

本试卷共4页，共三大部分，19道小题，满分100分；考试时长90分钟。试题答案一律填涂或书写在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，请将答题纸交回。

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=2$ ，公差 $d=1$ ，则 $a_{10}=$

A. 9

B. 10

C. 11

D. 12

2. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，前 n 项和为 S_n ，若 $q=2$ ， $S_2=6$ ，则 $S_3=$

A. 8

B. 12

C. 14

D. 16

3. 函数 $f(x) = \frac{e^x}{x}$ 的导函数 $f'(x) =$

A. $\frac{(x-1)e^x}{x^2}$

B. $\frac{(x-1)e^x}{x}$

C. $\frac{(1-x)e^x}{x^2}$

D. $\frac{(x+1)e^x}{x^2}$

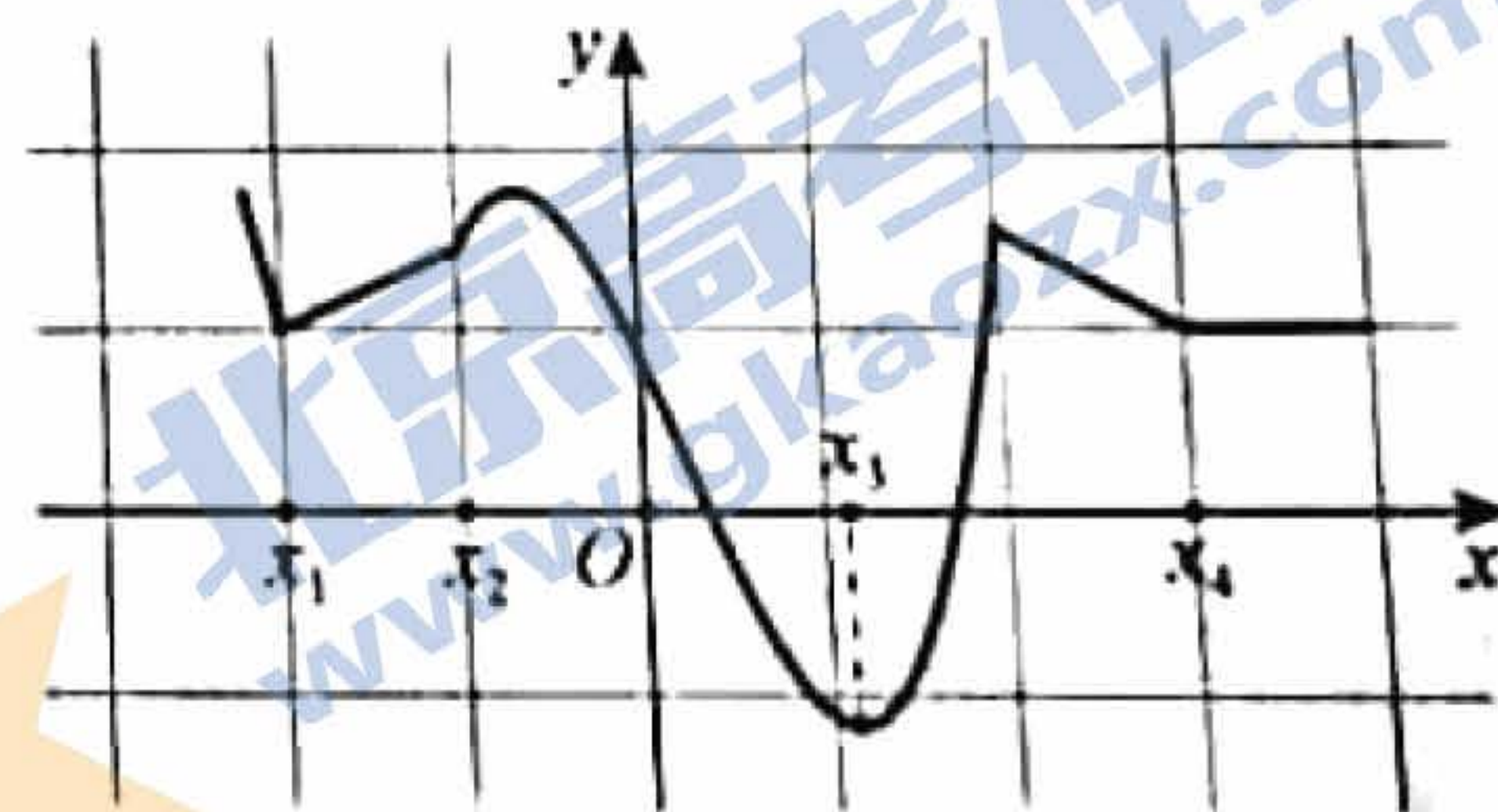
4. 已知函数 $f(x)$ 的图象如右图所示，则 $f(x)$ 的极小值点的集合为

A. $\{x_1, x_2, x_3\}$

B. $\{x_1, x_3\}$

C. $\{x_1, x_2, x_4\}$

D. $\{x_3\}$



5. 已知函数 $f(x) = ax - \ln x$ ，若对于任意 $x_1 > x_2 > 0$ ，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，则实数 a 的取值范围是

A. $[0, +\infty)$

B. $(-\infty, 0]$

C. $(-\infty, 0)$

D. $(-\infty, 1]$

6. 科学家经过长期监测，发现在某一段时间内，某物种的种群数量 Q 可近似看作时间 t 的函数，记作 $Q(t)$ ，其瞬时变化率 $Q'(t)$ 和 $Q(t)$ 的关系为 $Q'(t) = kQ(t)$ ，其中 k 为常数。在下列选项所给函数中， $Q(t)$ 可能是

A. $Q(t) = e^{-0.2t}$

B. $Q(t) = 0.2\sin t$

C. $Q(t) = 2\ln(t+2)$

D. $Q(t) = 6(t+1)^{-1}$

7. 若函数 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 有唯一零点, 则实数 a 的取值范围为
- A. $(-2, 2)$ B. $[2]$
C. $\{a | -2 < a < 2\}$ D. $\{a | a < -2 \text{ 或 } a > 2\}$
8. 一个小球作简谐振动, 其运动方程为 $x(t) = 10\sin(\pi t - \frac{\pi}{3})$, 其中 $x(t)$ (单位: cm) 是小球相对于平衡点的位移, t (单位: s) 为运动时间, 则小球的瞬时速度首次达到最大时, $t =$
- A. 1 B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$
9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 32$, $q = -\frac{1}{2}$, 记 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ ($n \in \mathbb{N}_+$), 则数列 $\{T_n\}$
- A. 有最大项, 有最小项 B. 有最大项, 无最小项
C. 无最大项, 有最小项 D. 无最大项, 无最小项
10. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 + a_4 = \ln a_3$. 若 $a_1 > 1$, 则
- A. $a_3 > 1$, $a_2 < a_4$ B. $a_3 < 1$, $a_2 < a_4$
C. $a_3 > 1$, $a_2 > a_4$ D. $a_3 < 1$, $a_2 > a_4$

二、填空题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分。

11. 函数 $y = \cos x$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为_____.
12. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} =$ _____.
13. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3^n + r$, 则 $a_2 =$ _____, $r =$ _____.
14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 > 0$. 能说明“若 $a_3 > a_1$, 则 $a_4 > a_2$ ”为假命题的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ _____. (写出一个即可)
15. 物体的温度 ($^{\circ}\text{C}$) 在恒定温度 ($^{\circ}\text{C}$) 环境中的变化模型为: $T_{n+1} = T_n - 0.0081(T_n - T)$ ($n \in \mathbb{N}$), 其中 T 表示物体所处环境的温度, T_0 是物体的初始温度, T_n 是经过 n 小时后物体的温度, 且 $T_0 > T$. 现将与室温相同的食材放进冰箱的冷冻室, 如果用以上模型来估算该食材温度的变化情况, 则该食材的温度在单位时间下降的幅度_____ (填写正确选项的序号).

①越来越大

②越来越小

③恒定不变

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息。

三、解答题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_4 = -4$ ， $S_5 = -24$ 。

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 20 项和 T_{20} ；

(III) 在数列 $\{a_n\}$ 中是否存在不同的两项，使得它们的等比中项中至少有一个仍是该数列中的项？若存在，请写出这两项的值（写出一组即可）；若不存在，请说明理由。

17. 已知函数 $f(x) = \ln x - a\sqrt{x}$ ($a \in \mathbb{R}$)。

(I) 当 $a = 2$ 时，求函数的单调区间；

(II) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围。

18. 易拉罐用料最省问题的研究。

小明同学最近注意到一条新闻，易拉罐（如右图所示）作为饮品的容器，每年的用量可达数万亿个。这让他想到一个用料最优化的问题，即在易拉罐的体积一定的情况下，如何确定易拉罐的高和半径才能使得用料最省？

他研究发现，易拉罐的上盖、下底和侧壁的厚度是不同的，进而结合数学建模知识进行了深入研究。

以下是小明的研究过程，请你补全缺失的部分。

(I) 模型假设：

①易拉罐近似看成圆柱体；

②上盖、下底、侧壁的厚度处处均匀；

③上盖、下底、侧壁所用金属相同；

④易拉罐接口处的所用材料忽略不计。

(II) 建立模型：

记圆柱体积为 V ，高为 h ，底面半径为 r ，上盖、下底和侧壁的厚度分别为 d_1 ， d_2 ， d_3 ，金属用料总量为 C 。

由几何知识得到如下数量关系：

$$V = \pi r^2 h,$$

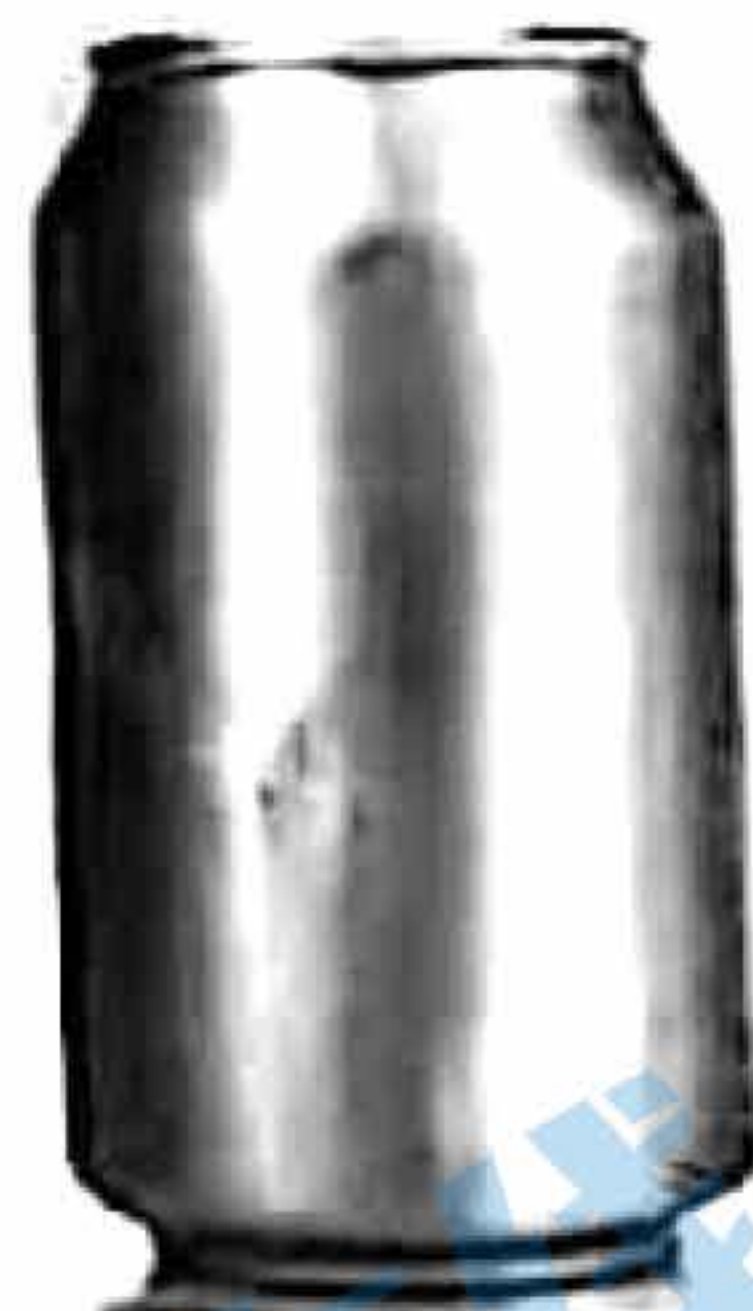
①

$$C = \pi r^2 d_1 + \pi r^2 d_2 + 2\pi r h d_3.$$

②

由①得 $h = \frac{V}{\pi r^2}$ ，代入②整理得： $C = \pi(d_1 + d_2)r^2 + \frac{2Vd_3}{r}$ 。

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，获取更多试题资料及排名分析信息。



因为 V, d_1, d_2, d_3 都是常数, 不妨设 $a = \pi(d_1 + d_2), b = 2Vd_3$,

则用料总量的函数简化为 $C = ar^2 + \frac{b}{r}$.

请写出上述矩形框中代入整理这一步的目的是: _____.

(Ⅲ) 求解模型:

所以, 在 $r =$ _____ (用 a, b 表示) 时, C 取得最小值, 即在此种情况下用料最省.

(Ⅳ) 检验模型:

小明上网查阅到目前 330 毫升可乐易拉罐的数据, 得知 $d_1 = 0.028(\text{cm}), d_2 = 0.021(\text{cm}), d_3 = 0.011(\text{cm})$, 代入 (Ⅲ) 的模型结果, 经计算得 $r \approx 2.868(\text{cm})$.

经验算, 确认计算无误, 但是这与实际罐体半径 3.305 cm 差异较大.

实际上, 在经济利益驱动之下, 目前使用的罐体成本应该已达最优.

(Ⅴ) 模型评价与改进:

模型计算结果与现实数据存在较大差异的原因可能为: _____.

相应改进措施为: _____.

19. 集合 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} (a_i \in \mathbb{N}_+, i = 1, 2, \dots, n)$, 集合 $T = \{b_{ij} | b_{ij} = a_i + a_j, 1 \leq i < j \leq n\}$, 若集合 T 中元素个数为 $\frac{n(n-1)}{2}$, 且所有元素从小到大排列后是等差数列, 则称集合 S 为“好集合”.

(Ⅰ) 判断集合 $S_1 = \{1, 2, 3\}, S_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ 是否为“好集合”;

(Ⅱ) 若集合 $S_3 = \{1, 3, 5, m\} (m > 5)$ 是“好集合”, 求 m 的值;

(Ⅲ) “好集合” S 的元素个数是否存在最大值? 若存在, 求出该最大值; 若不存在, 请说明理由.