2023 北京西城高三一模
数　学

2023.3

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{-1,0,1,2,3\}$，$B=\{x\,|\,x^2-3x<0\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{-1\}$　　（B）$\{1,2\}$

（C）$\{1,2,3\}$　　（D）$\{-1,0,1,2\}$

（2）下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数的是

（A）$y=-|x|$　　（B）$y=x^2-2x$

（C）$y=\sin x$　　（D）$y=x-\dfrac{1}{x}$

（3）设 $a=\lg 2$，$b=\cos 2$，$c=2^{0.2}$，则

（A）$b<c<a$　　（B）$c<b<a$

（C）$b<a<c$　　（D）$a<b<c$

（4）在 $(x-\dfrac{2}{x})^5$ 的展开式中，x 的系数为

（A）40　　（B）10

（C）-40　　（D）-10

（5）已知 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CP}$，则

（A）$\overrightarrow{AP}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$　　（B）$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

（C）$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$　　（D）$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

（6）函数 $f(x)=\sin 2x\cdot\tan x$ 是

（A）奇函数，且最小值为0　　（B）奇函数，且最大值为2

（C）偶函数，且最小值为0　　（D）偶函数，且最大值为2

（7）已知双曲线 C 的中心在原点，以坐标轴为对称轴．则“C 的离心率为2”是“C 的

一条渐近线为 $y=\sqrt{3}x$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　　　　　　　（D）既不充分也不必要条件

（8）在不考虑空气阻力的条件下，火箭的最大速度 $v\,(\mathrm{km/s})$ 和燃料的质量 $M\,(\mathrm{kg})$ 以及火箭（除燃料外）的质量 $N\,(\mathrm{kg})$ 间的关系为 $v=2\ln(1+\dfrac{M}{N})$．若火箭的最大速度为

$12\,\mathrm{km/s}$，则下列各数中与 $\dfrac{M}{N}$ 最接近的是

（参考数据：$\mathrm{e}=2.71828\cdots$）

（A）200　　　　（B）400

（C）600　　　　（D）800

（9）设 $c\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}x-c, & x\geqslant 0,\\ 2^x-2c, & x<0.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 恰有一个零点，则 c 的取值范围是

（A）$(0,1)$　　　　（B）$\{0\}\cup[1,+\infty)$

（C）$(0,\dfrac{1}{2})$　　　　（D）$\{0\}\cup[\dfrac{1}{2},+\infty)$

（10）n 名学生参加某次测试，测试由 m 道题组成．若一道题至少有 $\dfrac{2}{3}n$ 名学生未解出来，则称此题为难题；若一名学生至少解出了 $\dfrac{2}{3}m$ 道题，则该生本次测试成绩合格．如果这次测试至少有 $\dfrac{2}{3}n$ 名学生成绩合格，且测试中至少有 $\dfrac{2}{3}m$ 道题为难题，那么 mn 的最小值为

（A）6　　　　（B）9

（C）18　　　　（D）27

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

（11）若复数 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则 $|z|=$____.

（12）已知抛物线 $y^2=2px\,(p>0)$ 的顶点为 O，且过点 A,B．若 $\triangle OAB$ 是边长为 $4\sqrt{3}$ 的等边三角形，则 $p=$____.

（13）已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$，$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=1-2n$．记数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_4=$____；S_n 的最小值为____.

（14）设 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(2\cos\beta,2\sin\beta)$，其中 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$．当 $\alpha=\pi,\beta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$|AB|=$____；当 $|AB|=\sqrt{3}$ 时，$\alpha-\beta$ 的一个取值为____.

（15）如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M，N 分别在线段 AD_1 和 B_1C_1 上.

给出下列四个结论：

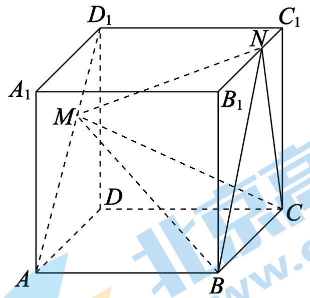
① MN 的最小值为 2；

② 四面体 $NMBC$ 的体积为 $\frac{4}{3}$；

③ 有且仅有一条直线 MN 与 AD_1 垂直；

④ 存在点 M，N，使 $\triangle MBN$ 为等边三角形.

其中所有正确结论的序号是____.



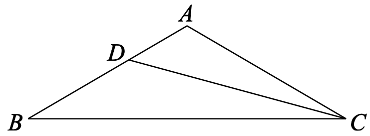
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=\frac{2\pi}{3}$，$AC=\sqrt{2}$，CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D，$CD=\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求 $\angle ADC$ 的值；

（Ⅱ）求 $\triangle BCD$ 的面积.



（17）（本小题 13 分）

根据《国家学生体质健康标准》，高三男生和女生立定跳远单项等级如下（单位：cm）：

立定跳远单项等级	高三男生	高三女生
优秀	260 及以上	194 及以上
良好	245 ~ 259	180 ~ 193
及格	205 ~ 244	150 ~ 179
不及格	204 及以下	149 及以下

从某校高三男生和女生中各随机抽取12 名同学，将其立定跳远测试成绩整理如下（精确到1cm）：

男生：	180	205	213	220	235	245	250	258	261	270	275	280
女生：	148	160	162	169	172	184	195	196	196	197	208	220

假设用频率估计概率，且每个同学的测试成绩相互独立.

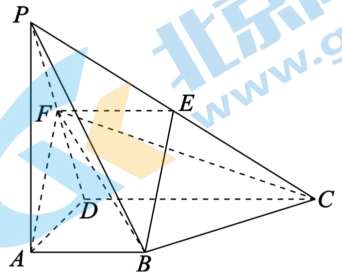
（Ⅰ）分别估计该校高三男生和女生立定跳远单项的优秀率；

（Ⅱ）从该校全体高三男生中随机抽取 2 人，全体高三女生中随机抽取1 人，设 X 为这 3 人中立定跳远单项等级为优秀的人数，估计 X 的数学期望 EX；

（Ⅲ）从该校全体高三女生中随机抽取 3 人，设“这 3 人的立定跳远单项既有优秀，又有其它等级”为事件 A，“这 3 人的立定跳远单项至多有 1 个是优秀”为事件 B. 判断 A 与 B 是否相互独立.（结论不要求证明）

（18）（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB//CD$，$AB\perp AD$，$AB=1$，$PA=AD=CD=2$．E 为棱 PC 上一点，平面 ABE 与棱 PD 交于点 F．再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，完成下列两个问题：



（Ⅰ）求证：F 为 PD 的中点；

（Ⅱ）求二面角 $B-FC-P$ 的余弦值．

条件①：$BE//AF$；

条件②：$BE\perp PC$．

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分．

（19）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=e^x-\cos x$．

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,\ f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）设 $g(x)=x f'(x)-f(x)$，证明：$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

（Ⅲ）判断 $3f(\frac{1}{3})$ 与 $4f(\frac{1}{4})$ 的大小关系，并加以证明．

（20）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:x^2+2y^2=2$，点 A,B 在椭圆 C 上，且 $OA\perp OB$（O 为原点）．设 AB 的中点为 M，射线 OM 交椭圆 C 于点 N．

（Ⅰ）当直线 AB 与 x 轴垂直时，求直线 AB 的方程；

（Ⅱ）求 $\dfrac{|ON|}{|OM|}$ 的取值范围．

（21）（本小题 15 分）

给定正整数 $n\geqslant 2$，设集合 $M=\{\alpha|\alpha=(t_1,t_2,\cdots,t_n),t_k\in\{0,1\},k=1,2,\cdots,n\}$．对于集合 M 中的任意元素 $\beta=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\gamma=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，记 $\beta\cdot\gamma=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$．

设 $A\subseteq M$，且集合 $A=\{\alpha_i|\alpha_i=(t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{in}),i=1,2,\cdots,n\}$，对于 A 中任意元素 α_i,α_j，若 $\alpha_i\cdot\alpha_j=\begin{cases}p, & i=j,\\ 1, & i\neq j,\end{cases}$ 则称 A 具有性质 $T(n,p)$．

（Ⅰ）判断集合 $A=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ 是否具有性质 $T(3,2)$？说明理由；

（Ⅱ）判断是否存在具有性质 $T(4,p)$ 的集合 A，并加以证明；

（Ⅲ）若集合 A 具有性质 $T(n,p)$，证明：$t_{1j}+t_{2j}+\cdots+t_{nj}=p\ (j=1,2,\cdots,n)$．

数学答案及评分参考　　2023.3

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）B　　（2）D　　（3）C　　（4）A　　（5）A

（6）C　　（7）D　　（8）B　　（9）D　　（10）B

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$\sqrt{2}$　　（12）1

（13）-1　-2　　（14）$\sqrt{5}$　$\dfrac{\pi}{3}$（答案不唯一）

（15）①②④

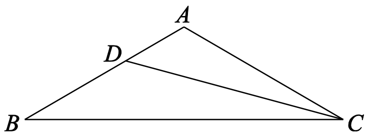
三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）在 $\triangle ADC$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{CD}{\sin\angle A}$.　　………2 分

所以 $\sin\angle ADC=\dfrac{AC\cdot\sin\angle A}{CD}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\dfrac{2\pi}{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　　………4 分

因为 $0<\angle ADC<\dfrac{\pi}{3}$，　　………5 分



所以 $\angle ADC=\dfrac{\pi}{4}$.　　………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $\angle ACD=\angle BCD=\pi-\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}$.　　………7 分

由题设，$\angle B=\angle ACB=\dfrac{\pi}{6}$，即 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.　　………8 分

所以 $BC=2\times AC\times\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{6}$.　　………10 分

所以 $\triangle BCD$ 的面积为

$S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}BC\cdot CD\cdot\sin\angle BCD=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{3}\sin(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{3(\sqrt{3}-1)}{4}$.　　………13 分

（17）（共 13 分）

解：（Ⅰ）样本中立定跳远单项等级获得优秀的男生人数为 4，获得优秀的女生人数为 6，

所以估计该校高三男生立定跳远单项的优秀率为 $\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$；　　………2 分

估计高三女生立定跳远单项的优秀率为 $\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$.　　………4 分

（Ⅱ）由题设，X 的所有可能取值为 $0,1,2,3$.

$P(X=0)$ 估计为 $(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$； ………5 分

$P(X=1)$ 估计为 $C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{2}=\frac{4}{9}$； ………6 分

$P(X=2)$ 估计为 $C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+(\frac{1}{3})^2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{18}$； ………7 分

$P(X=3)$ 估计为 $(\frac{1}{3})^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$． ………8 分

估计 X 的数学期望 $EX=0\times\frac{2}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{5}{18}+3\times\frac{1}{18}=\frac{7}{6}$． ………10 分

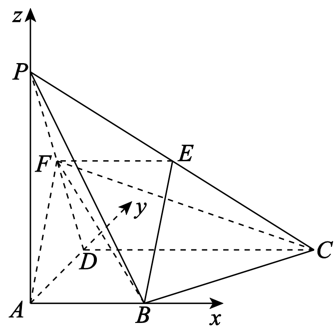
（Ⅲ） A 与 B 相互独立． ………13 分

（18）（共 14 分）

解：选条件①： $BE//AF$．

（Ⅰ）因为 $AB//CD$， $AB\not\subset$ 平面 PCD，

所以 $AB//$ 平面 PCD． ………1 分



因为平面 $ABEF\cap$ 平面 $PCD=EF$，

所以 $AB//EF$． ………2 分

又 $BE//AF$， 所以四边形 $ABEF$ 为平行四边形．

所以 $AB//EF$ 且 $AB=EF$． ………3 分

因为 $AB//CD$ 且 $AB=\frac{1}{2}CD$，所以 $EF//CD$ 且 $EF=\frac{1}{2}CD$．

所以 EF 为 $\triangle PCD$ 的中位线． ………5 分

所以 F 为 PD 的中点． ………6 分

（Ⅱ）因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$, $PA\perp AD$．

又 $AB\perp AD$，所以 AB, AD, AP 两两相互垂直．

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$， ………7 分

则 $A(0,0,0)$， $B(1,0,0)$， $C(2,2,0)$， $P(0,0,2)$， $D(0,2,0)$， $F(0,1,1)$．

所以 $\overrightarrow{BC}=(1,2,0)$， $\overrightarrow{BF}=(-1,1,1)$， $\overrightarrow{AF}=(0,1,1)$．

设平面 BCF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$， 则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+2y=0,\\ -x+y+z=0.\end{cases}$

令 $y=-1$， 则 $x=2$， $z=3$． 于是 $\boldsymbol{m}=(2,-1,3)$． ………9 分

因为 $AB\perp$ 平面 PAD， 且 $AB//CD$， 所以 $CD\perp$ 平面 PAD．

所以 $AF\perp CD$．

又 $PA=AD$， 且 F 为 PD 的中点， 所以 $AF\perp PD$．

所以 $AF\perp$ 平面 PCD，所以 $\overrightarrow{AF}$ 是平面 PCD 的一个法向量. ·········11 分

$$\cos\langle \boldsymbol{m},\overrightarrow{AF}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{AF}|}=\frac{\sqrt{7}}{7}.$$ ·········13 分

由题设，二面角 $B-FC-P$ 的平面角为锐角，

所以二面角 $B-FC-P$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$. ·········14 分

选条件②：$BE\perp PC$.

（Ⅰ）因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB, PA\perp AD$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAB$ 中，$PB=\sqrt{AB^2+AP^2}=\sqrt{5}$. ·········1 分

在直角梯形 $ABCD$ 中，

由 $AB=1$，$AD=CD=2$，可求得 $BC=\sqrt{5}$，所以 $PB=BC$. ·········2 分

因为 $BE\perp PC$，所以 E 为 PC 的中点. ·········3 分

因为 $AB//CD$，$AB\not\subset$ 平面 PCD，所以 $AB//$ 平面 PCD.

因为平面 $ABEF\cap$ 平面 $PCD=EF$，所以 $AB//EF$. ·········5 分

所以 $CD//EF$.

所以 F 为 PD 的中点. ·········6 分

（Ⅱ）以下同条件①.

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）$f'(x)=\mathrm{e}^x+\sin x$. ·········1 分

所以 $f(0)=0$，$f'(0)=1$. ·········3 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y=x$. ·········4 分

（Ⅱ）由题设，$g(x)=x(\mathrm{e}^x+\sin x)-(\mathrm{e}^x-\cos x)$

$$=(x-1)\mathrm{e}^x+x\sin x+\cos x.$$

所以 $g'(x)=x(\mathrm{e}^x+\cos x)$. ·········6 分

当 $x>0$ 时，因为 $\mathrm{e}^x+\cos x>\mathrm{e}^0+\cos x=1+\cos x\geqslant 0$，

所以 $g'(x)>0$. ·········8 分

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ·········9 分

（Ⅲ）$3f(\frac{1}{3})>4f(\frac{1}{4})$. ·········10 分

证明如下：

设 $h(x)=\frac{f(x)}{x}, x\in(0,+\infty)$. ·········11 分

则 $h'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$. ·········12 分

由（Ⅱ）知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)>g(0)=0$． ………13 分

所以 $h'(x)>0$，即 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增． ………14 分

所以 $h(\frac{1}{3})>h(\frac{1}{4})$，即 $3f(\frac{1}{3})>4f(\frac{1}{4})$． ………15 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）当直线 AB 与 x 轴垂直时，设其方程为 $x=t\ (-\sqrt{2}<t<\sqrt{2})$． ………1 分

由点 A,B 关于 x 轴对称，且 $OA\perp OB$，不妨设 $A(t,t)$． ………2 分

将点 A 的坐标代入椭圆 C 的方程，得 $t^2+2t^2=2$，解得 $t=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$． ………3 分

所以直线 AB 的方程为 $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$． ………4 分

（Ⅱ）当直线 AB 的斜率不存在时，由（Ⅰ）知 $\frac{|ON|}{|OM|}=\sqrt{3}$． ………5 分

当直线 AB 的斜率存在时，设其方程为 $y=kx+m$．

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2+2y^2=2, \end{cases}$ 得 $(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$． ………6 分

由 $\Delta=8(2k^2-m^2+1)>0$，得 $m^2<1+2k^2$．

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-2}{2k^2+1}$． ………8 分

因为 $OA\perp OB$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$．

所以 $x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$．

整理得 $(k^2+1)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$． ………10 分

所以 $(k^2+1)(2m^2-2)+km(-4km)+m^2(2k^2+1)=0$．

解得 $3m^2=2k^2+2$，从而 $m^2\geqslant\frac{2}{3}$． ………11 分

设 $\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OM}$，其中 $\lambda>0$．

则 $\overrightarrow{ON}=\frac{\lambda}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{\lambda}{2}(x_1+x_2,y_1+y_2)=(\frac{-2km\lambda}{2k^2+1},\frac{m\lambda}{2k^2+1})$． ………12 分

将 $N(\frac{-2km\lambda}{2k^2+1},\frac{m\lambda}{2k^2+1})$ 代入椭圆 C 的方程，得 $m^2\lambda^2=2k^2+1$．

所以 $m^2\lambda^2=3m^2-1$，即 $\lambda^2=3-\frac{1}{m^2}$． ………13 分

因为 $m^2 \geqslant \frac{2}{3}$，所以 $\frac{3}{2} \leqslant \lambda^2 < 3$，即 $\frac{\sqrt{6}}{2} \leqslant \lambda < \sqrt{3}$． ………14 分

综上，$\frac{|ON|}{|OM|}$ 的取值范围是 $[\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{3}]$． ………15 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $(1,1,0)\cdot(1,1,0) = 1\times1+1\times1+0\times0 = 2$，同理 $(1,0,1)\cdot(1,0,1) = (0,1,1)\cdot(0,1,1) = 2$．

又 $(1,1,0)\cdot(1,0,1) = 1\times1+1\times0+0\times1 = 1$，同理 $(1,1,0)\cdot(0,1,1) = (1,0,1)\cdot(0,1,1) = 1$．

所以集合 $A = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ 具有性质 $T(3,2)$． ………4 分

（Ⅱ）当 $n = 4$ 时，集合 A 中的元素个数为 4．由题设 $p \in \{0,1,2,3,4\}$． ………5 分

假设集合 A 具有性质 $T(4,p)$，则

①当 $p = 0$ 时，$A = \{(0,0,0,0)\}$，矛盾．

②当 $p = 1$ 时，$A = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$，不具有性质 $T(4,1)$，矛盾．

③当 $p = 2$ 时，$A \subseteq \{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$．

因为 $(1,1,0,0)$ 和 $(0,0,1,1)$ 至多一个在 A 中；$(1,0,1,0)$ 和 $(0,1,0,1)$ 至多一个在 A 中；$(1,0,0,1)$ 和 $(0,1,1,0)$ 至多一个在 A 中，故集合 A 中的元素个数小于 4，矛盾．

④当 $p = 3$ 时，$A = \{(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1)\}$，不具有性质 $T(4,3)$，矛盾．

⑤当 $p = 4$ 时，$A = \{(1,1,1,1)\}$，矛盾．

综上，不存在具有性质 $T(4,p)$ 的集合 A． ………9 分

（Ⅲ）记 $c_j = t_{1j} + t_{2j} + \cdots + t_{nj}$ $(j = 1,2,\cdots,n)$，则 $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = np$．

若 $p = 0$，则 $A = \{(0,0,\cdots,0)\}$，矛盾．若 $p = 1$，则 $A = \{(1,0,0,\cdots,0)\}$，矛盾．故 $p \geqslant 2$．

假设存在 j 使得 $c_j \geqslant p+1$，不妨设 $j = 1$，即 $c_1 \geqslant p+1$．

当 $c_1 = n$ 时，有 $c_j = 0$ 或 $c_j = 1$ $(j = 2,3,\cdots,n)$ 成立．

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 中分量为1的个数至多有 $n + (n-1) = 2n-1 < 2n \leqslant np$． …11 分

当 $p+1 \leqslant c_1 < n$ 时，不妨设 $t_{11} = t_{21} = \cdots = t_{p+1,1} = 1, t_{n1} = 0$．

因为 $\alpha_n \cdot \alpha_n = p$，所以 α_n 的各分量有 p 个1，不妨设 $t_{n2} = t_{n3} = \cdots = t_{n,p+1} = 1$．

由 $i \neq j$ 时，$\alpha_i \cdot \alpha_j = 1$ 可知，$\forall q \in \{2,3,\cdots,p+1\}$，$t_{1q}, t_{2q}, \cdots, t_{p+1,q}$ 中至多有1个1，

即 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{p+1}$ 的前 $p+1$ 个分量中，至多含有 $p+1+p = 2p+1$ 个1．

又 $\alpha_i \cdot \alpha_n = 1$ $(i = 1,2,\cdots,p+1)$，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{p+1}$ 的前 $p+1$ 个分量中，含有

$(p+1)+(p+1) = 2p+2$ 个1，矛盾．

所以 $c_j \leqslant p$ $(j = 1,2,\cdots,n)$． ………14 分

因为 $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = np$，

所以 $c_j = p$ $(j = 1,2,\cdots,n)$．

所以 $t_{1j} + t_{2j} + \cdots + t_{nj} = p$ $(j = 1,2,\cdots,n)$． ………15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〃精益求精、专业严谨〃的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。