

2021 北京房山高 一（下） 期末

数 学

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题 共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) “直线 l 不在平面 α 内”用数学符号表示为

(A) $l \notin \alpha$

(B) $l \not\subset \alpha$

(C) $l \in \alpha$

(D) $l \subset \alpha$

(2) 已知角 θ 的终边经过点 $P(3, -1)$ ，则 $\cos \theta =$

(A) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

(B) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

(C) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

(D) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

(3) 已知球的体积为 $\frac{32\pi}{3}$ ，则它的半径为

(A) 2

(B) $2\sqrt{2}$

(C) 4

(D) $4\sqrt{2}$

(4) 在 $\triangle ABC$ 中， $BC = 6$ ， $A = \frac{\pi}{3}$ ， $B = \frac{\pi}{4}$ ，则 $AC =$

(A) $2\sqrt{3}$

(B) $3\sqrt{2}$

(C) $2\sqrt{6}$

(D) $3\sqrt{6}$

(5) 下列命题正确的是

(A) 正方形的直观图是正方形

(B) 用一个平面去截棱锥，底面和截面之间的部分组成的几何体是棱台

(C) 各个面都是三角形的几何体是三棱锥

(D) 圆锥有无数条母线

(6) 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 $\sqrt{3}$ ，底面边长为 2，则正四棱锥 $P-ABCD$ 的侧面积为

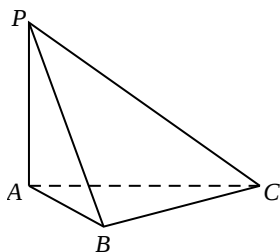
(A) $8\sqrt{3}$

(B) 8

(C) $4\sqrt{3}$

(D) 4

- (7) 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, $PA=AB=BC=1$, 则侧面 PBC 与底面 ABC 所成的二面角的大小是



(A) 30°

(B) 45°

(C) 60°

(D) 90°

- (8) 设 α , β 是两个不同的平面, m , n 是两条不同的直线, $m \perp \alpha$, $n \perp \beta$, 则“ $m \parallel n$ ”是“ $\alpha \parallel \beta$ ”的

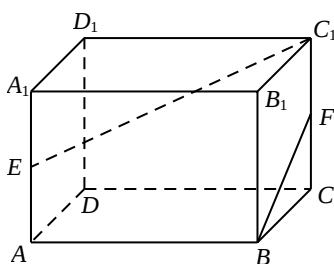
(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

- (9) 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=AD=2$, $AB=3$, E , F 分别为棱 AA_1 , CC_1 的中点, 过 BF 的平面 α 与直线 C_1E 平行, 则平面 α 截该长方体所得截面的面积为



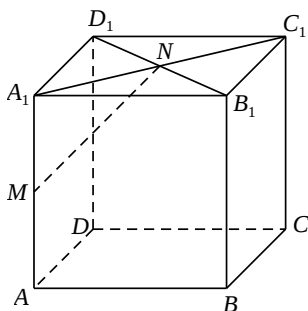
(A) 3

(B) $3\sqrt{2}$

(C) $3\sqrt{3}$

(D) $3\sqrt{5}$

- (10) 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为棱 AA_1 的中点, A_1C_1 与 B_1D_1 相交于点 N , P 是底面 $ABCD$ 内 (含边界) 的动点, 总有 $A_1P \perp MN$, 则动点 P 的轨迹的长度为



(A) 2

(B) $\sqrt{5}$

(C) $2\sqrt{2}$

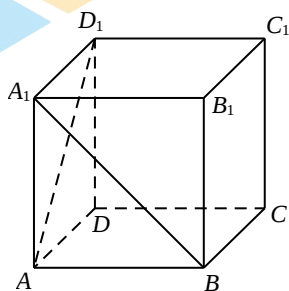
(D) 3

第二部分（非选择题 共 100 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

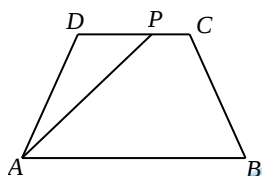
(11) 已知长方体的长、宽、高分别为 3, 2, 1, 则它的体对角线长为_____.

(12) 如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 AD_1 与 A_1B 所成角的大小为_____.



(13) 函数 $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 的最小正周期是 π , 则 $\omega =$ _____, $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最小值为_____.

(14) 如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $CD = 2$, 点 P 为线段 CD 上一个动点（含端点），则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的最大值为_____.



(15) 已知三个不同的平面 α , β , γ 和一条直线 m , 给出五个论断: ① $m \perp \alpha$; ② $m \parallel \beta$; ③ $\alpha \perp \beta$; ④ $\alpha \perp \gamma$; ⑤ $\beta \parallel \gamma$. 以其中的两个论断作为条件，一个论断作为结论，写出一个正确的命题_____. (可以用序号表示)

- (16) 如图 1, 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $B = 90^\circ$, $BC = 3$, $AB = 6$, D , E 分别是 AB , AC 上的点, 且 $DE \parallel BC$, $DE = 2$, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起, 使 A 到 A_1 , 得到四棱锥 $A_1 - DECB$, 如图 2. 在翻折过程中, 有下列结论:

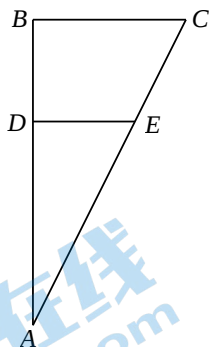


图 1

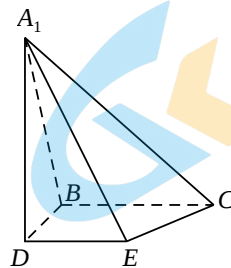


图 2

- ① $DE \perp$ 平面 A_1DB 恒成立;
- ② 若 M 是 A_1B 的中点, N 是 DB 的中点, 总有 $MN \parallel$ 平面 A_1DE ;
- ③ 异面直线 A_1C 与 DE 所成的角为定值;
- ④ 三棱锥 $B - A_1DE$ 体积的最大值为 $\frac{8}{3}$.

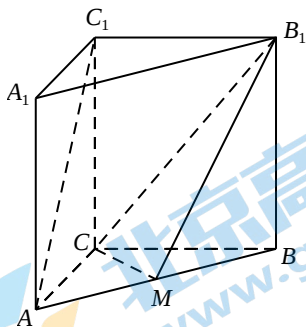
其中正确结论的序号为_____.

三、解答题共 5 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

- (17) (本小题 15 分)

如图, 已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC = BC$, M 为 AB 的中点.

- (I) 求证: $CM \perp$ 平面 ABB_1A_1 ;
- (II) 求证: $AC_1 \parallel$ 平面 CMB_1 .



(18) (本小题 14 分)

已知 $\triangle ABC$ 中, $\cos C = \frac{7}{8}$, $a = 3$. 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求:

(I) b 的值;

(II) $\triangle ABC$ 的面积.

条件①: $b = 2c$;

条件②: $b + c = 6$.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.

(19) (本小题 14 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $a \sin B = b \cos A$.

(I) 求 $\angle A$ 的大小;

(II) 求 $\cos B + \sqrt{2} \cos C$ 的最大值.

(20) (本小题 14 分)

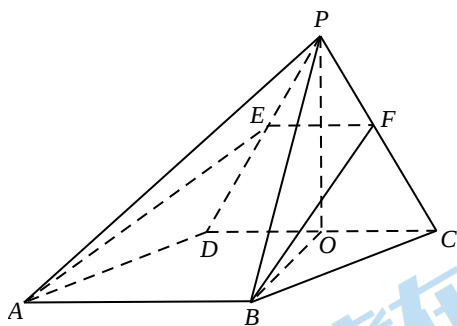
如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是平行四边形, 平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $\triangle PDC$ 是正三角形, 点 O 是 CD 的中点, 点 E, F 分别在棱 PD, PC 上.

(I) 求证: $PO \perp AD$;

(II) 若 A, B, E, F 共面, 求证: $EF \parallel AB$;

(III) 在侧面 PAD 中能否作一条直线段使其与平面 PBO 平行? 如果能, 请写出作图的过程并给出证明;

如果不能, 请说明理由.



(21) (本小题 13 分)

若函数 $f(x) = a \sin x + b \cos x$ ($a, b \in \mathbf{R}$)，非零向量 $\mathbf{m} = (a, b)$ ，我们称 $\mathbf{m}$ 为函数 $f(x)$ 的“相伴向量”， $f(x)$ 为向量 $\mathbf{m}$ 的“相伴函数”。

(I) 已知函数 $f(x) = 2 \cos^2 \frac{x}{2} + \sin x - 1$ ，求 $f(x)$ 的“相伴向量”；

(II) 记向量 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, 1)$ 的“相伴函数”为 $g(x)$ ，将 $g(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再将所得的图象上的所有点向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $h(x)$ ，若 $h(2\alpha + \frac{\pi}{3}) = \frac{6}{5}$ ，

$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，求 $\sin \alpha$ 的值；

(III) 对于函数 $\varphi(x) = \sin x \cos 2x$ ，是否存在“相伴向量”？若存在，求出 $\varphi(x)$ 的“相伴向量”；若不存在，请说明理由。

2021 北京房山高 一（下） 期末数学

参考答案

一、选择题（每小题 5 分，共 50 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	A	C	D	B	B	C	D	C

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分，有两空的第一空 3 分，第二空 2 分）

(11) $\sqrt{14}$

(12) $\frac{\pi}{3}$

(13) 2; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(14) 12

(15) ①②③ (③⑤④; ④⑤③)

(16) ①②④ (全选对 5 分，选不全 3 分，有③不得分)

三、解答题（共 5 小题，共 70 分）

(17) (本小题 15 分)

解:

(I) 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC = BC$, M 为 AB 的中点,

$$\therefore CM \perp AB$$

又 $\because AA_1 \perp$ 底面 ABC , $CM \subset$ 底面 ABC

$$\therefore AA_1 \perp CM$$

$$\therefore CM \perp$$
 平面 ABB_1A_1

(II) 连接 BC_1 , 设 BC_1 与 B_1C 交于 O , 则 O 是 BC_1 的中点

连接 MO , 则 MO 是 $\triangle ABC_1$ 的中位线,

$$\therefore MO \parallel AC_1,$$

$$\because AC_1 \not\subset$$
 平面 CMB_1 , $MO \subset$ 平面 CMB_1

$$\therefore AC_1 \parallel$$
 平面 CMB_1

(18) (本小题 14 分)

解:

若选择①,

$$(I) \text{ 由 } \cos C = \frac{7}{8}, \text{ 得 } \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{7}{8},$$

$$\text{由 } a = 3, b = 2c, \text{ 得 } \frac{9 + b^2 - (\frac{b}{2})^2}{6b} = \frac{7}{8},$$

解得 $b = 3$ 或 $b = 4$.

$$(II) \cos C = \frac{7}{8}, 0 < C < \pi, \text{ 则 } \sin C = \sqrt{1 - (\frac{7}{8})^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$\text{当 } b = 3 \text{ 时, } a = 3, \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{9\sqrt{15}}{16},$$

$$\text{当 } b = 4 \text{ 时, } a = 3, \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

若选择②,

$$(I) \text{ 由 } \cos C = \frac{7}{8}, \text{ 得 } \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{7}{8},$$

$$\text{由 } a = 3, b + c = 6, \text{ 得 } \frac{9 + b^2 - (6 - b)^2}{6b} = \frac{7}{8},$$

解得 $b = 4$.

$$(II) \cos C = \frac{7}{8}, 0 < C < \pi, \text{ 则 } \sin C = \sqrt{1 - (\frac{7}{8})^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

(19) (本小题 14 分)

解:

$$(I) \text{ 由 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, a \sin B = b \cos A, \text{ 得 } \sin A \sin B = \sin B \cos A, \sin B \neq 0,$$

得 $\tan A = 1$,

因为 $0 < A < \pi$, 所以 $\angle A = \frac{\pi}{4}$.

(II) 由 (I) 知, $\angle B + \angle C = \frac{3\pi}{4}$

$$\cos B + \sqrt{2} \cos C = \cos B + \sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{4} - B\right)$$

$$= \cos B - \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \cos B + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \sin B$$

$$= \sin B.$$

因为 $0 < B < \frac{3\pi}{4}$, 所以当 $B = \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos B + \sqrt{2} \cos C$ 取得最大值 1

(20) (本小题 14 分)

解:

(I) $\because \triangle PDC$ 是正三角形, 点 O 是 CD 的中点,

$$\therefore PO \perp CD,$$

又平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PDC \cap$ 平面 $ABCD = CD$

$$\therefore PO \perp \text{平面 } ABCD,$$

$$AD \subset \text{平面 } ABCD$$

$$\therefore PO \perp AD$$

(II) 又 $\because$ 底面 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB \parallel CD$$

又 $CD \subset$ 平面 PDC , $AB \not\subset$ 平面 PDC

$$\therefore AB \parallel \text{平面 } PDC$$

平面 $ABEF \cap$ 平面 $PDC = EF$, $AB \subset$ 平面 $ABEF$

$$\therefore EF \parallel AB$$

(III) 取 PA 的中点 M , 取 PB 的中点 N , 连接 DM, ON, MN

MN 是 $\triangle PAB$ 的中位线,

$$\therefore MN \parallel AB, MN = \frac{1}{2} AB,$$

点 O 是 DC 的中点, 且 $DO \parallel AB$, $DO = \frac{1}{2} AB$,

$$\text{则 } MN \parallel DO, MN = DO$$

$$\therefore \text{四边形 } MNOD \text{ 是平行四边形}$$

$DM \parallel ON$,

$ON \subset \text{平面 } PBO$, $DM \not\subset \text{平面 } PBO$

$DM \parallel \text{平面 } PBO$,

$DM \subset \text{平面 } PAD$, 在平面 PAD 中能作出直线段 DM

(21) (本小题 13 分)

解:

(I) $f(x) = 2\cos^2 \frac{x}{2} + \sin x - 1 = \sin x + \cos x$, 则函数 $f(x)$ 的“相伴向量” $\mathbf{m} = (1, 1)$

(II) 依题意, $g(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$,

将 $g(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 得到函数

$y = 2\sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$, 再将所得的图象上所有点向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数

$$h(x) = 2\sin[\frac{1}{2}(x + \frac{2\pi}{3}) + \frac{\pi}{6}] = 2\cos \frac{x}{2},$$

由 $h(2\alpha + \frac{\pi}{3}) = \frac{6}{5}$, 得 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{3}{5}$

由 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\alpha + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$, 则 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{4}{5}$

$$\sin \alpha = \sin[(\alpha + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{6}] = \sin(\alpha + \frac{\pi}{6})\cos \frac{\pi}{6} - \cos(\alpha + \frac{\pi}{6})\sin \frac{\pi}{6} = \frac{4\sqrt{3}-3}{10}$$

(III) 若函数 $\varphi(x) = \sin x \cos 2x$ 存在“相伴向量”, 则存在 $a, b \in \mathbf{R}$, 使得

$$\varphi(x) = \sin x \cos 2x = a \sin x + b \cos x \text{ 对任意 } x \in \mathbf{R} \text{ 都成立,}$$

令 $x = 0$, 得 $b = 0$, 因此 $\sin x \cos 2x = a \sin x$, 即 $\sin x = 0$ 或 $\cos 2x = a$

显然上式对任意 $x \in \mathbf{R}$ 不都成立,

所以, 函数 $\varphi(x) = \sin x \cos 2x$ 不存在“相伴向量”.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯