2023 北京大兴高一（上）期末

数　学

学校___________ 姓名___________ 班级___________ 考号___________

考生须知：

1．本试卷共 4 页，共两部分，21 道小题．满分 150 分．考试时间 120 分钟．

2．在试卷和答题卡上准确填写学校名称、班级、姓名和准考证号．

3．试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效．

4．在答题卡上，选择题用 2B 铅笔作答，其他题用黑色字迹签字笔作答．

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. $\tan\frac{5\pi}{4}$ 等于（　　）

A. $-\sqrt{3}$　　B. -1　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

2. 若集合 $A=\{0,1\},B=\{x\,|\,x\geq 0\}$，则下列结论正确的是（　　）

A. $\{0\}\in B$　　B. $A\cap B=\varnothing$　　C. $A\subseteq B$　　D. $A\cup B=\mathbf{R}$

3. 下列函数中是奇函数的是（　　）

A. $y=\sqrt{x^2}$　　B. $y=\ln x$　　C. $y=2^{-x}+2^{x}$　　D. $y=x^3$

4. 已知 $M=(a+2)(a-3),N=2a(a-1),a\in\mathbf{R}$，则 M，N 的大小关系是（　　）

A. $M>N$　　B. $M\geq N$　　C. $M<N$　　D. $M\leq N$

5. 已知 $\sin 36^\circ=a$，则 $\sin 54^\circ$ 等于（　　）

A $\sqrt{1-a^2}$　　B. a　　C. $-\sqrt{1-a^2}$　　D. $-a$

6. 已知 $a=0.3^2,b=\log_2 0.3,c=2^{0.3}$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $a<c<b$　　D. $b<c<a$

7. 下列函数中，最小正周期为 π 的是（　　）

A $f(x)=\tan\frac{x}{2}$　　B. $f(x)=1+\sin x$　　C. $f(x)=|\sin x|$　　D. $f(x)=\sin x+\cos 2x$

8. “$a<0$”是“函数 $f(x)=2^x+a$ 存在零点”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α,β,γ 均以 Ox 为始边，α 的终边过点 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，将 α 的终边关于 x 轴对称得到角 β 的终边，再将 β 的终边绕原点按逆时针方向旋转 $180°$ 得到角 γ 的终边，则 $\sin\gamma$ 的值为（　　）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

10. 声音的等级 $f(x)$（单位：dB）与声音强度 x（单位：$\mathrm{W/m^2}$）满足 $f(x)=10\lg\frac{x}{10^{-12}}$．若喷气式飞机起飞时，声音的等级约为 $140\ \mathrm{dB}$，一般人说话时，声音的等级约为 $60\ \mathrm{dB}$，那么喷气式飞机起飞时声音强度约为一般人说话时声音强度的（　　）

A. 10^6 倍　　B. 10^8 倍　　C. 10^{10} 倍　　D. 10^{12} 倍

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 若 sinα<0 且 tanα>0，则 α 是第__________象限角.

12. 已知幂函数 $y=f(x)$ 的图象经过点 $(2,4)$，则 $f(-2)=$__________.

13 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x<1\\ \log_2 x, x\geq 1\end{cases}$，则 $f(0)=$__________；$f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)=$__________.

14. 若直角三角形斜边长等于 12，则该直角三角形面积的最大值为__________；周长的最大值为__________.

15. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若 $\forall x_1\in D$，存在唯一的 $x_2\in D$，使 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=a$（$a$ 为常数）成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 上的均值为 a．给出下列 4 个函数：

① $y=x^3$；② $y=4\sin x$；③ $y=\lg x$；④ $y=2^x$．

其中，所有满足在定义域上的均值为 2 的函数序号为__________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知命题 $p:\forall x\in\mathbf{R}, x^2+2x+1>0$．

（1）写出命题 p 的否定；

（2）判断命题 p 的真假，并说明理由．

17. 已知 $\cos\alpha=\frac{3}{5},\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$．

（1）求 $\sin\alpha,\tan\alpha$ 的值；

（2）求 $\frac{\sin^2(-\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\tan(\alpha-\pi)$ 的值.

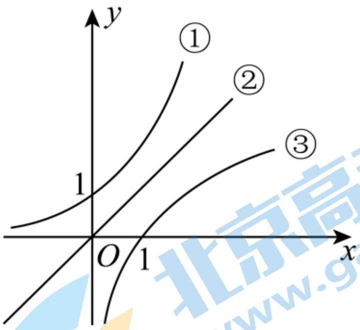
18. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right), x\in\mathbf{R}$.

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（2）求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值；

（3）比较 $f\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)$ 与 $f\left(\dfrac{6\pi}{7}\right)$ 的大小.

19. 已知函数 $y=x, y=a^x, y=\log_a x, a>1$ 的图象如图所示.



（1）函数 $y=a^x$ 的图象的序号是__________； $y=\log_a x$ 的图象的序号是__________；

（2）在同一直角坐标系中，利用已有图象画出 $y=\log_a \dfrac{1}{x}$ 的图象，直接写出关于 x 的方程

$a^{-x}-\log_a \dfrac{1}{x}=0$ 在 $(1,+\infty)$ 中解的个数；

（3）分别描述这三个函数增长的特点.

20. 已知函数 $f(x)=\lg(1-x)-\lg(1+x)$

（1）求 $f\left(\dfrac{9}{11}\right)$ 的值；

（2）判断 $f(x)$ 奇偶性，并说明理由；

（3）判断 $f(x)$ 单调性，并说明理由.

21. 对在直角坐标系的第一象限内的任意两点作如下定义：若 $\dfrac{a}{b}>\dfrac{c}{d}$，那么称点 (a,b) 是点 (c,d) 的“上位点”. 同时点 (c,d) 是点 (a,b) 的“下位点”；

（1）试写出点 $(3,5)$ 的一个“上位点”坐标和一个“下位点”坐标；

（2）已知点 (a,b) 是点 (c,d) 的“上位点”，判断点 $P\left(\dfrac{a+c}{2},\dfrac{b+d}{2}\right)$ 是否是点 (a,b) 的“下位点”，证明你的结论；

（3）设正整数 n 满足以下条件：对集合 $\{t \mid 0<t<2022, t\in Z\}$ 内的任意元素 m ，总存在正整数 k ，使得

点$\left(n,k\right)$既是点$\left(2022,m\right)$的“下位点”，又是点$\left(2023,m+1\right)$的“上位点”，求满足要求的一个正整数n的值，并说明理由．

参考答案

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 【答案】D

【解析】

【分析】根据诱导公式以及特殊角的正切值即可求解.

【详解】$\tan\frac{5\pi}{4}=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$.

故选：D.

2. 【答案】C

【解析】

【分析】根据元素与集合的关系可判断 A，求出 $A\cap B$ 可判断 BC；求出 $A\cup B$ 可判断 D.

【详解】$\because B=\{x\,|\,x\geq 0\}$，$\therefore 0\in B$，$\therefore\{0\}\subseteq B$，故 A 错误；

$A\cap B=\{x\,|\,x\geq 0\}\cap\{0,1\}=\{0,1\}$，所以 $A\subseteq B$，故 B 错误，C 正确；

$A\cup B=\{x\,|\,x\geq 0\}\cup\{0,1\}=\{x\,|\,x\geq 0\}$，故 D 错误

故选：C.

3. 【答案】D

【解析】

【分析】利用奇偶函数定义即可判断每个选项

【详解】对于 A，令 $f(x)=\sqrt{x^2}$，其定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=\sqrt{(-x)^2}=\sqrt{x^2}=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数，故 A 不正确；

对于 B，令 $g(x)=\ln x$，其定义域为 $(0,+\infty)$，不关于原点对称，故不是奇函数，故 B 不正确；

对于 A，令 $h(x)=2^{-x}+2^{x}$，其定义域为 $\mathbf{R}$，且 $h(-x)=2^{x}+2^{-x}=2^{-x}+2^{x}=h(x)$，

所以 $h(x)$ 为偶函数，故 C 不正确；

对于 A，令 $F(x)=x^3$，其定义域为 $\mathbf{R}$，且 $F(-x)=(-x)^3=-x^3=-F(x)$，

所以 $F(x)$ 为奇函数，故 D 正确；

故选：D

4. 【答案】C

【解析】

【分析】利用作差法即可判断 M，N 的大小

【详解】因为$M-N=(a+2)(a-3)-2a(a-1)=-a^2+a-6\ \ =-a^2+a-6=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{23}{4}<0$，

所以$M<N$，

故选：C

5. 【答案】A

【解析】

【分析】由题知$\cos36^{\circ}=\sqrt{1-a^2}$，再根据诱导公式求解即可.

【详解】解：因为$\sin36°=a$，$\sin^2 36^{\circ}+\cos^2 36^{\circ}=1$

所以$\cos36^{\circ}=\sqrt{1-a^2}$，

所以$\sin54^{\circ}=\sin\left(90^{\circ}-36^{\circ}\right)=\cos36^{\circ}=\sqrt{1-a^2}$

故选：A

6. 【答案】B

【解析】

【分析】利用指数函数和对数函数函数的单调性，将b与0比大小，c与1比大小，即可求出结论

【详解】因为$a=0.3^2=0.09, b=\log_2 0.3<\log_2 1=0, c=2^{0.3}>2^0=1$，

所以$b<a<c$

故选：B

7. 【答案】C

【解析】

【分析】根据三角函数的图像性质可判断ABC，利用周期的定义可判断D

【详解】对于A，$f(x)=\tan\frac{x}{2}$的最小正周期为$\dfrac{\pi}{\left(\frac{1}{2}\right)}=2\pi$，故A不正确；

对于B，$f(x)=1+\sin x$的最小正周期为2π，故B不正确；

对于C，$f(x)=|\sin x|$的最小正周期为π，故C正确；

对于D，因为$f(x+\pi)=\sin(x+\pi)+\cos2(x+\pi)=-\sin x+\cos2x\neq f\left(x\right)$，故D不正确，

故选：C

8. 【答案】C

【解析】

【分析】根据函数零点的性质结合充分条件和必要条件的定义进行判断即可

【详解】若函数$f(x)=2^x+a$存在零点，则$f(x)=2^x+a=0$有实数解，即$a=-2^x$有实数解，

因为$2^x>0$，所以$a=-2^x<0$，而$a<0$，由$f\left(x\right)=0$得$x=\log_2\left(-a\right)$，

则“$a<0$”是“函数$f(x)=2^x+a$存在零点”的充分必要条件.

故选：C

9. 【答案】D

【解析】

【分析】利用三角函数的定义得到$\cos\alpha,\sin\alpha$，继而得到$\cos\beta,\sin\beta$，通过题意可得到$\gamma=\beta+180^{\circ}$，利用诱导公式即可求解

【详解】因为α的终边过点$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，且$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$，所以$\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{1}{2}\end{cases}$，

因为α的终边与角β的终边关于x轴对称，所以$\begin{cases}\cos\beta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\beta=-\frac{1}{2}\end{cases}$，

因为角γ　终边是β的终边绕原点按逆时针方向旋转180°得到，所以$\gamma=\beta+180^{\circ}$，

所以$\sin\gamma=\sin\left(\beta+180^{\circ}\right)=-\sin\beta=\frac{1}{2}$，

故选：D

10. 【答案】B

【解析】

【分析】首先设喷气式飞机起飞时声音强度和一般人说话时声音强度分别为x_1,x_2，根据题意得出$f\left(x_1\right)=140$，$f\left(x_2\right)=60$，计算求$\frac{x_1}{x_2}$的值.

【详解】设喷气式飞机起飞时声音强度和一般人说话时声音强度分别为x_1,x_2，

$f\left(x_1\right)=10\times\lg\frac{x_1}{10^{-12}}=140$，解得$x_1=10^2$，

$f\left(x_2\right)=10\times\lg\frac{x_2}{10^{-12}}=60$，解得$x_2=10^{-6}$，所以$\frac{x_1}{x_2}=10^8$，

因此，喷气式飞机起飞时声音强度约为一般人说话时声音强度的10^8倍.

故选：B

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 【答案】第三象限角

【解析】

【详解】试题分析：当 sinα＜0，可知 α 是第三或第四象限角，又 tanα＞0，

可知 α 是第一或第三象限角，所以当 sinα＜0 且 tanα＞0，

则 α 是第三象限角.

考点：三角函数值的象限符号.

12. 【答案】4

【解析】

【分析】由幂函数图象所过点求出幂函数解析式，然后计算函数值.

【详解】设 $f\left(x\right)=x^{a}$，则 $2^{a}=4$，$a=2$，即 $f(x)=x^{2}$，

所以 $f(-2)=4$.

故答案为：4

13. 【答案】 ①. 1 ②. $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】直接根据分段函数解析式计算即可.

【详解】因为 $f\left(x\right)=\begin{cases}2^{x},x<1\\ \log_{2}x,x\geq 1\end{cases}$，

所以 $f\left(0\right)=2^{0}=1, f\left(\frac{1}{3}\right)=2^{\frac{1}{3}}$，

所以 $f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)=f\left(2^{\frac{1}{3}}\right)=\log_{2}2^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$.

故答案为：1；$\frac{1}{3}$.

14. 【答案】 ①. 36； ②. $12\sqrt{2}+12$

【解析】

【分析】由条件，利用基本不等式可求面积的最大值和周长的最大值.

【详解】设两条直角边的边长分别为 a,b，则 $a>0$，$b>0$，$a^{2}+b^{2}=144$，

由基本不等式可得 $a^{2}+b^{2}\geq 2ab$，故 $144\geq 2ab$ 即 $ab\leq 72$，当且仅当 $a=b=6\sqrt{2}$ 时等号成立，故直角三角形面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times 72=36$，

又 $\left(a+b\right)^{2}\leq 2\left(a^{2}+b^{2}\right)$，$a^{2}+b^{2}=144$，所以 $\left(a+b\right)^{2}\leq 288$，即 $a+b\leq 12\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b=6\sqrt{2}$ 时等号成立，所以直角三角形周长的最大值为 $12\sqrt{2}+12$，

故答案为：36，$12\sqrt{2}+12$.

15. 【答案】①③

【解析】

【分析】对于①③根据定义给定任意一个 x_{1} 求出 x_{2} 判断是否存在定义域内，是否唯一.

对于②根据定义得知周期函数不符合题意.

对于④特殊值验证不成立.

【详解】对于函数① $y=x^3$，取任意的 $x_1\in\mathrm{R}$，$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{x_1^3+x_2^3}{2}=2, x_2=\sqrt[3]{4-x_1^3}$

可以得到唯一的 $x_2\in D$，故满足条件，所以①正确；

对于函数② $y=4\sin x$，因为 $y=4\sin x$ 是 R 上的周期函数，存在无穷个 $x_2\in D$，使 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=2$

成立，故不满足题意，所以②不正确；

对于函数③ $y=\lg x$，定义域 $x\in(0,+\infty)$，值域为 R，且单调，必存在唯一 $x_2\in D$ 使

$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=2$ 成立，故满足题意，所以③正确；

对于函数④ $y=2^x$ 定义域为 R，值域为 $y\in(0,+\infty)$ 对于 $x_1=3, f(x_1)=8$ 要使 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=2$ 成立，

则 $f(x_2)=-4$ 不成立，所以④不正确.

故答案为：①③

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16. 【答案】（1） $\exists x_0\in\mathbf{R}, x_0^2+2x_0+1\le 0$

（2）假，理由见解析

【解析】

【分析】（1）根据全称命题的否定为特称命题即可求解；

（2）因为 $y=x^2+2x+1=(x+1)^2\ge 0$ 即可判断命题 p

【小问 1 详解】

由命题 $p:\forall x\in\mathbf{R}, x^2+2x+1>0$，

可得命题 p 的否定为 $\exists x_0\in\mathbf{R}, x_0^2+2x_0+1\le 0$，

【小问 2 详解】

命题 p 为假命题，

因为 $y=x^2+2x+1=(x+1)^2\ge 0$（当且仅当 $x=-1$ 时取等号），

故命题 $p:\forall x\in\mathbf{R}, x^2+2x+1>0$ 为假命题

17. 【答案】（1） $\sin\alpha=\frac{4}{5}, \tan\alpha=\frac{4}{3}$

（2）0

【解析】

【分析】（1）根据同角三角函数之间的关系即可求解，

（2）根据诱导公式以及弦切互化关系即可求解.

【小问 1 详解】

由 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5},\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 得 $\sin\alpha>0$，所以

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}，\quad \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}，$$

【小问 2 详解】

$$\frac{\sin^2(-\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\tan(\alpha-\pi)=\frac{\sin^2\alpha}{-\cos\alpha}+\sin\alpha\tan\alpha$$

$$=\sin\alpha\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}+\sin\alpha\tan\alpha=-\sin\alpha\tan\alpha+\sin\alpha\tan\alpha=0$$

18. 【答案】（1） π

（2）最大值为 1，最小值为 -2

（3） $f\left(\dfrac{6\pi}{7}\right)<f\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)$

【解析】

【分析】（1）根据周期的计算公式即可求解，

（2）根据整体法求解函数的值域，即可求解最值，

（3）代入求值，结合正弦函数的性质即可求解，

【小问 1 详解】

由 $f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right),x\in\mathbf{R}$ 知：周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，

故 $f(x)$ 的最小正周期为 π

【小问 2 详解】

由于 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$，则 $2x-\dfrac{\pi}{3}\in\left[-\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$，因此 $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$，故 $f\quad x\ \in\ -2,1$ ，所以 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上 最大值为 1，最小值为 -2

【小问 3 详解】

$$f\left(\frac{3\pi}{7}\right)=2\sin\left(\frac{6\pi}{7}-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left[\pi-\left(\frac{6\pi}{7}-\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\sin\frac{10\pi}{21}，$$

$$f\left(\frac{6\pi}{7}\right)=2\sin\left(\frac{12\pi}{7}-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left[\left(\frac{12\pi}{7}-\frac{\pi}{3}\right)-2\pi\right]=2\sin\left(-\frac{13\pi}{21}\right)=-2\sin\frac{13\pi}{21}，$$

由于 $\dfrac{13\pi}{21}\in(0,\pi),\dfrac{10\pi}{21}\in(0,\pi)$，所以 $\sin\dfrac{13\pi}{21}>0,\sin\dfrac{10\pi}{21}>0$，

因此 $f\left(\frac{6\pi}{7}\right)=-2\sin\frac{13\pi}{21}<0$， $f\left(\frac{3\pi}{7}\right)=2\sin\frac{10\pi}{21}>0$，

故 $f\left(\frac{6\pi}{7}\right)<f\left(\frac{3\pi}{7}\right)$

19. 【答案】（1）①；③　　（2）图象见解析；解得个数为 0

（3）答案见解析

【解析】

【分析】（1）利用指数函数，对数函数的单调性和定点进行判断即可；

（2）由于 $y=\log_a\frac{1}{x}=-\log_a x$，该函数与 $y=\log_a x$ 关于 x 轴对称，故画出对应图象，$a^{-x}-\log_a\frac{1}{x}=0$ 看作是 $y=a^{-x}$ 和 $y=\log_a\frac{1}{x}$ 的交点个数，通过画图观察即可；

（3）根据图象特征进行描述即可

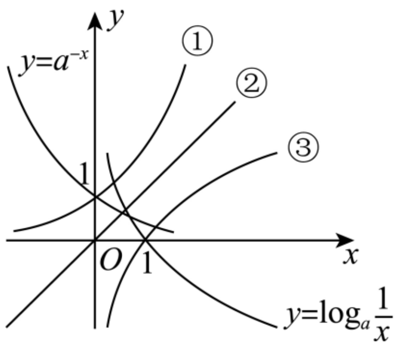
【小问 1 详解】

函数 $y=a^x, a>1$ 为单调递增的指数函数，恒过定点 $(0,1)$，故为序号①；

函数 $y=\log_a x, a>1$ 为单调递增的对数函数，恒过定点 $(1,0)$，故为序号③；

【小问 2 详解】

因为 $y=\log_a\frac{1}{x}=-\log_a x, a>1$，所以该函数与 $y=\log_a x, a>1$ 关于 x 轴对称，如图所示



方程 $a^{-x}-\log_a\frac{1}{x}=0$ 解　个数即 $a^{-x}=\log_a\frac{1}{x}$ 解得个数，

可看作是 $y=a^{-x}$ 和 $y=\log_a\frac{1}{x}$ 的交点个数，

由于 $y=a^{-x}$ 与 $y=a^x$ 关于 y 轴对称，画出图象 $y=a^{-x}$，

从图像可得两个函数在 $(1,+\infty)$ 没有交点，故 $a^{-x}-\log_a\frac{1}{x}=0$ 在 $(1,+\infty)$ 中解的个数 0；

【小问 3 详解】

函数 $y=a^x, a>1$ 的图象是下凸的，所以其增长特点：先缓后快；

函数 $y=x$ 的图象是直线，所以其增长特点：匀速增长；

函数 $y=\log_a x, a>1$ 的图象是上凸的，所以其增长特点：先快后缓

20. 【答案】(1) -1

(2) 奇函数，理由见解析

(3) $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为减函数，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 利用对数的运算性质即可求解；

(2) 先求出函数定义域，然后利用奇偶性的定义进行判断即可；

(3) 根据函数单调性定义进行判断即可

【小问 1 详解】

因为 $f(x)=\lg(1-x)-\lg(1+x)$，

所以 $f(\frac{9}{11})=\lg\frac{2}{11}-\lg\frac{20}{11}=\lg(\frac{2}{11}\times\frac{11}{20})=\lg\frac{1}{10}=-1$

【小问 2 详解】

$f(x)$ 为奇函数

证明：要使 $f(x)=\lg(1-x)-\lg(1+x)$ 有意义，只需 $\begin{cases}1-x>0\\1+x>0\end{cases}$，解得 $-1<x<1$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$；

又 $f(-x)=\lg(1+x)-\lg(1-x)=-[\lg(1-x)-\lg(1+x)]=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，

【小问 3 详解】

$f(x)=\lg(1-x)-\lg(1+x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$ 在 $(-1,1)$ 上为减函数.

证明：任取 $x_1,x_2\in(-1,1)$ 且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\lg\frac{1-x_1}{1+x_1}-\lg\frac{1-x_2}{1+x_2}=\lg\left(\frac{1-x_1}{1+x_1}\times\frac{1+x_2}{1-x_2}\right)=\lg\frac{1+(x_2-x_1)-x_1x_2}{1+(x_1-x_2)-x_1x_2}$，

$\because 1+(x_2-x_1)-x_1x_2>1-(x_2-x_1)-x_1x_2=(1+x_1)(1-x_2)>0$，

$\therefore \frac{1+(x_2-x_1)-x_1x_2}{1+(x_1-x_2)-x_1x_2}>1$，

得 $f(x_1)-f(x_2)>0$，得到 $f(x_1)>f(x_2)$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为减函数

21. 【答案】(1) “上位点”为 $(3,4)$，“下位点”为 $(3,7)$；

(2) 是，证明见解析　　(3) 4045

【解析】

【分析】（1）由定义即可得所求点的坐标.

（2）先由点$\left(a,b\right)$是点$\left(c,d\right)$的“上位点” 得$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$，作差化简得$ad-bc>0$，结合所得结论、定义，利用作差法即可判断出点$P\left(\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}\right)$是否是点$\left(a,b\right)$的“下位点”.

（3）借助（2）的结论证明点$P\left(a+c,b+d\right)$既是点$\left(c,d\right)$的“上位点”，又是点$\left(a,b\right)$的“下位点”，再利用所证结论即可得到满足要求的一个正整数n的值.

【小问 1 详解】

根据题设中的定义可得点$\left(3,5\right)$的一个上位点“坐标”和一个“下位点”坐标分别为$\left(3,4\right)$和$\left(3,7\right)$；

【小问 2 详解】

点$P\left(\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}\right)$是点$\left(a,b\right)$的“下位点”，

证明：$\because$点$\left(a,b\right)$是点$\left(c,d\right)$的“上位点”， $\therefore\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$

又$\because a,b,c,d$均大于0， $\therefore ad>bc$， $\therefore ad-bc>0$

$\therefore\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}=\frac{b\left(a+c\right)-a\left(b+d\right)}{b\left(b+d\right)}=\frac{bc-ad}{b\left(b+d\right)}<0$，即$\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+d}$，

所以点$P\left(\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}\right)$是点$\left(a,b\right)$的“下位点”.

【小问 3 详解】

可证点$P\left(a+c,b+d\right)$既是点$\left(c,d\right)$的“上位点”，又是点$\left(a,b\right)$的“下位点”，

证明：$\because$点$\left(a,b\right)$是点$\left(c,d\right)$的“上位点”， $\therefore\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$

$\because a,b,c,d$均大于0， $\therefore ad>bc$， $\therefore ad-bc>0$

$\therefore\frac{a+c}{b+d}-\frac{c}{d}=\frac{d\left(a+c\right)-c\left(b+d\right)}{d\left(b+d\right)}=\frac{ad+cd-bc-cd}{d\left(b+d\right)}=\frac{ad-bc}{d\left(b+d\right)}>0$，

即$\frac{a+c}{b+d}>\frac{c}{d}$，所以点$P\left(a+c,b+d\right)$是点$\left(c,d\right)$的“上位点”，

同理可得$\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}=\frac{b\left(a+c\right)-a\left(b+d\right)}{b\left(b+d\right)}=\frac{bc-ad}{b\left(b+d\right)}<0$，即$\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+d}$，

所以点$P\left(a+c,b+d\right)$是点$\left(a,b\right)$的“下位点”，

所以点$P\left(a+c,b+d\right)$既是点$\left(c,d\right)$的“上位点”，又是点$\left(a,b\right)$的“下位点”.

根据题意知点$\left(n,k\right)$既是点$\left(2022,m\right)$的“下位点”，又是点$\left(2023,m+1\right)$的“上位点”对

$m \in \{t | 0 < t < 2022, t \in Z\}$时恒成立，

根据上述的结论可知，当$n = 2022 + 2023 = 4045$，$k = 2m + 1$时，满足条件.

故：$n = 4045$

【点睛】关键点点睛：理解并运用“上位点”和“下位点”的定义是解题的关键.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。