的图象经过点 $A(\frac{\pi}{3},-2)$，所以 $f(\frac{\pi}{3})=2\cos(2\times\frac{\pi}{3}+\varphi)=-2$，

所以 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=2k_1\pi+\pi(k_1\in\mathbf{Z})$，解得 $\varphi=2k_1\pi+\frac{\pi}{3}(k_1\in\mathbf{Z})$.

因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………… 4 分

令 $2k\pi-\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $k\pi-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi-\frac{2\pi}{3},k\pi-\frac{\pi}{6}](k\in\mathbf{Z})$. ……………………………………… 6 分

(2)因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以 $2x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$，所以 $\cos(2x+\frac{\pi}{3})\in[-1,\frac{1}{2}]$，则 $f(x)\in$ $[-2,1]$. ………………………………………………………………………………………… 8 分

因为 $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$|f(x)-m|\leqslant 2$，所以 $m-2\leqslant f(x)\leqslant m+2$，…………………………… 9 分

所以 $\begin{cases}m-2\leqslant -2,\\ m+2\geqslant 1,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant m\leqslant 0$. …………………………………………………… 11 分

故 $m$ 的取值范围为 $[-1,0]$. …………………………………………………………………… 12 分

20. 解：$p(\alpha)=\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha$. ……………………………………………………………… 2 分

(1)由 $p(\alpha)=2$，得 $\frac{\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha+3\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=2$，…………………………………… 4 分

解得 $\tan\alpha=1$ 或 $2$，……………………………………………………………………………… 5 分

所以 $\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=0$ 或 $\frac{1}{3}$. ……………………………………………………… 7 分

(2)由 $x^4+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{81}=\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{27}x$，得 $(x-\frac{1}{3})^4=0$，…………………………………………… 9 分

则 $x=\frac{1}{3}$，即 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$. ……………………………………………………………………… 10 分

因为 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，所以 $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，……………………………………………………… 11 分

所以 $p(\alpha)=\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1-6\sqrt{2}}{9}$. …………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)因为 $a=-1$，所以 $f(x)=2^{1-x}-x$，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为减函数，……………… 2 分

因为 $f(-1)=2^2+1=5$，$f(1)=1-1=0$，所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的值域为 $[0,5]$. …… 4 分

(2)由 $f(f(x))-x=0$，得 $2^{1+af(x)}-f(x)-x=0$，

则 $2^{1+af(x)}-(2^{1+ax}-x)-x=0$，则 $2^{1+af(x)}=2^{1+ax}$，所以 $1+af(x)=1+ax$，………… 5 分

因为 $a\neq 0$，所以 $2^{1+ax}-x=x$，…………………………………………………………………… 6 分

所以 $a=\frac{\ln x}{x\ln 2}$. ………………………………………………………………………………… 7 分

令函数 $g(x)=\frac{\ln x}{x\ln 2}$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2\ln 2}$. …………………………………………………… 8 分

当 $x\in(0,e)$时，$g'(x)>0$；当 $x\in(e,+\infty)$时，$g'(x)<0$. …………………………………… 9 分

所以 $g(x)$在$(0,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减. …………………………………… 10 分

当 $x\to+\infty$时，$g(x)\to0$，当 $x>e$ 时，$g(x)>0$. …………………………………… 11 分

故 $a$ 的取值范围是$(0,\frac{1}{e\ln 2})$. …………………………………… 12 分

22. (1)解：$f'(x)=a+1+\ln x$，…………………………………… 1 分

由 $f'(x)=0$，得 $x=e^{-a-1}$.

当 $0<x<e^{-a-1}$时，$f'(x)<0$；当 $x>e^{-a-1}$时，$f'(x)>0$. …………………………………… 2 分

所以 $f(x)$在$(0,e^{-a-1})$上单调递减，在$(e^{-a-1},+\infty)$上单调递增. …………………………………… 3 分

故 $y=f(-x)$在$(-\infty,-e^{-a-1})$上单调递减，在$(-e^{-a-1},0)$上单调递增. …………………………………… 4 分

(2)证明：因为$\forall x\in(1,+\infty)$，$\ln x>0$，所以要证$\forall x\in(1,+\infty)$，$2\ln xf(\ln x)<x$，

只需证$\forall x\in(0,+\infty)$，$2xf(x)<e^x$，…………………………………… 5 分

即证$\frac{\ln x}{x}<\frac{e^x}{2x^3}$. …………………………………… 6 分

令函数 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. 当 $0<x<e$ 时，$g'(x)>0$；当 $x>e$ 时，$g'(x)<0$.

7 …………………………………… 7 分

所以 $g(x)_{max}=g(e)=\frac{1}{e}$. …………………………………… 8 分

令函数 $h(x)=\frac{e^x}{2x^3}(x>0)$，则 $h'(x)=$[illegible] 当 $0<x<3$ 时，$h'(x)<0$；当 $x>3$ 时，

$h'(x)>0$. …………………………………… 9 分

所以 $h(x)_{min}=h(3)=\frac{e^3}{54}$. …………………………………… 10 分

因为 $e^4>54$，所以$\frac{e^3}{54}-\frac{1}{e}=\frac{e^4-54}{54e}>0$，所以 $g(x)_{max}<h(x)_{min}$，…………………………………… 11 分

所以$\frac{\ln x}{x}<\frac{e^x}{2x^3}$，从而 $2xf(x)<e^x$ 得证，故$\forall x\in(1,+\infty)$，$2\ln xf(\ln x)<x$. ……… 12 分

## 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！